MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII

C. LAZU și E. TRUFIN

ELECTROTEHNICĂ GENERALĂ

I

BUCUREȘTI
1958

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI ȘI CULTURII

C. LAZU și E. TRUFIN

ELECTROTEHNICĂ GENERALĂ

I

1958

TIPOGRAFIA ÎNVĂȚĂMINTULUI, BUCUREȘTI — c. 15

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Prezenta lucare a fost întocmită pentru a servi ca manual unic de *„Electrotehnică generală“* pentru facultățile de specialitate neelectrotehnică din învățămîntul superior. Ea a fost elaborată în urma sarcinii primite de autori din partea Ministerului Învățămîntului și Culturii.

Diversele programe analitice ale cursului de *„Electrotehnică generală“* prezentînd, după specificul facultăților respective, unele diferențe de la o facultate la alta, în special în ceea ce privește aplicațiile, lucrarea a fost concepută pentru a satisface cît mai deplin toate aceste programe.

Pentru a corespunde acestei cerințe, lucrarea se împarte în trei volume, care pot fi privite ca trei părți de sine stătătoare ale cursului.

Primul volum se ocupă cu legile și fenomenele electrotehnicii și constituie baza teoretică a întregii lucrări. Sînt tratate: noțiuni de electrostatică; circuitele liniare de curent continuu; efectul chimic al curentului continuu; electromagnetismul; curentul alternativ; circuitele liniare de curent alternativ; sistemele trifazate; mărimile alternative nesinusoidale; circuitele neliniare de curent alternativ (cu bobine cu miez de fier) și curentul în vid și gaze. Utilizînd metoda de expunere adoptată de autorii sovietici în manualele de electrotehnică cu caracter general, studiul fenomenelor electrostatice a fost restrîns la strictul necesar înțelegerii teoriei curenților electrici.

În partea sa finală, volumul întîi cuprinde și studiul aparatelor electrice de măsurat și al metodelor de măsurare, precum și un capitol consacrat măsurării pe cale electrică a mărimilor neelectrice.

Volumul doi al lucrării este consacrat aplicațiilor electrotehnicii. Sînt studiate: teoria funcționării mașinilor electrice; aparatajul electric; aparatele electronice și ionice; centralele electrice; rețelele de transport și distribuție; electrotermia și iluminatul electric. Dintre numeroasele aplicații ale electrotehnicii, au fost tratate numai cele cu caracter mai general.

Volumul trei se ocupă cu acționarea electrică, cu comanda de la distanță (telecomanda) și cu automatizarea proceselor de producție. El cuprinde: noțiunile de bază ale acționărilor electrice; caracteristicile mecanice ale acestor acționări și diversele regimuri de funcționare a motoarelor de acționare; reglarea vitezei acționărilor electrice; regimurile tranzitorii și diagramele de sarcină; alegerea puterii motoarelor electrice necesare unei acționări date; comanda automată a acționărilor electrice; scheme de comandă a acționărilor. Ținîndu-se seama de directivele Congresului al II-lea P. M. R. cu privire la mecanizarea și automatizarea

proceselor de producţie, se introduc, pentru prima oară într-un curs de electrotehnică generală, elementele necesare pregătirii viitorilor ingineri mecanici, siderurgici, metalurgici, minieri etc., în domeniul acţionărilor electrice şi al automatizărilor.

Întreaga lucrare este însoţită de aplicaţii numerice, care întregesc expunerile teoretice şi le uşurează înţelegerea.

Este de la sine înţeles că diversele facultăţi vor folosi din lucrare acele capitole şi paragrafe care corespund programelor analitice respective. În acest scop, lucrarea este astfel tratată încît o serie de fenomene fizice şi de aplicaţii practice, al căror studiu nu este obligatoriu, să poată fi lăsată la o parte, fără ca prin aceasta să sufere înţelegerea paragrafelor următoare.

Primele două volume ale lucrării au fost elaborate de *C. Lazu,* iar volumul trei de *E. Trufin.* Întreaga lucrare a fost revăzută de ambii autori.

Aducem, şi pe această cale, mulţumiri Prof. Acad. *C. Budeanu* şi Prof. Dr. Ing. *R. Rădulet,* membru corespondent al Academiei R.P.R. pentru sugestiile şi sfaturile date, care ne-au folosit la întocmirea lucrării.

La vol. I şi II, recenzia ştiinţifică a manuscrisului a fost făcută de Prof. *A. Popovici,* de la Institutul Politehnic din Iaşi, iar la vol. III, de Prof. Dr. Ing. *I. S. Antoniu,* de la Institutul Politehnic din Bucureşti, şi de Conf. *M. Braşovan,* de la Institutul Politehnic din Timişoara. Recenzenţii au făcut o serie de observaţii şi sugestii preţioase, de care am ţinut în bună parte seama şi pentru care le mulţumim şi le suntem recunoscători. De asemenea mulţumim Asist. *Maria Iacobele* pentru ajutorul ce ne-a dat la corectura probelor de tipar.

Autorii

INTRODUCERE

1. Definiția și istoricul pe scurt al electrotehnicii

Electrotehnica este o știință și o tehnică. Ca știință, ea se ocupă cu studiul general al fenomenelor electrice și magnetice și cuprinde, sub o formă mai restrînsă, acea parte a fizicii generale cunoscută sub numele de electricitate. Ca disciplină tehnică, electrotehnica se ocupă cu studiul aplicațiilor practice ale fenomenelor electrice și magnetice, care stau la baza producerii și utilizării energiei electrice.

Descoperirea pilei electrice, în anul 1799, de către fizicianul italian *A. Volta* (1745—1827), reprezintă unul din marile evenimente ale istoriei electricității și poate fi privită, totodată, ca începutul istoriei electrotehnicii. Pila lui Volta, sau elementul galvanic, constituie prima sursă de producere continuă a energiei electrice și, odată cu ea, a curentului electric de durată. Apariția curentului electric dînd cercetătorilor posibilitatea studierii legilor sale și a efectelor care îi însoțesc trecerea prin conductoarele electrice marchează începutul unei ere noi în studiul fenomenelor electrice.

În anul 1802, la trei ani numai după apariția pilei electrice, fizicianul rus *V. V. Petrov* (1761—1834), cu ajutorul unei pile foarte puternice, descoperă fenomenul arcului electric care a fost observat și studiat mai tîrziu, din nou, și de fizicianul și chimistul englez *H. Davy* (1778-1829). V. V. Petrov remarcă, încă de la început, posibilitatea utilizării arcului ca sursă de lumină și pune, de asemenea, primele baze ale întrebuințării lui în procesele metalurgice. Meritul utilizării practice a arcului electric la iluminat îi revine însă altui rus, electrotehnicianul *P. N. Iablocicov* (1847—1894), care descoperă, în 1876, „lumînarea electrică". În anul 1885, *N. N. Benardos* utilizează, pentru prima oară, arcul electric la sudarea metalelor.

În anul 1819, fizicianul danez *J. C. Oersted* (1777—1851) descoperă influența curentului electric asupra acului magnetic. El stabilește astfel existența unui cîmp magnetic în jurul conductoarelor parcurse de curent și face, cel dintîi, legătura între fenomenele electrice și cele magnetice. Interpretarea precisă a influenței curentului electric asupra acului magnetic o dă, în același an, savantul matematician și fizician francez *A. M. Ampère* (1775—1836), care stabilește și sensul de deplasare al acului, prin cunoscuta regulă a lui Ampère.

În anul următor (1820), Ampère descoperă fenomenul acțiunii reciproce dintre curenți și concepe știința electrodinamicii, căreia îi creează, în 1823, prima sa bază matematică.

În același an (1820), fizicianul francez *F. Arago* (1786—1853) reușește să magnetizeze o piesă de oțel cu ajutorul unui cîmp magnetic produs de curentul electric, creînd astfel primul electromagnet.

În 1823, fizicianul german *J. T. Seebek* (1770—1831) descoperă fenomenul termolectricității, care a provocat și mai provoacă încă cercetări asidue pentru traducerea în fapt a ideei seducătoare de transformare directă, în condiții economice convenabile, a energiei termice în energie electrică.

În anul 1827, fizicianul german *G. S. Ohm* (1787—1854) stabilește relația de legătură între intensitatea curentului dintr-un circuit electric și forța electromotoare care alimentează circuitul. Această relație, cunoscută sub denumirea de legea lui Ohm, constituie prima lege fundamentală a curentului electric. Stabilirea legii lui Ohm și introducerea noțiunii de rezistență electrică a conductoarelor, aduce claritate și precizie în toate calculele circuitelor electrice.

O descoperire de importanță capitală pentru dezvoltarea ulterioară a electrotehnicii, este aceea a fenomenului inducției electromagnetice făcută în anul 1831 de chimistul și fizicianul englez *M. Faraday* (1791—1867). El stabilește, cu această ocazie, strînsa legătură dintre fenomenele electrice și cele magnetice. Curînd după aceea, în anul 1833, fizicianul rus academician *E. H. Lenz* (1804—1865) precizează fenomenul inducției electromagnetice, stabilind legea care exprimă relația dintre sensurile curenților și acțiunile lor electromagnetice și electrodinamice. Această lege, cunoscută sub numele de legea lui Lenz, prezintă o deosebită importanță practică.

Continuînd lucrările lui Davy asupra efectelor chimice ale curentului electric, Faraday descoperă, în anul 1834, legile electrolizei, care stabilesc, cantitativ, relațiile dintre fenomenele electrice și cele chimice.

În anul 1836, fizicianul rus academician *B. S. Iacobi* (1801—1874) descoperă galvanoplastia, care găsește, în scurt timp, o largă utilizare, constituind una dintre primele aplicații industriale, pe scară mare, ale energiei electrice. Doi ani mai tîrziu (1838), cu o încredere în posibilitățile practice ale energiei electrice uimitoare pentru acea vreme, B. S. Iacobi reușește să acționeze roțile cu palete ale unei nave cu ajutorul unui motor electric, de concepție proprie, alimentat cu energie de la o baterie galvanică. Această experiență a lui Iacobi constituie prima încercare de a se utiliza energia electrică în acționări mecanice, și, totodată, de a se utiliza curentul electric în tracțiune.

În anul 1843, fizicianul englez *J. Joule* (1818—1889) și academicianul rus *Lenz* au descoperit, cam în același timp, legea efectului termic al curentului electric, cunoscută sub numele de legea Joule-Lenz.

Fizicianul francez *G. Planté* izbutește, în anul 1859, să creeze o pilă reversibilă, cunoscută și folosită astăzi pretutindeni sub numele de acumulator electric.

Dacă în prima jumătate a secolului trecut aplicațiile energiei electrice nu iau o dezvoltare mai mare, aceasta se datorește, în primul rînd, lipsei unor generatoare electrice capabile să producă energia necesară în cantități suficiente și la un preț convenabil și să înlocuiască bateriile galvanice, foarte costisitoare, care produceau o energie electrică scumpă.

Problema aceasta, a sursei ieftine de energie, este rezolvată prin apariția mașinilor generatoare de energie electrică. Bazate pe fenomenul

inducției electromagnetice și antrenate, de regulă, de motoare cu aburi sau de turbine hidraulice, ele transformau, pentru prima oară, energia mecanică în energie electrică. Primele tipuri de asemenea generatoare, cu calități industriale, apar între 1860 și 1870 și sînt create, independent, de italianul *Pacinotti* și de belgianul *Gramme*. Generatoarele Gramme-Pacinotti au indusul în inel, sînt înzestrate cu colector și cu autoexcitație și produc curent continuu. Li se dă numele de dinam. În anul 1873, dinamul se dovedește a fi reversibil, adică poate funcționa și ca motor electric atunci cînd este alimentat cu energie electrică.

Noile generatoare industriale produc, prin utilizarea resurselor de energie naturală, o energie destul de ieftină, creînd astfel premizele necesare unei dezvoltări, pe scară largă, a aplicațiilor practice ale energiei electrice.

Apariția motorului electric, simplu, ușor de mînuit, ocupînd un spațiu redus și producînd de-a dreptul o mișcare circulară, ceea ce îl făcea potrivit celor mai variate întrebuințări, lărgește sensibil sfera de folosire a energiei electrice.

Curînd după apariția noilor generatoare se introduce iluminatul electric, mai întîi cel cu arc, al lui Iablocicov (1876), apoi cel cu incandescență, descoperit în 1872 de rusul *A. N. Lodîghin* (1847—1923) și perfecționat, în 1879, de americanul *T. A. Edison* (1847—1931). Iluminatul incandescent ia, destul de repede, o mare amploare.

Lumînările electrice ale lui Iablocicov erau alimentate cu curent alternativ de la un generator Gramme de curent alternativ. Pentru a asigura alimentarea unui număr cît mai mare de lumînări electrice, de la același generator, și pentru a permite fiecărei lumînări, sau grup de lumînări, să funcționeze independent, Iablocicov creează, în 1877, un aparat electromagnetic, pe care îl numește bobină de inducție. Acest aparat, completat și perfecționat, primește mai tîrziu numele de transformator electric. Cîțiva ani mai tîrziu (1882), transformatorul este inventat, pentru a doua oară, de rusul *Usaghin,* iar după aceea este perfecționat de francezul *Gaulard* (1885) și de inginerii *Zipernovski, Dèri* și *Blatt,* de la Uzina Ganz din Budapesta (1885).

Marele avînt luat de industrie în a doua jumătate a sec. XIX, în special după apariția motorului electric și a iluminatului electric, impune procurarea unor cantități de energie din ce în ce mai mare. În multe cazuri această energie se putea obține mai convenabil nu de la generatoare electrice așezate lîngă centrele de consum, ci la distanțe mari de aceste centre, de exemplu de la generatoare așezate în punctele unde se dispunea de o cădere importantă de apă, sau de un zăcămînt de cărbuni inferiori al căror transport era neeconomic. Metodele de distribuire a energiei electrice la consumatori fiind cunoscute, rămîneau de găsit numai mijloacele, destul de economice, de transport la distanță a energiei electrice produse.

Rezolvarea acestei probleme era legată de folosirea unor curenți de tensiune înaltă. La tensiunile joase, de ordinul a 100 V, folosite în acea vreme, transporturile de energie electrică, chiar la distanțe relativ mici, necesitau o cantitate atît de mare de cupru pentru linia electrică, încît proiectul devenea neeconomic.

Problema este rezolvată, pentru curentul continuu, de către inginerul francez *M. Deprez,* care construiește primele dinamuri de tensiune relativ

mare (de ordinul a 6 000 V), urmat apoi de inginerul elveţian *Thurry* şi alţii.

Thurry a aplicat sistemul cuplării în serie atît a generatoarelor electrice, cît şi a motoarelor electrice alimentate (distribuţia în serie), obţinînd astfel tensiuni suficient de înalte (pînă la 100 000 V).

Prima utilizare industrială a curentului alternativ a fost pentru alimentarea lumînărilor lui Iablocicov. După apariţia iluminatului cu incandescenţă, se renunţă la procedeul lui Iablocicov şi curentul alternativ este părăsit.

Părăsirea vremelnică a curentului alternativ se explică prin faptul că pînă la acea epocă el fusese cu mult mai puţin studiat decît curentul continuu. În timpul folosirii sale apăreau o serie de fenomene pe atunci inexplicabile (de inducţie, de capacitate, de rezonanţă, de variaţia frecvenţii etc.), care produceau mari neajunsuri în exploatare. În afară de aceasta, o cauză nu mai puţin importantă, care a dus la înlăturarea curentului alternativ, a fost lipsa unor motoare industriale de curent alternativ care să poată concura excelentele motoare de curent continuu existente.

Apariţia transformatoarelor electrice care, oferind posibilitatea obţinerii uşoare a curenţilor de înaltă tensiune, rezolva problema transportului la distanţă, aduce din nou în actualitate studierea şi folosirea curentului alternativ.

Încercările de adoptare a acestui curent întîmpină la început o opoziţie aprigă din partea susţinătorilor curentului continuu. Cu trecerea timpului, victoria revine însă de partea curentului alternativ. La aceasta a contribuit, în mare măsură, inginerul rus *M. O. Dolivo-Dobrovolschi* (1862-1919), care a susţinut, în mod documentat, introducerea curentului alternativ trifazat pentru transportul şi distribuţia energiei electrice.

M. O. Dolivo-Dobrovolschi realizează, în anul 1891, primul transport de energie electrică în sistemul trifazat, pe o distanţă de 175 km între Laufen şi Frankfurt, cu prilejul expoziţiei electrotehnice din Frankfurt pe Main (Germania), dovedind astfel, printr-un exemplu concret, cu date de exploatare, superioritatea sistemului alternativ trifazat de transport şi distribuţie, faţă de sistemele de curent continuu şi faţă de sistemul de curent alternativ bifazat, utilizat în S.U.A.

O mare importanţă în succesul curentului alternativ trifazat a avut descoperirea în acelaşi an (1891), de către M. O. Dolivo-Dobrovolschi, a motorului asincron trifazat, un motor ieftin, simplu, uşor de întreţinut şi de supraveghiat, care funcţionează cu o viteză practic constantă şi cu un randament ridicat. Prin construcţia acestui motor, Dolivo-Dobrovolschi rezolvă problema cea mai importantă de care depindea soarta curentului trifazat: aceea a electromotoarelor.

Cu aceeaşi ocazie, Dolivo-Dobrovolschi creează şi tipurile de generatoare trifazate sincrone şi de transformatoare trifazate, de care era legată producţia industrială, transportul la distanţă şi distribuţia energiei electrice în noul sistem trifazat.

Paralel cu dezvoltarea electrotehnicii curenţilor tari, ia fiinţă şi se dezvoltă electrotehnica curenţilor slabi, care se ocupă cu problemele transmiterii la distanţă, pe cale electrică, a semnalelor de tot felul.

Telegraful electromagnetic cu fir este descoperit de fizicianul rus *P. L. Silling* (1786—1837), în anul 1832, şi perfecţionat de B. S. Iacobi.

Scanned with OKEN Scanner

În 1837, germanul *Steinheil* înregistrează pe o bandă de hîrtie semnele transmise și descoperă rolul pămîntului ca conductor, suprimînd astfel firul de întoarcere. În același an, americanul *Morse* își brevetează electromagnetul și în 1843 realizează primul său aparat de transmisie și recepție.

Telefonul a fost descoperit în anul 1876 de fizicianul american *G. Bell* (1847—1922), în colaborare cu mecanicul *A. Wattson*.

Bazîndu-se pe lucrările teoretice ale lui Faraday și ale fizicianului englez *J. C. Maxwell* (1831-1879) asupra undelor electromagnetice, lucrări verificate experimental, în anul 1888, de fizicianul german *H. R. Hertz* (1857-1894), profesorul rus *A. S. Popov* (1859-1906) descoperă telegrafia fără fir, reușind să transmită, în anul 1896, pentru prima dată în lume, o telegramă prin intermediul undelor electromagnetice.

Progresele mari făcute de telegrafia și telefonia fără fir, de radio, de televiziune și de transmiterea la distanță a comenzilor prin unde electromagnetice se datoresc descoperirii, de către inginerul englez *J. A. Fleming*, a tubului cu doi electrozi, utilizat din 1904 ca detector, și descoperirii, în 1913, de către inginerul american *Lee De Forest*, a tubului cu trei electrozi, care putea fi utilizat ca detector, ca amplificator și ca generator de unde întreținute.

2. Noțiuni despre energie

Fenomenele electrice, și în general orice fenomen fizic, ascultă de *principiul conservării energiei*. Acest principiu, care constituie legea cardinală a fizicii moderne, stabilește că în orice proces fizic există un factor — energia — care nu poate fi creat, nici distrus, dar care poate suferi diverse transformări. Energia se prezintă în univers ca un element indestructibil, ale cărei modificări și transformări constituie, în ultimă analiză, complexul fenomenelor fizice.

Principiul conservării energiei a fost stabilit, în 1748, de savantul enciclopedist rus *Mihail Vasilievici Lomonosov*.

Înainte de a aborda studiul electrotehnicii, este necesar să examinăm, în treacăt, formele sub care se prezintă energia în procesele industriale și mecanismul transformării ei conservative.

Există două mari clase sau stări ale energiei: *energie de mișcare* sau *cinetică* și *energie statică* sau *potențială*.

a) *Energia cinetică*. Orice corp sau sistem de corpuri în mișcare posedă energie prin însăși faptul că se mișcă. Această energie poartă numele de energie de mișcare, sau energie cinetică.

În natură găsim energie cinetică în căderile de apă, în vînturi, în mișcările mărilor (prin valuri și maree) etc.

Energia cinetică este echivalentă cu forța vie a corpului sau a sistemului în mișcare și valoarea ei este dată de expresia $\frac{1}{2}$ mv^2, adică de semiprodusul masei corpului cu pătratul vitezei (suma semiproduselor analoge în cazul unui sistem de corpuri cu viteze diferite).

Energia cinetică nu poate fi folosită decît la locul și în momentul în care se produce. De aceea ea mai poartă numele de *energie actuală*.

b) *Energia potențială*. Această energie există în stare latentă în unele corpuri, sau sisteme de corpuri, aflate în repaus, și poate fi transformată, prin anumite procedee, în energie cinetică și apoi utilizată sub forma de lucru mecanic.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm, spre exemplu, o anumită cantitate de cărbune. În prezența oxigenului din aer cărbunele posedă energie potențială. Prin combustiune el poate transforma în abur, sub presiune, apa unei căldări, iar aburul poate produce lucru mecanic, acționînd o mașină termică.

Găsim energie potențială în resortul unui ceasornic întors, în apa aflată la un nivel ridicat în dosul unui baraj, într-o greutate ridicată la o înălțime oarecare etc.

Pornind de la una din stările de mai sus, energia poate lua, prin transformări, diverse forme.

Să urmărim un caz bine cunoscut de transformare a energiei.

Un motor Diesel acționează un generator de curent electric. Curentul este transmis unui atelier mecanic, unde alimentează motoarele mașinilor unelte și o serie de lămpi electrice pentru iluminat. În combustibilul care alimentează motorul Diesel, energia se află în stare potențială, sub formă de *energie chimică*. Prin arderea motorinei, energia chimică se transformă în *energie termică* (căldură), care la rîndul ei este transformată de mașină în *energie mecanică*. Generatorul electric transformă energia mecanică în *energie electrică*. Motoarele electrice ale atelierului transformă energia electrică din nou în energie mecanică. În mașinile unelte, energia mecanică, care servește la prelucrarea metalelor, este transformată, în parte, iarăși în căldură, care se pierde în atelier.

Constatăm că în acest proces de transformare energia trece prin următoarele forme: energie chimică; energie termică (căldură); energie mecanică; energie electrică; energie luminoasă. Această enumerare nu este însă limitativă, energia putînd lua și alte forme în afara celor arătate.

3. Proprietățile energiei electrice

În procesele industriale energia electrică apare, de regulă, ca o formă intermediară de energie, o verigă de legătură între o energie inițială, disponibilă, și o energie finală, specifică acestor procese, așa cum rezultă, de altfel, și din exemplul de mai sus. Energia inițială provine, în general, din combustibili (energia termică) și din căderi de apă (energia hidraulică). La aceste surse s-a adăogat, de curînd, o a treia sursă energetică, de extremă importanță și de mare viitor, energia atomică.

În momentul de față aproape că nu există proces industrial în care să nu întîlnim energia electrică. Rolul de intermediar al acestei energii în desfășurarea proceselor industriale se datorește, în primul rînd, calității sale, amintite, de a se lăsa transportată, în condiții economice convenabile, la distanțe uneori considerabile (de ordinul sutelor și chiar al miilor de km) și, în al doilea rînd, supleții sale, adică al posibilității de a fi dozată în cantități variind de la valori extrem de mici (energia elctromagnetică a semnalelor de radio), pînă la valori de sute de mii de kilowați, și de a putea fi distribuită, simultan, unui număr oricît de mare de consumatori.

Transportul economic al energiei electrice și distribuția ei în cantități mari și pe regiuni întinse a făcut posibilă reducerea considerabilă a prețului său de revenire prin punerea în valoare, prin lucrări de mare amploare, a căderilor de apă și a rezervoarelor de combustibili inferiori.

Scanned with OKEN Scanner

La calitățile de mai sus ale energiei electrice, trebuie să mai adăogăm: forma simplă, volumul redus și randamentul ridicat al motoarelor electrice și posibilitatea lor de a fi adaptate celor mai variate condiții de lucru și de a fi comandate comod de la distanță; randamentul ridicat cu care energia electrică poate fi transformată în oricare altă formă de energie necesară (energie mecanică, lumină, căldură sau frig, energie chimică, radiații electromagnetice etc.); spațiul relativ redus ocupat de instalațiile sale de transport și distribuție; posibilitatea schimbării cu ușurință a celor doi factori ai săi, tensiunea și curentul, pentru a o adapta cerințelor consumatorului; posibilitatea de a fi transmisă unui vehicol în viteză, prin simplul contact al acestuia cu un conductor metalic; ușurința cu care poate fi măsurată etc.

Ar fi lung să menționăm numeroasele aplicații și industrii create sau modificate prin apariția energiei electrice. Vom cita totuși, printre altele: industria telecomunicațiilor (telegrafia cu și fără fir, telefonia, radio, televiziunea etc.), iluminatul electric, electrometalurgia, electrochimia, comanda de la distanță a mașinilor și a mecanismelor (telecomanda și automatizarea), care iau, sub ochii noștri, o dezvoltare din ce în ce mai rapidă și care, în unele cazuri, a schimbat complet atît procedeele de fabricație cît și metodele de exploatare.

În țările înaintate primul loc în consumul de energie electrică îl ocupă marea industrie, în special industriile electrometalurgice și cele electrochimice, care astăzi sînt de neconceput fără cooperarea energiei electrice. Dezvoltarea rapidă a marei industrii în cursul secolului actual a ridicat consumul mondial de energie electrică de la 9 milioane de kilowattore, consumul din anul 1900, la 1 500 miliarde de kilowattore (sau 1,5 miliarde de megawattore), consumul înregistrat în anul 1954.

În cadrul necesităților generale de energie se prevede că cerințele mondiale de energie electrică se vor cifra în anul 2 000 la 9 miliarde de megawattore.

4. Rolul economic al electrificării

Prin electrificare, în sensul restrîns al cuvîntului, se înțelege introducerea și utilizarea energiei electrice, în locul altor forme de energie, în diverse aplicații industriale, agricole, menajere etc. În sensul larg al cuvîntului, prin electrificare se înțelege executarea planificată a lucrărilor pentru amenajarea și punerea în valoare în condiții optime, prin intermediul energiei electrice, a surselor naturale energetice, în primul rînd a acelor surse care nu pot fi valorificate pe alte căi (căderi de apă, combustibili inferiori, gaze naturale, gaze de furnal etc.), în scopul producerii unei energii ieftine și în cantități îndestulătoare necesității consumului.

În afara amenajării surselor primare de energie, electrificarea cuprinde ansamblul lucrărilor de producere (centrale electrice), de transport (stații de transformare și linii de înaltă tensiune) și de distribuție (stații de transformare și rețele de distribuție) a energiei electrice necesare proceselor industriale și nevoilor populației.

Electrificarea constituind baza oricărui plan de dezvoltare economică, realizarea planului de electrificare trebuie să prezinte întotdeauna un avans față de realizarea planurilor de dezvoltare industrială.

Scanned with OKEN Scanner

În țările socialiste, unde planurile de dezvoltare industrială sînt angrenate armonic cu cele de electrificare, se asigură condiții optime pentru realizarea planurilor generale de dezvoltare economică.

Planul de electrificare R.P.R. din 1950 și Directivele celui de al 2-lea Congres al P.M.R. fixează, ca prim obiectiv, instalarea și punerea în funcțiune a unor importante centrale electrice noi și dezvoltarea centralelor existente.

Principala centrală prevăzută în plan, a cărei realizare se apropie de sfîrșit, este centrala hidroelectrică V. I. Lenin de la Bicaz, cu o putere instalată de 210 000 kW.

Din lucrările Congresului al 2-lea al P.M.R. rezultă că între 1925 și 1938 puterea anuală medie instalată la noi în țară a fost de 23 536 kW, în timp ce în anii primului nostru cincinal, această putere medie instalată a fost de 108 mii kilowați, adică aproape de cinci ori mai mare. În ceea ce privește consumul de energie electrică pe cap de muncitor industrial, el a crescut în 1955 de cca. 2,5 ori față de 1948, producția de energie electrică a țării noastre ridicîndu-se în 1955 la un total de 4,5 miliarde kilowattore. În 1956 această producție a atins 4,93 miliarde de kilowattore.

În afara creerii și dezvoltării centralelor electrice, planul de electrificare al țării prevede construirea stațiilor de transformare, a liniilor de transport și a rețelelor de distribuție necesare.

Concomitent cu executarea planului de electrificare, au fost create o serie de fabrici de mașini electrice, de aparate și de materiale electrotehnice, care în prezent nu numai că acoperă, în mare măsură, necesitățile mereu crescînde al consumului intern, dar produc și pentru export.

5. Sistemul de unități de măsură folosite în studiul electrotehnicii

Pentru măsurarea mărimilor mecanice, electrice și magnetice a fost folosit, în lucrarea de față, sistemul practic MKS, completat cu a patra unitate fundamentală de natură electromagnetică.

Sistemul mecanic MKS, adoptat prin STAS-ul 737—49, se bazează pe următoarele unități fundamentale:

Lungimea: metrul (m); dimensiune L.
Masa: kg masă (kg); dimensiune M.
Timpul: secunda (s); dimensiune T.

Principalele unități derivate ale acestui sistem sînt:

Unitatea de forță: 1 Newton (N) $= \frac{1}{9{,}81}$ kilograme forță (kgf) $=$ $= 10^5$ dyn.

Unitatea de lucru mecanic: 1 Joule (J) $=$ 1 N. 1 m $= \frac{1}{9{,}81}$ kgm $=$ $= 10^{-7}$ erg.

Unitatea de putere: 1 Watt (W) $= \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ secundă}}$.

Acest sistem este cunoscut și sub numele de sistemul „Giorgi".

Prin STAS-ul 862—49, sistemul MKS a fost extins și în electricitate și magnetism, completîndu-se cu o a patra unitate fundamentală:

Intensitatea curentului: amperul (A); dimensiune I.

S-a obţinut astfel *sistemul general practic* de unităţi de măsură MKSA, cu dimensiunile LMTI.

Adoptarea amperului ca a patra unitate a sistemului general a dus, în sistemul clasic (nerationalizat), la o valoare a permitivităţii vidului (constantei dielectrice) egală cu $\frac{1}{9.10^9}$ unităţi de permitivitate şi a unei valori a permeabilităţii magnetice a vidului de 10^{-7} unităţi de permeabilitate. În sistemul raţionalizat, aceste valori devin, respectiv, $\frac{1}{4\pi\, 9.10^9}$ şi $4\pi \cdot 10^{-7}$ unităţi.

În tabela 1 sînt reproduse stasurile cu unităţile principale practice de măsură ale mărimilor întîlnite în studiul electrotehnicii.

În capitolele despre electrodinamică şi electromagnetism ale tratatelor de fizică şi în multe lucrări de documentare, se întîlnesc formule şi reprezentări grafice, utilizate în calcule, întocmite în vederea aplicării lor în sistemul de unităţi CGS electromagnetic (CGS e.m.); de aceea, în stasurile din tabela 1 se arată şi corespondenţa între sistemul general practic MKSA şi sistemul CGS e. m.

În ce priveşte unităţile de măsură ale sistemului CGS electrostatic (CGS e. s.), a căror aplicare de asemenea poate fi găsită în lucrările de documentare, în special în capitolele de electrostatică ale tratatelor de fizică, aceste unităţi se deduc din unităţile sistemului CGS e. m. cu ajutorul următoarelor relaţii de transformare:

Intensitatea curentului: 1 unit. CGS e.s. $= \frac{1}{3\cdot 10^{10}}$ unit. CGS e. m.

Cantitatea de electricitate: 1 unit. CGS e.s. $= \frac{1}{3\cdot 10^{10}}$ unit. CGS e.m.

Potenţialul şi tensiunea electrică: 1 unit. CGS e.s. $= 3.10^{10}$ unit. CGS e.m.

Capacitatea: 1 unit. CGS e.s. (cm) $= \frac{1}{9\cdot 10^{-20}}$ unit. CGS e. m.

Permitivitatea: 1 unit. CGS e.s. $= \frac{1}{9\cdot 10^{20}}$ unit CGS e.m. (nerat.).

Tabela 1

Unităţile fundamentale şi principalele unităţi derivate ale sistemului MKSA

Mărimea şi simbolul ei	Dimensiunile	Unitatea de măsură		Relaţii de transformare
		Denumire	Simbol	
Unităţi fundamentale principale (STAS 737 — 49)				
Lungime l	L	Metru	m	1 m = 100 cm
Masă m	M	Kilogram	kg	1 kg = 1000 g
Timp t	T	Secundă	s	
Unităţi mecanice principale, utilizate în electrotehnică (STAS 739 — 52)				
Viteză v	LT^{-1}	Metru pe secundă	m/s	1 m/s = 10^2 cm/s
Acceleraţie a	LT^{-2}	Metru pe secundă la pătrat	m/s^2	1 m/s^2 = 10^2 cm/s^2
Viteza unghiulară ω	T^{-1}	Radian pe secundă	rad/s	
Frecvenţă de rotaţie sau turaţie n	T^{-1}	Rotaţie pe secundă	rot/s	
Forţă F	LMT^{-2}	Newton	N	1 N = 10^5 dyn
Energie W, E Lucru mecanic L	L^2MT^{-2}	Joule	J	1 J = 10^7 erg
Putere P	L^2MT^{-3}	Watt	W	1 W = 10^7 erg/s
Momentul unei forţe (cuplu) M	L^2MT^{-2}	Newton-metru	N.m	1 N.m = 10^7 dyn.cm
Moment de inerţie J	L^2M	Kilogram-metru pătrat	$kg.m^2$	1 $kg.m^2$ = 10^7 g. cm^2
Frecvenţă f	T^{-1}	Hertz	Hz	
Unităţi electrice (STAS 862—49)				
Curent (intensitatea cúrentului) I	I	Amper	A	1 A = $\frac{1}{10}$ CGS e. m.
Cantitatea de electricitate (sarcină electrică) Q	IT	Coulomb	C	1C = 10^{-1} CGS e.m. = = 3.10^9 CGS e.s.

continuare *Tabela 1*

Mărimea şi simbolul ei	Dimensiunile	Unitatea de măsură		Relaţii de transformare
		Denumirea	Simbol	
Tensiunea electrică (Diferenţa de potenţial) U Potenţial V Forţă electromotoare E	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	Volt	V	$V = 10^8$ CGSe.m. $= \frac{10^{-2}}{3}$ CGS e.s.
Rezistenţă electrică R	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	Ohm	Ω	$1\ \Omega = 10^9$ CGS e.m.
Capacitate C	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	Farad	F	$1\ F = 10^{-9}$ CGS e.m.
Cîmp electric E	$LMT^{-3}I^{-1}$	Volt pe metru	V/m	$1\ V/m = 10^6$ CGSe.m.
		Unităţi magnetice (STAS 862—49)		
Flux de inducţie magnetică Φ	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	Weber	Wb	1 Wb = 10^8 maxwell (unitate CGS e.m.)
Inducţie magnetică B	$MT^{-2}I^{-1}$	Weber pe metru pătrat	Wb/m^2	1 $Wb/m^2 = 10^4$ gauss (unitate CGS e.m.)
Cîmp magnetic H	$L^{-1}I$	a) raţionalizat Amper-spiră pe metru b) clasic (neraţionalizat) Milioersted	A.sp/m mOe	1 A.sp/m $= 10^{-3}$ CGSe.m.raţ. 1 m Oe $= \frac{1}{4\pi}$ A. sp/m (Oerstedul este unitatea CGSe.m. în sistemul clasic)
Forţă magnetomotoare F	I	a) raţionaţizat Amper-spiră b) clasic (neraţionaţizat) Decigilbert	A.sp dGb	1 A.sp $= 10^{-1}$ CGS e.m.raţ. 1 dGb $= \frac{1}{4\pi}$ A. sp (Gilbertul este unitatea CGSe.m. în sistemul clasic)
Inductanţa L	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	Henry	H	1 H $= 10^9$ CGSe.m.

Deoarece în practică se mai folosesc încă și unități ale sistemului mecanic restrîns MKfS (metru, kilogram-forță, secundă), tolerat temporar în mecanică, în tabela 2 se dau, după STAS-ul 739—52, principalele unități ale acestui sistem și relațiile lor cu unitățile corespunzătoare MKS.

Tabela 2

Unități ale sistemului MKfS (STAS 739—52)

Mărimea și simbolul ei	Dimensiunile	Unitatea de măsură		Relații de transformare
		Denumirea	Simbol	
Forță F	F	Kilogram-forță Unitate fundamentală	kgf	1 kgf = 9,81 N
Lucru mecanic L Energie W, E	LF	Kilogrammetru	kgm	1 kgm = 9,81 J
Putere P	LFT^{-1}	Kilogrammetru pe secundă	kgm/s	1 kgm/s = 9,81 W
Momentul unei forțe M	LF	Metru-kilogram (- forță)	m.kgf	1 m. kgf = 9,81 N. m.

S-a convenit ca, excepțional, în simbolul lucrului mecanic și al energiei să nu figureze litera f, pentru a se păstra denumirea de kilogrammetru, intrată în uz, a lucrului mecanic. Se înțelege că este vorba de kilogram-forțămetru.

În trecut puterea se măsura cu o unitate mecanică specială, numită cal-putere (simbol CP). Astăzi această unitate este desființată, totuși se mai folosește încă în practică la unele calcule, în special asupra mașinilor vechi.

$$1 \text{ CP} = 75 \text{ kgm/s} = 736 \text{ W} = 0{,}736 \text{ kW}.$$

Conform STAS-ului 739—52, folosirea unității CP trebuie evitată.

CAPITOLUL I

CÎMP ŞI POTENŢIAL ELECTRIC

1-1. Producerea electricităţii prin frecare

Proprietatea chihlimbarului, o răşină fosilă, de a atrage corpuri uşoare (firişoare de păr, frînturi de pai, scame de mătase etc.) cînd este frecat cu o ţesătură de lînă sau cu o bucată de blană, era cunoscută încă din secolul al VII-lea înaintea erei noastre. Fenomenul a fost examinat, mai atent, de-abia în secolul al XVI-lea, de către englezul *W. Gilbert,* care arată, în 1600, că şi alte corpuri, precum sticla, sulful, ebonitul etc. dobîndesc proprietăţi analoge cînd sînt frecate cu o bucată de blană sau de postav. Gilbert a dat acestor proprietăţi numele de *electricitate*, după denumirea *„electron"* pe care o are chihlimbarul în limba helenă.

Se spune că aceste corpuri se electrizează *prin frecare*.

S-a observat apoi, în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, o oarecare diferenţă între proprietăţile pe care le dobîndeşte prin frecare sticla, faţă de acelea pe care le capătă răşina. O boabă de soc, suspendată de un fir de mătase, atinsă de corpul de sticlă electrizat este imediat respinsă de acesta şi atrasă de corpul de răşină electrizat, şi invers. O boabă de soc atinsă de corpul de sticlă electrizat este atrasă de o boabă atinsă de corpul de răşină şi respins de altă boabă atinsă tot de corpul de sticlă.

În consecinţă, se constată experimental că există două feluri de electricitate: una avînd caracterul electricităţii produse prin frecare pe corpurile de sticlă, şi care a fost numită convenţional *electricitate pozitivă,* şi alta, avînd caracterul electricităţii produse prin frecare pe corpurile de răşină, care a fost numită convenţional *electricitate negativă.*

Se spune despre un corp electrizat că poartă o *sarcină electrică.*

Prin atingerea cu corpurile electrizate, boabele de soc utilizate în experienţele de mai sus capătă proprietatea de atracţie a acestora, adică *se electrizează.* Avem ceea ce se numeşte o electrizare *prin contact.*

Experimental se constată că toate corpurile pot fi electrizate prin frecare sau prin contact. Unele corpuri se încarcă însă cu electricitate numai pe locurile în care au fost frecate sau atinse cu alte corpuri electrizate iar restul lor rămîne practic neutru. În aceste corpuri electrizarea rămînînd localizată, urmează că sarcinile lor electrice nu se pot deplasa dintr-un loc în altul al corpului. Asemenea corpuri poartă numele de *corpuri rele conducătoare* de electricitate, de *izolanţi,* sau de *dielectrici*

şi în această categorie intră, de pildă, sticla, ebonitul, porţelanul, răşina, sulful etc.

Dacă frecăm un baston de metal pe care îl ţinem în mînă, nu reuşim să-l electrizăm deoarece, pe măsură ce el se electrizează, electricitatea produsă se scurge prin corpul nostru în pămînt. Dacă ţinem bastonul de un mîner izolant, se constată că metalul se electrizează prin frecare, dar că electricitatea nu rămîne numai în regiunea frecată, ci se răspîndeşte pe toată suprafaţa metalului. Asemenea corpuri, în care electricitatea se poate deplasa cu uşurinţă dintr-un loc în altul, se numesc *corpuri bune conducătoare* de electricitate, sau *conductoare electrice*. În această categorie intră, în primul rînd, metalele.

1 2. Explicarea fenomenului electrizării prin frecare

Atomii corpurilor sînt compuşi dintr-un nucleu relativ greu, încărcat cu electricitate pozitivă, înconjurat de un număr de electroni foarte uşori, încărcaţi cu electricitate negativă. Electronii se învîrtesc pe diferite orbite în jurul nucleului. Încărcarea pozitivă a nucleului şi încărcările negative ale electronilor se compensează reciproc. Luat în întregime, atomul este neutru.

Prin frecarea între ele a două corpuri, unul din corpuri smulge, din atomii superficiali ai celuilalt, un număr din electronii aflaţi pe orbitele periferice, care se desprind mai uşor din atomii respectivi. Aceşti atomi, lipsiţi de o parte din electroni, îşi pierd echilibrul electric, deci apar ca încărcaţi pozitiv şi formează pe corpul respectiv *o sarcină electrică pozitivă*.

Celălalt corp, prin electronii străini pe care îi primeşte, se încarcă negativ şi pe el apare o *sarcină electrică negativă*.

Sarcina pozitivă, formată pe un corp, este egală cu cea negativă, care apare pe celălalt corp.

În cazul frecării bastonului de sticlă cu o bucată de postav, acesta din urmă desprinde electroni din atomii superficiali ai sticlei şi se încarcă negativ, iar sticla, lipsită de o parte din electroni, se încarcă pozitiv.

În sistemul practic MKSA, unitatea de sarcină electrică este *coulomb*-ul (simbol C), a cărui definiţie este dată în par. 2-2. *Sarcina electrică a electronului este cea mai mică sarcină care poate exista*. Sarcina unui electron este negativă şi are ca valoare

$$e_0 = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

Electronul, fiind o particulă de materie, posedă o masă a cărei valoare este

$$m_0 = 9{,}108 \cdot 10^{-28}\ \text{g}.$$

În prezent se cunoaşte şi existenţa unui electron pozitiv, numit *pozitron*, care însă apare rar în stare liberă.

1-3. Cîmp electric. Electrizare prin influenţă

Să legăm două corpuri conducătoare A_1 şi A_2 la bornele unei surse de energie electrică E (fig. 1-1) formată dintr-o baterie de elemente galvanice (vezi par. 4-4). Se observă că corpul A_1, legal la polul pozitiv

al sursei, se încarcă pozitiv, iar corpul A_2, legat la polul negativ al sursei, se încarcă negativ. Se spune că cele două corpuri s-au electrizat *prin alimentare* de la sursa de energie electrică.

Starea de electrizare a corpurilor A_1 şi A_2 se menţine şi după ce

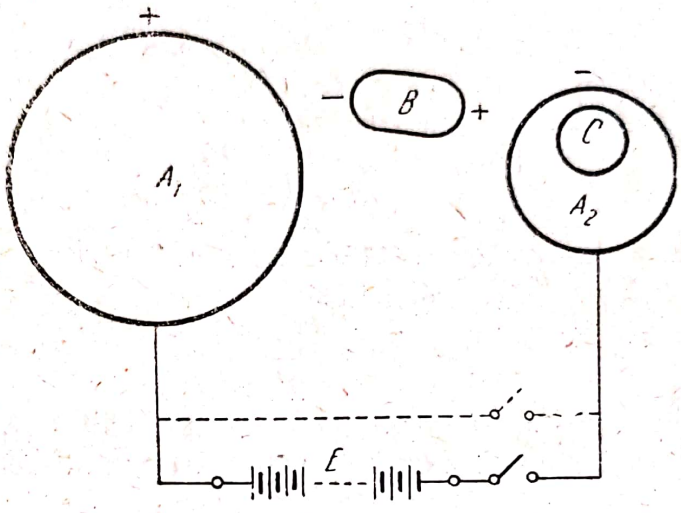


Fig. 1-1. Electrizarea prin alimentare şi prin influenţă

întrerupem legătura cu sursa. Electrizarea lor dispare însă dacă, întrerupînd legătura cu sursa, le unim printr-un fir metalic.

Se constată experimental că în fiecare punct al spaţiului din jurul corpurilor electrizate o mică sferă, electrizată pozitiv, este supusă la o forţă bine definită ca mărime şi direcţie. Această forţă este proporţională cu gradul de electrizare a sferii, adică cu mărimea sarcinii sale electrice. Aceeaşi sferă, electrizată negativ, este supusă la o forţă de sens opus. Deci regiunea din jurul corpurilor electrizate (a corpurilor încărcate cu electricitate) suferă o schimbare fizică, care nu poate fi constatată direct cu simţurile noastre. În jurul acestor corpuri se creează un cîmp de forţe, numit *cîmp electric*.

Dăm, în cele ce urmează, cîteva fenomene mai caracteristice ce pot fi observate în cîmpul electric astfel creat.

a) Dacă apropiem de corpul electrizat A_1, din fig. 1-1, un corp conducător neutru B, acesta din urmă se electrizează, şi anume negativ spre A_1 şi pozitiv spre A_2.

Dacă depărtăm apoi corpul B din cîmpul electric al corpurilor A_1 şi A_2, el revine la starea neutră anterioară. Se obţine ceea ce numim o electrizare, *prin influenţă*, care dispare prin scoaterea corpului din cîmpul electric.

b) Starea de electrizare se observă numai pe suprafaţa exterioară a corpurilor A_1 şi A_2. Dacă atingem pereţii interiori ai unuia din corpuri, A_2 de pildă, presupus gol, cu un corp C, acesta nu se electrizează. În schimb însă, dacă C este electrizat, prin atingerea lui cu pereţii interiori ai lui A_2 el îşi pierde complet electrizarea, iar starea de electrizare exterioară a lui A_2 se modifică prin adăugarea sarcinii electrice a corpului C, cu semnul său.

c) În interiorul unui corp electrizat, cîmpul electric este zero. Introducînd în interiorul corpului electrizat A_1, spre exemplu, presupus gol, o bobiță de soc, vom constata că bobița nu este supusă nici unei forțe.

d) Cînd unul din conductoarele A_1 sau A_2 învăluie complet pe celălalt (fig. 1-2), starea de electrizare apare pe pereții față în față ai celor

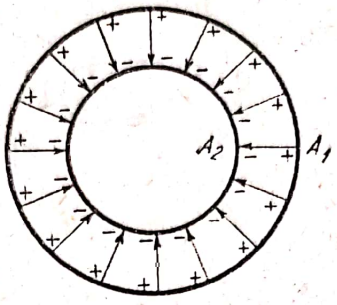


Fig. 1-2. Starea de electrizare a două sfere concentrice

două corpuri, în cazul figurii pe peretele interior al lui A_1 și exterior al lui A_2. În acest caz, cîmpul electric se află concentrat numai în spațiul dintre A_1 și A_2.

În concluzie, se poate spune că starea de electrizare se localizează numai pe suprafețele corpurilor electrizate, suprafețe care delimitează cîmpul electric.

1-4. Legea lui Coulomb

Fizicianul francez *Ch. Coulomb* a studiat experimental forța electrică care se exercită între două corpuri de dimensiuni reduse (practic punctiforme), încărcate cu sarcini electrice Q și Q' și situate la distanța r unul de altul. El a stabilit, în anul 1785, că această forță este proporțională cu produsul sarcinilor respective și invers proporțională cu pătratul distanței dintre corpuri, deci este dată de o relație de forma

$$F = k \frac{Q \cdot Q'}{r^2}, \qquad (1\text{-}1)$$

în care k este un coeficient de proporționalitate, a cărui valoare depinde de mediu și de sistemul de unități ales. Dacă cele două sarcini Q și Q' sînt de același semn, ambele pozitive sau ambele negative (fig. 1 - 3a), forța F

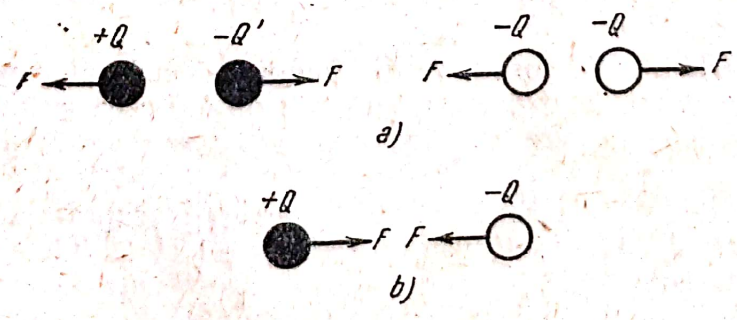


Fig. 1-3. Acțiuna reciprocă a sarcinilor electrice

este o forță de repulsie și cele două sarcini se resping; dacă cele două sarcini sînt de sens contrar (fig. 1-3 b), forța F este o forță de atracție.

În cazul particular, cînd cele două sarcini Q și Q' sînt egale ca valoare, legea lui Coulomb ia forma

$$F = k \frac{Q^2}{r^2}. \qquad (1\text{-}1a)$$

Legea lui Coulomb reprezintă prima lege cantitativă a electricității.

1-5. Caracterizarea mediului electric. Permitivitatea

În expresia legii lui Coulomb, factorul k se pune de obicei sub forma $k = \frac{1}{\varepsilon}$, astfel încît expresia legii devine

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{QQ'}{r^2}. \qquad (1\text{-}2)$$

În aceste condiții, ε este factorul de care ne servim pentru a caracteriza, din punct de vedere electric, mediul fizic care separă cele două corpuri electrizate.

Un mediu fizic este *omogen* cînd prezintă aceleași proprietăți fizice în toate elementele sale de volum și este *izotrop*, cînd fiecare element al său prezintă proprietăți identice în toate direcțiile.

Factorul ε se numește *permitivitate* sau *constantă dielectrică* a mediului respectiv. Pentru un anumit sistem de unități ales, permitivitatea variază cu natura fizică a mediului și are valori diferite pentru vid, apă, ulei, gaze etc.

Pentru vid, permitivitatea se notează cu ε_0. Dacă se aplică sistemul MKSA, adică se exprimă sarcinile electrice în coulombi, distanța în metri și forța F în newtoni, se găsește, pe cale experimentală că, pentru vid, în sistemul clasic (neraționalizat), ε_0 are ca valoare

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9}. \qquad (1\text{-}3)$$

În sistemul de unități CGS e.m. (forțele de atracție în dyne, cantitățile de electricitate în unități egale cu 10^{-1} coulombi și distanțele în cm), constanta ε_0 devine

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}. \qquad (1\text{-}4)$$

Se numește *permitivitate relativă* a unui mediu electric și se notează cu ε_r raportul dintre permitivitatea acelui mediu și permitivitatea vidului. Deci, conform definiției,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

sau

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0. \qquad (1\text{-}5)$$

Permitivitatea relativă ε_r este un număr fără dimensiuni şi independent de sistemul de unităţi de măsură adoptat. Experienţa arată că pentru toate substanţele $\varepsilon_r > 1$.

În aceste condiţii, legea lui Coulomb [relaţia (1-2)] se exprimă sub forma sa generală

$$F = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot \frac{QQ'}{r^2} . \qquad (1\text{-}6)$$

În unităţi MKSA, relaţia (1-2) devine

$$F = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r} \cdot \frac{QQ'}{r^2} \text{ N} , \qquad (1\text{-}7)$$

iar în unităţi CGS e.m.,

$$F = \frac{9 \cdot 10^{20}}{\varepsilon_r} \cdot \frac{QQ'}{r^2} \text{ dyn} . \qquad (1\text{-}8)$$

Dacă notăm permitivitatea în sistemul raţionalizat (vezi par. 5-3) cu ε, avem relaţia

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\pi} ,$$

în care ε este permitivitatea în sistemul clasic.

În sistemul raţionalizat expresia (1-2) are forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon'} \cdot \frac{QQ'}{r^2} .$$

Expresiile (1-3) şi (1-4) devin, respectiv,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$$

şi

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} ,$$

iar expresiile (1-7) şi (1-8),

$$F = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{QQ'}{r^2} \text{ N}$$

şi

$$F = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}}{4\pi \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{QQ'}{r^2} \text{ dyn} ,$$

adică se obţin aceleaşi valori numerice ca şi cele date de relaţiile (1-7) şi (1-8).

Din relația (1-8) rezultă că permitivitatea vidului este o mărime dimensională, dată de expresia

$$\varepsilon_0 = \frac{Q \cdot Q'}{\varepsilon_r \cdot r^2 \cdot F}.$$

Prin urmare, unitatea de măsură a permitivității vidului, în sistemul MKSA, se exprimă prin relația

$$(\varepsilon_0) = \frac{C^2}{m^2 N} = \frac{C^2}{J \cdot m} = \frac{C}{V \cdot m},$$

în care $V = \frac{J}{C}$ reprezintă simbolul voltului, unitatea MKSA a tensiunii electrice (par. 1-7).

După cum vom arăta în par. 5-9, raportul $\frac{C}{V}$, dintre coulomb și volt, reprezintă unitatea numită farad (F), cu care măsurăm, în sistemul MKSA, capacitățile electrice. Prin urmare, unitatea de măsură a permitivității, în acest sistem, este $\frac{F}{m}$.

În tabela 1-1 sînt date valorile permitivităților relative a cîtorva materiale dielectrice. După cum rezultă din tabelă, permitivitatea relativă a aerului este foarte apropiată de unu și de aceea permitivitatea aerului se ia practic egală cu ε_0.

Tabela 1-1

Permitivitățile relative ale unor materiale dielectice

Materialul	ε_r	Materialul	ε_r
Apa	80,0	Cauciuc	2,0—2,7
Marmură	8,4	Ebonită	2.0—3,0
Bachelită	5,6 – 8,8	Parafină	2,0—2,3
Mică	5,0— 7,0	Ulei de transformator	2,2—2,5
Micanită	5,2	Aer	1,0006
Sticlă	5,0—10,0	Hîrtie	1,8—2,8
Porțelan	4,5— 6,5	Hîrtie uleiată	3,0—5,0
Lemn	2,5— 4,0		

Exemplul 1-1. Două sarcini electrice pozitive punctiforme, de cîte 1.10^{-5} coulombi, sînt așezate în aer, la o distanță de 12 cm una de alta. Se cere să se determine forța cu care se resping.

Soluția: Aplicăm formula (1-7)

$$F = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \text{ N}.$$

Ținînd seama că, pentru aer, $\varepsilon_r \approx 1$, avem

$$F = \frac{9 \cdot 10^9}{1} \cdot \frac{(1 \cdot 10^{-5})^2}{(12 \cdot 10^{-2})^2} = 62{,}5 \text{ N}.$$

1-6. Intensitatea cîmpului electric. Liniile de forță ale cîmpului

Am arătat că în spațiul care înconjură un corp încărcat cu o sarcină electrică (un corp electrizat) apare o schimbare fizică, care se manifestă prin aceea că orice altă sarcină, situată în vreun punct al acelui spațiu, este supusă unei forțe mecanice. Regiunea spațiului a cărei schimbare fizică este susceptibilă manifestării unor asemenea forțe am numit-o cîmp electric. Un cîmp electric poate fi produs de una sau mai multe sarcini electrice, așezate în diverse puncte ale spațiului respectiv.

Se numește *intensitatea cîmpului electric* într-un punct al său vectorul care reprezintă, ca mărime, direcție și sens, forța care ar acționa asupra unui corp punctiform, încărcat cu o sarcină pozitivă egală cu unitatea (+1), plasat în acel punct (fig. 1-4).

Dacă notăm cu E intensitatea cîmpului electric într-un punct oare-

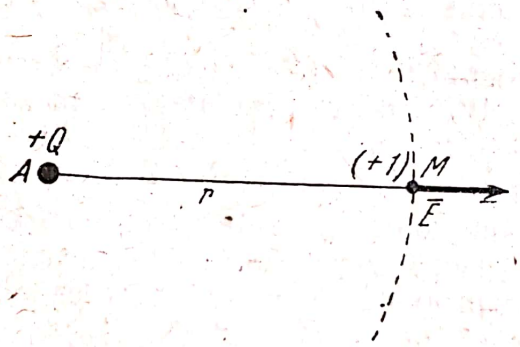


Fig. 1-4. Intensitatea cîmpului electric produs de o sarcină punctiformă

care, rezultă că forța care se exercită asupra unui corp punctiform, plasat în acel punct și încărcat cu o sarcină Q', va fi

$$F = E \cdot Q' \; ; \qquad (1\text{-}9)$$

de unde

$$E = \frac{F}{Q'} \; . \qquad (1\text{-}10)$$

Deci, intensitatea unui cîmp electric, într-un punct oarecare al său, mai poate fi definită ca raportul între forța ce se exercită asupra cantității de electricitate aflate în acel punct și această cantitate de electricitate.

Dacă cîmpul este creat de o sarcină electrică punctiformă Q, așezată într-un mediu omogen la o distanță r de sarcina Q', avem, conform relației (1-2),

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \; .$$

Rezultă că intensitatea cîmpului electric, produs de o sarcină oarecare Q, într-un mediu omogen de permitivitate ε, este dată de relația

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \; , \qquad (1\text{-}10\,a)$$

în care r reprezintă distanța punctului considerat față de poziția sarcinii Q (fig. 1-4).

Dacă cîmpul electric este produs de mai multe sarcini punctiforme Q_1, Q_2,...,Q_n, intensitatea cîmpului rezultant, în oricare din punctele sale, este egală cu suma geometrică a vectorilor intensităților cîmpurilor create, în acele puncte, de fiecare sarcină în parte, adică se aplică principiul suprapunerii efectelor. Prin urmare, avem relația

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{E}_k , \qquad (1\text{-}11)$$

în care $\vec{E}$ reprezintă vectorul spațial al cîmpului rezultant, într-un punct oarecare, iar $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\cdots$, $\vec{E}_n$, vectorii spațiali ai cîmpurilor produse în acel punct de sarcinile respective.

Din relația (1 – 10) deducem unitatea de măsură a cîmpului electric

$$[E] = \left[\frac{F}{Q}\right] = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} = \frac{J}{mC} ;$$

deci, dacă ținem seama de observația făcută în paragraful precedent,

$$[E] = \frac{V}{m} ,$$

adică *intensitatea cîmpului electric se măsoară în volți pe metru* (V/m).

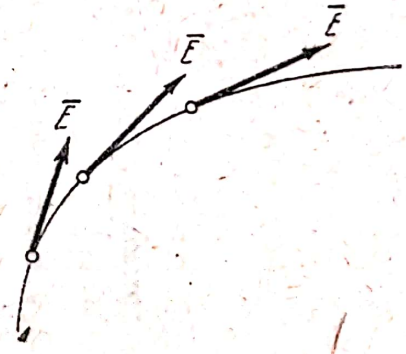


Fig. 1-5 Linie de forță a cîmpului electric

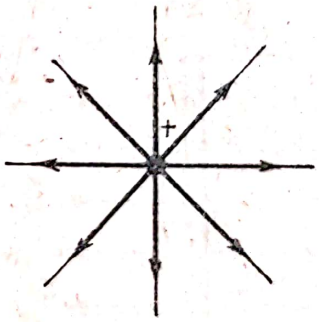


Fig. 1-6 Cîmpul în jurul unei sarcini electrice punctiforme

Un cîmp electric poate fi reprezentat prin liniile sale de forță. Se numește *linie de forță* a cîmpului electric linia care, în fiecare din punctele sale, este tangentă la vectorul care reprezintă cîmpul electric în acele puncte (fig. 1-5). Ansamblul liniilor de forță formează *spectrul cîmpului electric*.

Spectrul unui cîmp electric poate fi pus în evidență pe cale experimentală, de pildă cu ajutorul prafului de glycină în suspensie în ulei.

Liniile de forță electrice, avînd mereu sensul vectorului cîmp, rezultă că ele au o orientare, adică pleacă întotdeauna de pe sarcini pozitive și

se opresc pe sarcini negative. Prin urmare, *liniile de forță electrice nu pot alcătui niciodată curbe închise.*

În fig. 1-6 este reprezentat cîmpul care ia naștere în jurul unei sarcini punctiforme pozitive. În acest caz, liniile de forță ale cîmpului sînt divergente, fiind îndreptate către o sarcină negativă, de aceeași mărime, presupusă la infinit. În fig. 1 - 7 este reprezentat cîmpul între două

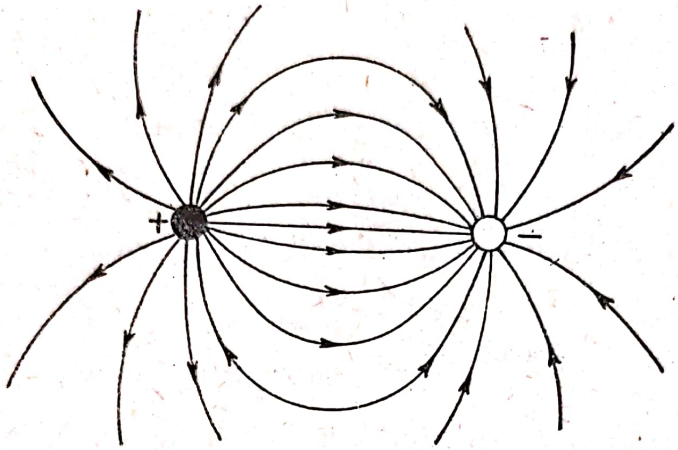


Fig. 1-7 Cîmpul între două conductoare paralele încărcate cu sarcini egale și de sens contrar

conductoare paralele, încărcate cu sarcini egale și de semne contrarii.

Cîmpul electric se numește *omogen* atunci cînd intensitatea lui se păstrează, în toate punctele, aceeași ca valoare, direcție și sens. Într-un asemenea cîmp, liniile de forță sînt paralele.

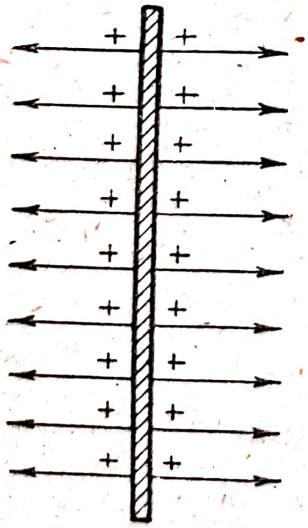


Fig. 1-8 Cîmpul omogen al plăcii plane infinite, încărcate

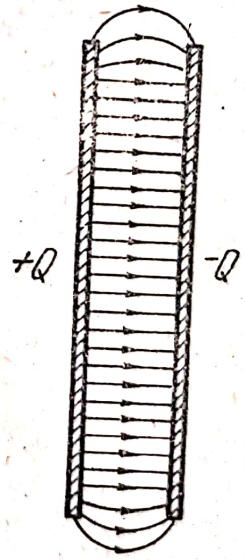


Fig. 1-9 Cîmpul între două plăci paralele, încărcate cu sarcini egale și opuse

Un cîmp omogen apare, de exemplu, pe fețele unei plăci plane, bună conducătoare, încărcată cu o sarcină electrică (fig. 1-8). Deoarece den-

sitatea superficială σ a sarcinii, pe o asemenea placă, este constantă și, după cum vom arăta în par. 5-4 [relația (5-6)],

$$E = 2\pi\frac{\sigma}{\varepsilon},$$

rezultă că

$$E = \text{const}.$$

Ținînd seama și de faptul că liniile de forță sînt perpendiculare pe suprafața plăcii (vezi par. 1 - 8), putem scrie

$$\vec{E} = \text{const},$$

deci cîmpul este omogen.

Între două plăci plane, paralele, încărcate cu sarcini egale și de semne contrarii (fig. 1-9), cîmpurile celor două plăci se suprapun și intensitatea cîmpului rezultant crește, devenind egală cu

$$E = 4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{const}.$$

În afara plăcilor, intensitatea cîmpului rezultant este nulă.

Un asemenea ansamblu de plăci paralele, așezate la o distanță redusă în raport cu dimensiunile lor, constituie ceea ce numim un *condensator plan* (vezi par. 5 - 8).

Exemplul 1-2. Să se găsească cîmpul electric produs de o sarcină pozitivă $Q = 2\ \mu$ C, la o distanță de 6 cm, într-un mediu de parafină ($\varepsilon_r = 2$).

Soluția: Conform relației (1-10 a)

$$E = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} = \frac{9\cdot 10^9}{\varepsilon_r}\cdot\frac{Q}{r^2},$$

deci

$$E = \frac{9\cdot 10^9}{2}\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}}{(6\cdot 10^{-2})^2} = \frac{10^7}{4} = 2{,}5\cdot 10^6\ \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Exemplul 1-3. Două sarcini punctiforme $Q_1 = +2.10^{-9}$ C și $Q_2 = -2{,}4.10^{-9}$ C sînt așezate în aer, la o distanță între ele $l = 15$ cm. Să se calculeze cîmpul electric rezultant al celor două sarcini într-un punct O, situat la o distanță $r_1 = 9$ cm de sarcina Q_1 și $r_2 = 12$ cm de sarcina Q_2 (fig. 1-10).

Soluția: Vom determina mai întîi componentele E_1 și E_2 ale acestui cîmp rezultant, produse de sarcinile Q_1 și Q_2.

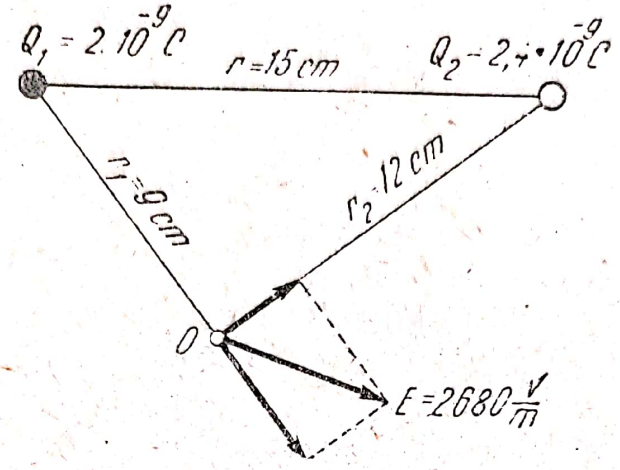


Fig. 1 - 10 La exemplul 1-3

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{0{,}09^2} = \frac{9 \cdot 2}{0{,}09^2} = \frac{2}{9 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{4{,}5} = 2222 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \ (-2{,}4 \cdot 10^{-9})}{0{,}12^2} = \frac{9}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{9}{6} 10^3 = 1500 \frac{\text{V}}{\text{m}} .$$

Să notăm cu E cîmpul rezultant. Deoarece din datele problemei

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 ,$$

urmează că vom avea și $E^2 = E_1^2 + E_2^2$. Deci

$$E = \sqrt{2222^2 + 1500^2} = 2680 \frac{\text{V}}{\text{m}} .$$

1 - 7. Potențial și tensiune electrică

Cîmpul electric poate fi caracterizat, după cum s-a arătat mai înainte, prin vectorul intensității cîmpului electric. Există însă și o altă modalitate de a caracteriza acest cîmp și anume cu ajutorul mărimii denumită *potențial electric*.

Prezența unui cîmp electric implică existența unei *energii potențiale*. Această energie a cîmpului electric se poate cheltui sub formă de lucru mecanic, executat de forțele cîmpului asupra sarcinilor electrice. Potențialul într-un punct al cîmpului electric caracterizează *posibilitatea* forțelor cîmpului din acel punct de a produce un lucru mecanic în contul energiei potențiale a cîmpului electric. În consecință, cîmpul poate fi definit prin intermediul unui lucru mecanic.

Să presupunem că în punctul M al cîmpului electric reprezentat în fig. 1-4, produs de sarcina punctiformă Q, așezăm o mică sarcină punctiformă q, de același semn ca și Q. Sarcina q va fi respinsă, conform relației (1-9), cu o forță

$$F = E\,q = \frac{Q}{\varepsilon\, r^2}\, q\,, \tag{1-12}$$

din ce în ce mai slabă, pe măsură ce distanța r a sarcinii q față de Q se mărește.

Lucrul mecanic produs de forțele cîmpului, cînd sarcina q ajunge la infinit (practic pînă dincolo de limitele cîmpului), este dat de relația

$$L_M = \int_{r=r_M}^{r=\infty} \frac{Q\,q}{\varepsilon\, r^2}\, dr = \frac{Q\,q}{\varepsilon} \int_{r_M}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q\,q}{\varepsilon} \left| -\frac{1}{r} \right|_{r_M}^{\infty} = \frac{Q}{\varepsilon\, r_M}\, q\,, \tag{1-13}$$

în care r_M este distanța punctului M față de sarcina Q.

Prin urmare, în acest caz forțele cîmpului produc un lucru mecanic pozitiv, în contul energiei potențiale a cîmpului electric (vezi par. 5-12), care descrește cu cantitatea $W_M = L_M$.

Pentru a readuce sarcina q de la infinit în punctul M al cîmpului magnetic, trebuie să aplicăm acesteia o forță exterioară egală și opusă forței F dată de relația (1-12). Lucrul mecanic necesar, furnizat de o sursă de energie exterioară, este egal și de sens opus lucrului mecanic L_M, dat de relația (1-13), deci față de cîmp este un lucru mecanic negativ, care mărește energia potențială a cîmpului cu $W_M = L_M$.

Se numește *potențial* al cîmpului electric în punctul M raportul dintre lucrul mecanic L_M, dat de relația (1-13), și sarcina q. Notînd potențialul cu V, vom avea pentru punctul M

$$V_M = \frac{L_M}{q} = \frac{Q}{\varepsilon\, r_M}\,.$$

Într-un punct oarecare al cîmpului, situat la distanța r de sarcina Q, potențialul este dat de expresia

$$V = \frac{L}{q} = \frac{Q}{\varepsilon\, r}\,. \tag{1-14}$$

După cum se vede, potențialul unui cîmp electric este o mărime scalară, spre deosebire de intensitatea cîmpului, care este o mărime vectorială.

Potențialul poate fi negativ sau pozitiv, după semnul sarcinii Q.

Dacă cîmpul electric este creat de mai multe sarcini, potențialul în oricare punct al cîmpului rezultant este egal cu suma algebrică a potențialelor fiecărui cîmp în parte în punctul considerat. Prin urmare,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n\,, \tag{1-15}$$

sau

$$V = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \cdots + \frac{Q_n}{r_n}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{r_k}\,. \tag{1-15 a}$$

Relaţia (1-13) a fost dedusă în ipoteza că sarcina q se deplasează la infinit. Lucrul mecanic L_M însă nu se schimbă dacă sarcina q, în loc să se deplaseze la infinit, unde conform relaţiei (1-14) potenţialul este zero, se deplasează pînă la pămînt, unde odată ajunsă se răspîndeşte pe întreaga suprafaţă a pămîntului, deci se depărtează la o distanţă practic infinită de punctul M. Rezultă de aci că potenţialul pămîntului este zero.

Din relaţiile (1-10a) şi (1-14), rezultă că

$$E = -\frac{dV}{dr} \cdot \qquad (1\text{-}16)$$

Prin urmare, în orice punct al cîmpului intensitatea acestuia este egală cu derivata, cu semn schimbat, a potenţialului din acel punct, în raport cu deplasarea. *Cîmpul este deci pozitiv în sensul descreşterii potenţialului.*

Dacă sub acţiunea forţelor cîmpului electric sarcina q a fost deplasată dintr-un punct M într-altul N, indiferent de drumul pe care îl parcurge sarcina între aceste puncte lucrul mecanic L, produs de forţele cîmpului, este egal cu scăderea energiei potenţiale a acestuia. Prin urmare

$$L = W_M - W_N \cdot$$

Deoarece însă

$$W_M = L_M = V_M q \quad \text{şi} \quad W_N = L_N = V_N q \ ,$$

rezultă că

$$L = (V_M - V_N)\, q \cdot \qquad (1\text{-}17)$$

Diferenţa dintre potenţialele a două puncte ale cîmpului electric se numeşte *diferenţa de potenţial* sau *tensiunea electrică* dintre acele puncte şi se notează convenţional prin simbolul U.

În cazul particular al relaţiei (1-17), avem

$$L = U_{MN} q$$

sau

$$U_{MN} = \frac{L}{q} \cdot$$

În general, lucrul mecanic al deplasării unei sarcini Q, între două puncte oarecare ale cîmpului, se exprimă prin relaţia

$$L = UQ \ , \qquad (1\text{-}18)$$

de unde

$$U = \frac{L}{Q} \cdot \qquad (1\text{-}19)$$

În consecinţă, *tensiunea electrică între două puncte oarecare ale cîmpului este dată de raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forţele cîmpului la deplasarea unei sarcini electrice între acele puncte şi valoarea sarcinii deplasate.*

În sistemul de unităţi MKSA, lucrul mecanic se măsoară în jouli (J). Prin urmare, pentru a măsura potenţialul sau tensiunea electrică trebuie să utilizăm ca unitate de măsură expresia J/C. Această unitate se numeşte *volt* (simbol V). Deci

$$V = \frac{J}{C} \cdot \qquad (1\text{-}20)$$

Scanned with OKEN Scanner

Multiplii voltului sînt *kilovolt*-ul (simbol kV)

$$1\ \text{kV} = 10^3\ \text{V}$$

şi *megavolt*-ul (simbol MV)

$$1\ \text{MV} = 10^6\ \text{V},$$

iar submultiplul *milivolt*-ul (simbol mV),

$$1\ \text{mV} = 10^{-3}\ \text{V}.$$

Definiţia unităţii volt va fi dată în par. 2-6.

Exemplul 1-4. Într-un mediu de ulei de transformator ($\varepsilon_r = 2{,}5$) se găsesc două sarcini electrice $Q_1 = 4.10^{-4}$ şi $Q_2 = 5.10^{-6}$ C. O a treia sarcină $Q = -3.10^{-5}$ C se deplasează între punctele a şi b Punctul a se găseşte la 4 cm de Q_1 şi la 6 cm de Q_2; punctul b la 16 cm de Q_1 şi la 10 cm de Q_2 Să se găsească diferenţa de potenţial între punctele a şi b şi lucrul mecanic efectuat prin deplasarea sarcinii Q.

Soluţia: Aplicînd relaţia (1-15 a),

$$V_a = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right),$$

în care

$$\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 = 2{,}5\ \frac{1}{9\cdot 10^9};$$

se obţine

$$V_a = \frac{9\cdot 10^9}{2{,}5}\cdot\frac{4\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-2}} + \frac{5\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-2}} = \frac{9\cdot 10^9}{2{,}5}\left(10^{-2} + \frac{5}{6}\,10^{-4}\right) =$$

$$= \frac{9\cdot 10^5}{2{,}5}\left(100 + \frac{5}{6}\right)\text{V}.$$

La fel

$$V_b = \frac{9\cdot 10^5}{2{,}5}\left(25 + \frac{1}{2}\right)\text{V}.$$

$$V_a - V_b = U_{ab} = \frac{9\cdot 10^5}{2{,}5}\,\frac{226}{3} = \frac{3\cdot 10^5}{2{,}5}\,226 = 2{,}712\cdot 10^7\ \text{V}.$$

Lucrul mecanic $L = Q\,U_{ab}$

$$L = -3\cdot 10^{-5}\cdot\ 2{,}712\cdot 10^7 = -813{,}6\ \text{J}.$$

Lucrul mecanic fiind negativ, urmează că pentru a efectua deplasarea din a în b a sarcinii Q trebuie să se cheltuiască din exterior o energie de 813,6 J. Energia electrică a cîmpului se măreşte cu 813,6 J.

1-8. Suprafeţe echipotenţiale

Se numesc *suprafeţe echipotenţiale,* sau *suprafeţe de nivel,* suprafeţele ale căror puncte sînt toate la acelaşi potenţial electric.

Valoarea maximă a intensităţii cîmpului electric într-un punct oarecare corespunde direcţiei normale pe suprafaţa echipotenţială care trece prin acel punct.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra aceasta, să ducem suprafața echipotențială S care trece prin punctul A al cîmpului electric (fig. 1-11) și să presupunem că vectorul intensității cîmpului în acest punct este înclinat sub unghiul α față de suprafața S. În acest caz, vectorul intensității cîmpului ar avea o componentă tangențială, dată de relația

Să presupunem că, sub acțiunea acestei componente a cîmpului, o sarcină unitară se deplasează din punctul A în punctul B, pe distanța dl. Lucrul mecanic efectuat va fi egal, numeric, cu diferența de potențial dintre punctele A și B, adică

$$E_t \cdot dl = U_{AB} = V_A - V_B \cdot$$

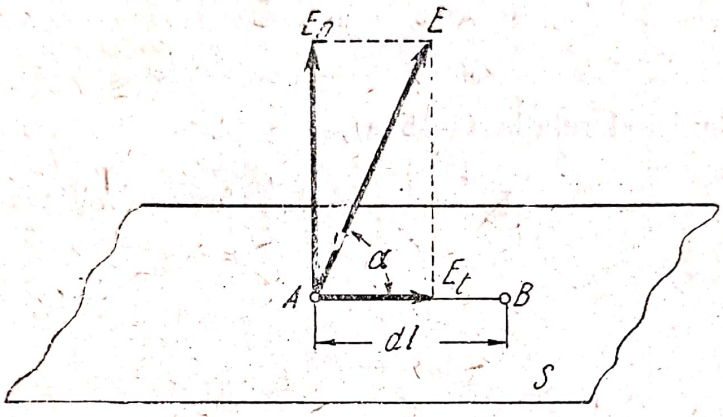


Fig. 1-11 Poziția vectorului intensității cîmpului electric față de suprafața echipotențială

$$E_t = E \cos \alpha \cdot$$

Suprafața S avînd toate punctele sale la același potențial, rezultă că $V_A = V_B$, deci $V_A - V_B = 0$ și în consecință

$$E_t = 0 \ ,$$

adică valoarea maximă a cîmpului electric este perpendiculară pe suprafața echipotențială care trece prin punctul A.

Concluzia de mai sus se aplică oricare ar fi forma suprafeței echipotențiale.

Suprafața unui conductor încărcat, în echilibru electrostatic, este o suprafață echipotențială. Un asemenea conductor are același potențial în toate punctele sale, oricare ar fi forma conductorului și distribuția sarcinii pe suprafața lui. Liniile de forță sînt perpendiculare pe această suprafață.

În fig. 1-12 sînt reprezentate, punctat, curbele echipotențiale (secțiunile suprafețelor echipotențiale cu planul figurii) ale unei sfere încărcate pozitiv, iar prin liniile pline, radiale, intensitatea cîmpului. Suprafața sferii încărcate reprezintă suprafața de potențial maxim.

Pentru o direcție oarecare MM', valoarea intensității cîmpului este egală cu proiecția vectorului cîmpului maxim pe această direcție. Ținînd seama de relația (1-16), vom avea

$$E_{MM'} = E \cos \alpha = -\frac{dV}{dr} \cos \alpha \cdot$$

Deoarece, după cum rezultă din fig. 1-12, $dr = da \cos\alpha$, rezultă că

$$E_{MM'} = -\frac{dV}{da}. \qquad (1\text{-}21)$$

Prin urmare, valoarea intensităţii cîmpului după o direcţie oarecare este egală cu derivata, cu semn schimbat, a potenţialului după acea direcţie. În cazul unui cîmp omogen, ale cărei linii de forţă sînt paralele, suprafeţele echipotenţiale sînt planuri perpendiculare pe direcţia cîmpului electric.

Exemplul 1-5. Intensitatea cîmpului electric, pe suprafaţa unei sfere cu raza de 2 cm., în centrul căreia se găseşte o sarcină pozitivă punctiformă Q, este de $1 \cdot 10^4$ V/m. Să se calculeze cu ce raze trebuie să se traseze suprafeţele sferelor echipotenţiale (fig. 1-12) pentru ca diferenţa de potenţial între două suprafeţe să fie 25 V.

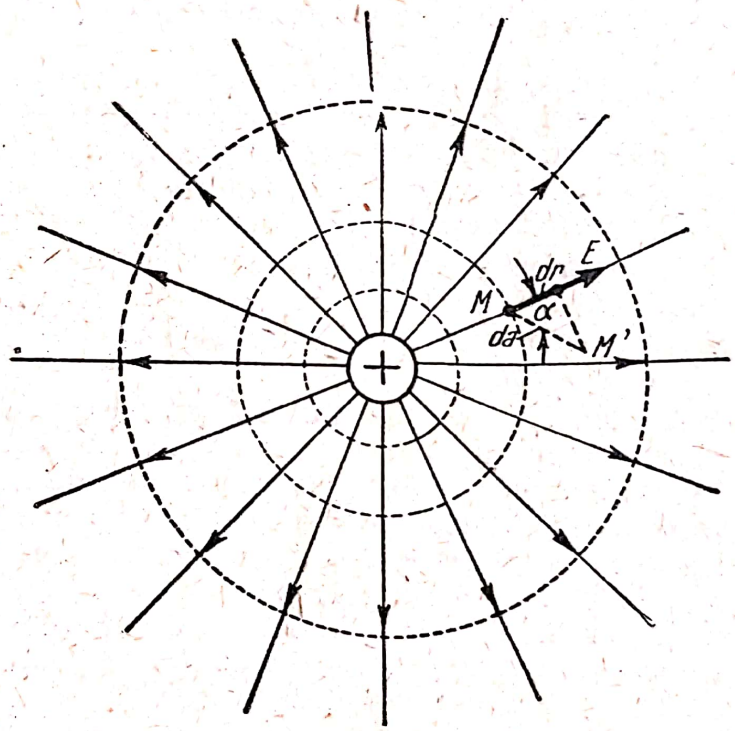


Fig. 1 - 12. Suprafeţele echipotenţiale ale unei sfere încărcate

Soluţia: Comparînd între ele relaţiile (1-10a) şi (1-14), rezultă că $V \cdot r = E \cdot r^2 = Q/\varepsilon = \text{constant}$.

Potenţialul primei sfere va fi

$$V_1 = E_1 \cdot r_1 = 1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 200 \text{ V}.$$

Prin urmare, $V_1 \cdot r_1 = 200 \cdot 0{,}02 = 4 \text{ V} \cdot \text{m} = \text{constant}$.

Potenţialul suprafeţei următoare trebuie să fie de 200—25=175 V. Rezultă că

$$r_2 = \frac{\text{const}}{V_2} = \frac{4}{175} = 0{,}0229 \text{ m} = 2{,}29 \text{ cm}$$

ş.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

CIRCUITUL ELECTRIC DE CURENT CONTINUU

2-1. Conductoare şi izolanţi electrici

În par. 1-1 am atins, în treacăt, problema existenţei conductoarelor şi izolanţilor electrici, arătînd că toate corpurile se împart, după însuşirile lor electrice, în două mari categorii: *corpuri bune conducătoare de electricitate* sau, mai pe scurt, *conductoare electrice* şi *corpuri rele conductoare de electricitate* sau, mai pe scurt, *izolanţi* sau *dielectrici.*

Conductoarele electrice posedă însuşirea de a permite o deplasare liberă, în masa lor, a particulelor încărcate cu electricitate (electroni şi ioni). La rîndul lor, conductoarele se împart în două clase: a) *conductoare metalice* şi b) *electroliţi.*

Conductoarele metalice se caracterizează prin aceea că permit deplasarea în interiorul lor numai a electronilor. În metale, electronii de pe orbitele periferice ale atomilor fiind relativ slab legaţi de nucleul atomic, se desprind uşor de acesta, trecînd din sfera de acţiune a unui nucleu, în aceea a altui nucleu. Aceşti electroni umplu spaţiul dintre atomii metalului asemenea moleculelor unui gaz, de unde şi denumirea ansamblului lor de „gaz electronic". Electronii, scăpaţi de pe orbitele nucleelor, poartă numele de *electroni liberi,* sau *electroni conductibili.* Emisia electronică a metalelor incandescente verifică, experimental, ipoteza existenţei acestor electroni liberi.

Electronii liberi din metal posedă o mare mobilitate şi se găsesc, în permanenţă, datorită agitaţiei lor termice, într-o stare de mişcare dezordonată. Atomii metalului, încărcaţi pozitiv prin pierderea electronilor liberi, constituie scheletul conductorului prin care vehiculează electronii liberi. Spre deosebire de aceştia din urmă, atomii pozitivi posedă o mobilitate foarte redusă, agitîndu-se termic numai în jurul poziţiei lor de echilibru.

Electroliţii, care constituie cea de a doua clasă a corpurilor bune conducătoare, sînt soluţii apoase ale acizilor, bazelor sau sărurilor metalice. Sub acţiunea dizolvantului, moleculele substanţei chimice respective se disociază în *ioni pozitivi* şi *ioni negativi,* care, întocmai ca electronii liberi din conductoarele metalice, se deplasează dezordonat în masa electrolitului.

Dacă supunem un conducător metalic sau un electrolit, acţiunii unui cîmp electric, electronii liberi din metal şi ionii negativi din electrolit sînt.

Scanned with OKEN Scanner

deplasați în sens contrar cîmpului, iar ionii pozitivi din electrolit, în sensul cîmpului.

Corpurile bune conducătoare de electricitate sînt folosite în circuitele electrice.

Corpurile pe care le-am numit rele conducătoare, izolanți sau dielectrici se caracterizează prin faptul că dispun de un număr foarte redus de electroni liberi, sau de ioni. În aceste condiții, în interiorul acestor corpuri, supuse cîmpului electric, deplasarea sarcinilor este foarte redusă și se consideră practic egală cu zero. Dintre corpurile dielectrice fac parte: gazele, o parte din corpurile lichide (uleiurile minerale, lacurile, smoala etc.) și, cu excepția metalelor și a cărbunelui, aproape toate celelalte corpuri solide.

2-2. Curentul electric

Am arătat, în paragraful precedent, că electronii liberi din metale și ionii din electroliți se găsesc în stare de mișcare dezordonată. Prin urmare, prin orice secțiune transversală a conductorului cantitatea de electricitate, transmisă dintr-o parte în alta a secțiunii, este în medie egală cu zero.

Să presupunem, de pildă, că avem de-a face cu un conductor metalic, făcînd parte dintr-un circuit electric închis, pe care îl supunem unui cîmp electric axial. Forțele cîmpului, acționînd asupra electronilor liberi din conductor, vor imprima acestora viteze în sens contrar cîmpului, care se adaogă vitezelor mișcărilor termice dezordonate a electronilor. În aceste condiții, printr-o secțiune transversală a conductorului va trece, într-un interval de timp dat, o cantitate determinată de electricitate negativă, sub forma unui flux de electroni. Obținem astfel prin conductor un *curent electric.*

Numim *intensitatea curentului electric* cantitatea de electricitate care trece prin secțiunea transversală a conductorului în timp de o secundă. Dacă intensitatea curentului rămîne constantă, avem ceea ce numim un *curent continuu,* pe care îl notăm convențional cu simbolul I. Conform definiției curentului continuu, rezultă că notînd cu ΔQ cantitatea de electricitate scursă prin secțiunea transversală a conductorului într-un interval timp Δt, curentul I este dat de relația

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}1)$$

Este evident că pentru a se obține un curent continuu, trebuie ca intensitatea cîmpului electric, care acționează asupra electronilor din conductor, să se mențină constantă. O variație în timp a intensității cîmpului electric atrage o variație, de același sens, a cantității de electricitate care trece prin conductor în unitatea de timp, deci a intensității curentului prin conductor. În acest caz, se obține un curent variabil, care variază la fel ca și cîmpul electric.

Cele spuse mai sus se aplică și conductoarelor electrolitice, cu observația că, printr-o secțiune transversală a electrolitului, sarcinile pozitive trec în sensul cîmpului, iar cele negative în sens contrar cîmpului. Sarcinile de semne contrarii deplasîndu-se în direcții opuse, cantitatea de

electricitate Q, care trece prin secțiunea transversală a electrolitului, este egală cu suma valorilor absolute a sarcinilor deplasate în cele două sensuri.

Unitatea de măsură a intensității curentului electric este *amper*-ul (simbol A), care constituie a patra unitate fundamentală a sistemului MKSA. Definiția acestei unități se bazează pe fenomenul acțiunii electrodinamice (vezi par. 6-10). Conform STAS-ului 862—49, amperul reprezintă:

curentul constant care, menținut în două conductoare paralele, rectilinii, de lungime practic infinită și de secțiune circulară neglijabilă, așezate la o distanță de un metru unul de altul, în vid, produce, între aceste conductoare, o forță de 2.10^{-7} newtoni pe metru de lungime.

Un amper reprezintă circa $6\cdot10^{18}$ electroni.

Pentru intensități mici ale curentului se utilizează *miliamper*-ul (simbol mA)

$$1\,\text{mA} = 10^{-3}\,\text{A},$$

iar pentru intensități foarte mici, *microamper*-ul (simbol μA)

$$1\,\mu\text{A} = 10^{-9}\,\text{A}.$$

Din relația (2-1), rezultă următoarea ecuație de definiție a sarcinii electrice

$$Q = It. \qquad (2\text{-}2)$$

Prin urmare, în unități MKSA coulombul reprezintă cantitatea de electricitate transportată, într-o secundă, de un curent de un amper, adică

$$1\,\text{C} = 1\,\text{A}\cdot 1\,\text{s}. \qquad (2\text{-}3)$$

Se numește *densitatea curentului,* și se notează cu δ, raportul dintre intensitatea curentului și suprafața secțiunii transversale a conductorului. Notînd această suprafață cu S, avem

$$\delta = \frac{I}{S}.$$

În curent continuu, densitatea curentului este aceeași pe întreaga secțiune transversală a conductorului.

Convențional, s-a admis ca sens pozitiv al curentului în conductoare, sensul deplasării sarcinilor electrice pozitive, deci sensul invers al deplasării fluxului de electroni.

2-3. Legea lui Ohm

Am văzut că un curent electric nu poate exista decît sub influența unui cîmp electric, adică dacă întreținem, între capetele conductorului, care face parte dintr-un circuit electric închis, o diferență de potențial. Obținem o asemenea diferență de potențial, de pildă, dacă legăm conductorul la bornele unei pile electrice. Pila, care este o sursă chimică de energie electrică (vezi par. 4-4), ne permite să menținem, timp îndelungat, un curent continuu în conductor.

Se stabilește, pe cale experimentală, că intensitatea curentului care trece printr-o porțiune oarecare a unui conductor omogen este dată de relația

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (2\text{-}4)$$

în care U este diferența de potențial dintre extremitățile porțiunii de conductor, iar R reprezintă o mărime caracteristică acestei porțiuni, căreia i s-a dat numele de *rezistență electrică*.

Relația (2-4) constituie *prima lege fundamentală a electricității*. Ea a fost descoperită de fizicianul Ohm în anul 1827 și poartă numele de *legea lui Ohm*.

Legea lui Ohm se enunță precum urmează: *Curentul care apare într-un conductor este egal cu tensiunea aplicată conductorului, împărțită prin rezistența acelui conductor.*

Relația (2-4) poate fi pusă și sub forma

$$U = RI. \tag{2-5}$$

Deci, potrivit legii lui Ohm, dacă un conductor de rezistență R este străbătut de un curent I, între capetele conductorului se stabilește o diferență de potențial U. Numim această diferență de potențial *cădere ohmică de tensiune* sau, mai pe scurt, *căderea de tensiune* în conductor.

Ne propunem să stabilim legea lui Ohm în cazul conductoarelor metalice, ținînd seama de caracterul electronic al curentului electric.

Am arătat că în conductoarele metalice numai electronii, particulele negative de electricitate, iau parte la mișcarea de translație a curentului, atomii pozitivi constituind, oarecum, suportul (scheletul) pe care se face această deplasare de electroni.

Să luăm un conductor omogen prin care circulă un curent electric și să considerăm o porțiune AB, de lungime l, a conductorului (fig. 2-1). Prin fiecare din punctele A și B trece cîte o suprafață echi-

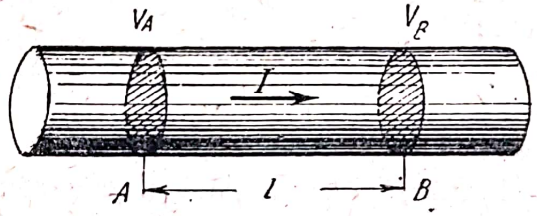


Fig. 2-1 Conductorul omogen

potențială, perpendiculară pe axul conductorului. Să notăm cu V_A și cu V_B potențialele acestor suprafețe. Tensiunea dintre punctele A și B ale conductorului este

$$U = V_A - V_B.$$

Cîmpul din interiorul porțiunii de conductor fiind omogen, intensitatea lui, constantă, este dată de relația

$$E = \frac{U}{l}. \tag{2-6}$$

Sub acțiunea acestui cîmp, electronii liberi ai conductorului sînt supuși unei accelerații de sens opus forțelor cîmpului. Urmează că, la mișcarea dezordonată, de natură termică, a electronului, se adaogă o mișcare uniformă accelerată, de direcție constantă (direcția axială), care continuă atît timp cît electronul nu se va ciocni cu alt electron liber sau cu vreun atom al conductorului. Lungimea drumului parcurs de elec-

tron, între două ciocniri consecutive, fiind foarte mică, viteza reală a electronului se deosebește foarte puțin de viteza sa medie.

Intensitatea curentului din conductor este dată de raportul dintre sarcina electrică Q, care se află în porțiunea considerată a conductorului, și intervalul de timp t în care sarcina părăsește această porțiune, ieșind prin secțiunea transversală finală, adică

$$I = \frac{Q}{t} . \tag{2-7}$$

Sarcina electrică cuprinsă în porțiunea de lungime l a conductorului este dată de relația

$$Q = n \cdot e_0 \cdot S \cdot l , \tag{2-8}$$

în care n este numărul electronilor liberi dintr-o unitate de volum a conductorului;

e_0 — sarcina electronului;

S — suprafața secțiunii transversale a conductorului.

Din relațiile (2-7) și (2-8) rezultă

$$I = n \cdot e_0 \cdot S \cdot \frac{l}{t} = n \cdot e_0 \cdot S \cdot v_{med} . \tag{2-9}$$

În relația precedentă, v_{med} este viteza axială medie imprimată electronilor liberi, care în timpul t parcurg lungimea l a porțiunii de conductor.

Notînd masa electronului cu m_0, accelerația pe care cîmpul electric o imprimă acestuia este

$$a = \frac{F}{m_0} = \frac{E \cdot e_0}{m_0} .$$

Imediat după ciocnire, viteza axială a electronului este zero. Urmează că valoarea maximă a vitezei axiale atinsă de electron, în momentul ciocnirii, este dată de relația

$$v_{max} = a\,\tau = \frac{E\,e_0}{m_0}\,\tau , \tag{2-10}$$

în care τ reprezintă timpul mediu al unei curse libere a electronului între două ciocniri.

Viteza medie axială este

$$v_{med} = \frac{0 + v_{max}}{2} = \frac{E \cdot e_0}{2\,m_0}\,\tau . \tag{2-11}$$

Introducînd această valoare a vitezei medii în relația (2-9), obținem

$$I = \frac{n e_0^2 \tau}{2\,m_0} SE .$$

Deoarece, la temperatură constantă, numărul n al electronilor liberi într-un centimetru cub al conductorului și durata cursei libere τ a electro-

Scanned with OKEN Scanner

nului sînt constante, urmează că intensitatea curentului, la S = const, este proporțională cu intensitatea cîmpului electric, adică avem relația

$$I = \gamma SE, \tag{2-12}$$

în care

$$\gamma = \frac{ne_0^2\tau}{2m_0} \tag{2-13}$$

se numește *conductanța specifică* sau *conductivitatea* materialului din care este confecționat conductorul.

Ținînd seama de valoarea cîmpului electric, dată de relația (2-6), expresia (2-12) devine

$$I = \gamma S\frac{U}{l} = \frac{U}{\frac{l}{\gamma S}}. \tag{2-14}$$

Din relațiile (2-4) și (2-14), rezultă pentru rezistența electrică următoarea ecuție de definiție

$$R = \frac{l}{\gamma S}. \tag{2-15}$$

Prin urmare, rezistența electrică reprezintă o mărime fizică, a cărei valoare depinde, prin coeficientul γ [relația (2-13)], de natura materialului din care este confecționat conductorul și de unitățile de măsură alese, iar prin l și S, de dimensiunile conductorului.

Cu toate că viteza medie axială a electronilor [relația (2-11)], este de ordinul a cîteva fracțiuni de mm/s, transmiterea impulsului de curent, deci a energiei pe conductor, se face cu viteze extrem de ridicate, de ordinul de mărime al vitezei luminii ($3 \cdot 10^5$ km/s), și anume egale cu 90—95% din această viteză în liniile aeriene, și cu 40—45% în cabluri. Aceasta se explică prin faptul că stabilirea cîmpului electric de-a lungul conductorului, cîmp care produce deplasarea electronilor, se face cu o viteză vecină cu viteza luminii.

2-4. Rezistență și conductanță electrică

Din legea lui Ohm [relația (2-4)], rezultă că rezistența unui conductor, atunci cînd cunoaștem pe U și I, este dată de expresia

$$R = \frac{U}{I}.$$

Unitatea de măsură MKSA a rezistențelor electrice este *ohm*-ul (simbolul Ω), a cărei ecuație de definiție, potrivit relației precedente, este

$$[R] = \left[\frac{U}{I}\right] = \frac{1\ V}{1\ A} = 1\ \Omega.$$

Prin urmare, *unitatea de rezistență, numită ohm, este rezistența unui conductor care, atunci cînd i se aplică între capetele sale o diferență de potențial de un volt, este parcurs de un curent de un amper.*

Dacă pornim de la relația (2-5), se mai poate defini ohm-ul ca fiind *rezistența porțiunii de conductor de-a lungul căreia se produce o cădere de tensiune de 1 volt, cînd conductorul este parcurs de un curent de o intensitate de 1 amper.*

Pentru rezistențe de ordin ridicat se întrebuințează *megohm*-ul (simbol $M\Omega$)

$$1\ M\Omega = 10^6\ \Omega\ ,$$

iar pentru rezistențe foarte mici, *microhm*-ul (simbol $\mu\Omega$)

$$1\ \mu\Omega = 10^{-6}\ \Omega\ .$$

În schemele circuitelor electrice, rezistențele sînt reprezentate convențional așa cum este arătat în fig. 2-2.

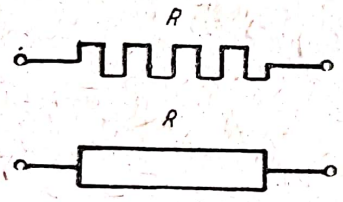


Fig. 2-2. Reprezentarea convențională a rezistențelor electrice

Mărimea inversă a conductanței specifice [relația (2-13)] se numește *rezistență specifică* sau *rezistivitate* a materialului din care este confecționat conductorul și se notează cu ϱ. Deci

$$\varrho = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m_0}{n e_0^2 \tau}\ . \qquad (2\text{-}16)$$

Înlocuind în relația (2-15) pe γ prin $\frac{1}{\varrho}$, obținem pentru rezistență expresia

$$R = \varrho \frac{l}{S}\ , \qquad (2\text{-}17)$$

din care scoatem

$$\varrho = \frac{R\ S}{l}\ .$$

În calculele practice, lungimea conductoarelor metalice se dă în metri iar secțiunile lor în mm^2. Pentru a nu transforma secțiunile conductoarelor în m^2, s-a convenit a se da rezistivității următoarea unitate practică

$$[\varrho] = \left[\frac{R\ S}{l}\right] = \frac{\Omega\ mm^2}{m}\ . \qquad (2\text{-}18)$$

În aceste condiții, prin rezistivitatea unui material conducător metalic se înțelege, numeric, rezistența unui conductor confecționat din acel material, de un metru lungime și un mm^2 secțiune transversală, la temperatura convențională de 20^0 C.

În cazul electroliților, lungimea de parcurgere a curentului în conductor se măsoară în cm, iar secțiunea în cm^2. În aceste condiții, rezistivitatea are ca unitate de măsură

$$[\varrho] = \frac{\Omega\, cm^2}{cm} \cdot \qquad (2\text{-}18\,a)$$

Mărimea inversă a unei rezistențe se numește *conductanță* și se notează convențional cu simbolul G. Prin urmare

$$G = \frac{1}{R} \cdot \qquad (2\text{-}19)$$

În funcție de conductanță, legea lui Ohm ia forma

$$I = UG \cdot \qquad (2\text{-}20)$$

Ca unitate de măsură a conductanțelor s-a adoptat *siemens*-ul (simbol S), care este inversul ohm-ului,

$$1\,S = \frac{1}{1\Omega} \cdot \qquad (2\text{-}21)$$

Potrivit acestei ultime relații, un conductor care are o rezistență de un ohm, are o conductanță de un siemens. Dacă conductorul are o rezistență, de pildă, de 5 Ω, conductanța lui este, conform relației (2-21), de 0,2 S.

Unitatea de măsură a conductivității conductoarelor metalice rezultă din relațiile (2-16) și (2-18),

$$[\gamma] = \frac{m}{\Omega m\, mm^2}, \qquad (2\text{-}22)$$

iar a electroliților, din relațiile (2-16) și (2-18 a),

$$[\gamma] = \frac{cm}{\Omega\, cm^2} \cdot \qquad (2\text{-}22\,a)$$

În tabela 2-1 sînt date rezistivitățile unor materiale conducătoare uzuale. Cea mai mică rezistivitate o are argintul, după care urmează cuprul și aluminiul.

Conductoarele liniilor de transport și de distribuție a energiei electrice se fac din materiale de rezistivitate redusă. Argintul fiind un material scump, ele se fac din cupru, mai rar din aluminiu.

Din relația (2-17), rezultă că $l = RS/\varrho$, deci, pentru aceeași rezistență și secțiune, lungimea conductoarelor este cu atît mai redusă, cu cît rezistivitatea ϱ a materialului este mai mare. Prin urmare, pentru

Tabela 2-1

Valoarea rezistivității și a coeficienților de temperatură pentru diferite materiale conducătoare uzuale, la 20° C

Materialul	Restivitatea la $t = 20^0$C, în $\frac{\Omega\ mm^2}{m}$	Coeficientul de temperatură (mediu între 0^0 și 100^0 C), în $\frac{1}{^0C}$
Aluminiu	0,029	0,0041
Alamă	0,07 — 0,08	0,0015
Argint	0,0165	0,0036
Cărbune de perii	40 — 100	—0,0005
Constantan	0,49 — 0,51	0,00005
Cromal	1,3	0,00004
Cupru	0,0175	0,00425
Manganin	0,42	0,000015
Nicrom	1,1	0,0003
Oțeluri	0,13—0,20	0,00625
Plumb	0,221	0,00411
Wolfram	0,056	0,00464
Zinc	0,063	0,0037

confecționarea aparatelor care necesită o rezistență ridicată într-un spațiu redus, de pildă a aparatelor de încălzit, este util să se întrebuințeze aliaje de rezistivitate mare (nicrom, cromal etc.).

Rezistivitățile electroliților uzuali, la temperatura de 10^0 C și diverse grade de concentrație, sînt date în tabela 4-1.

2-5. Variația rezistenței cu temperatura

Experimental se constată că rezistivitatea conductoarelor nu este constantă, ci depinde de temperatură.

La aceeași concluzie se ajunge dacă examinăm relația rezistivității

$$\varrho = \frac{2\,m_0}{n\,e_0^2\,\tau}\,.$$

Prin creșterea temperaturii conductorului, timpul mediu τ al cursei libere a electronului se micșorează, ciocnirile particulelor producîndu-se mai des. În felul acesta, la metale se constată o creștere a rezistivității, deci a rezistenței conductorului cu temperatura. La electroliți și la cărbune, odată cu micșorarea duratei τ, a cursei libere, creșterea temperaturii produce și o creștere a numărului de electroni liberi și de ioni liberi în unitate de volum. Produsul $n\tau$ crește, deci rezistivitatea acestor materiale scade cu creșterea temperaturii.

La aliajele metalice variația lui τ cu temperatura este foarte redusă, așa că se poate considera rezistivitatea lor practic invariabilă cu temperatura.

Variația rezistivității conductoarelor cu temperatura este dată de relația

$$\varrho_2 = \varrho_1 [1 + \alpha\,(t_2 - t_1)]\,, \qquad (2\text{-}23)$$

în care ϱ_1 este rezistivitatea conductorului la temperatura t_1 °C;

ϱ_2 — rezistivitatea conductorului la temperatura t_2 °C ;
α — coeficientul de temperatură, specific fiecărui material conductor.

Coeficientul de temperatură este egal numeric cu creșterea relativă a rezistivității, respectiv a rezistenței, cînd temperatura conductorului crește cu 1° C. La materialele conducătoare a căror rezistivitate scade cu temperatura (cărbunele și electroliții), coeficientul de temperatură α este negativ.

În tabela 2-1 sînt dați coeficienții de temperatură ai materialelor conducătoare utilizate mai des în practică.

Variația rezistenței conductorului cu temperatura este dată de relația

$$R_2 = R_1[1 + \alpha (t_2 - t_1)], \qquad (2\text{-}24)$$

în care R_1 reprezintă rezistența la temperatura t_1^0 și R_2, rezistența la temperatrua t_2^0.

Dacă considerăm că rezistența conductorului la 0° C este R_0, avem

$$R_1 = R_0 (1 + \alpha t_1) ,$$
$$R_2 = R_0 (1 + \alpha t_2)$$

deci

$$R_2 = R_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} . \qquad (2\text{-}25)$$

Pentru conductorul de cupru $\left(\alpha = 0{,}00425 = \frac{1}{235} \right)$, vom avea

$$R_2 = R_1 \frac{235 + t_2}{235 + t_1} . \qquad (2\text{-}26)$$

Formula (2-26) este des întrebuințată în practică, la calculul încălzirii conductoarelor de cupru.

După cum rezultă din tabela 2-1, metalele curate au un coeficient de temperatură în jurul valorii de 0,004, adică rezistențele lor cresc cu circa 0,4% pentru fiecare grad de temperatură.

Aliajele (constantan, cromal, manganin etc.) au coeficienții de temperatură foarte reduși. Avînd și o rezistivitate relativ urcată, aceste aliaje se întrebuințează pentru construcția rezistențelor adiționale ale aparatelor de măsurat, a etaloanelor de rezistență, a cutiilor de rezistență etc., ale căror rezistențe trebuie să rămînă practic constante cu temperatura.

Exemplul 2-1. Să se calculeze rezistența unui fir de oțel de 200 m lungime și 1 mm diametru, la 20° și la 200° C.

Soluția: La diametrul dat, secțiunea firului este de 0,79 mm². Din tabela 2-1 avem pentru oțel $\varrho_{20^\circ} = 0{,}13 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$ și $\alpha = 0{,}00625$.

Aplicînd formulele (2-17), și (2-24), obținem

$$R_{20^0} = 0{,}13 \frac{200}{0{,}79} = 32{,}9\ \Omega .$$

$$R_{20^0} = 32{,}9 [1 + 0{,}00625 (200^0 - 20^0)] = 32{,}9 \cdot 2{,}125 = 70\ \Omega .$$

Exemplul 2-2. Rezistența unui conductor de cupru la 15° C este de 16 Ω. Se cere rezistența conductorului la temperatura de 75° C.

Soluția: Se aplică relația (2-26), în care $R_1 = 16\ \Omega$, $t_1^0 = 15^0\ C$ și $t_2^0 = 75^0\ C$. Vom avea

$$R_2 = 16\ \frac{235 + 75}{235 + 15} = 19{,}85\ \Omega .$$

Exemplul 2-3. Se măsoară rezistența înfășurării unei mașini electrice înainte de funcționare, la o temperatură de 18° C, și se găsește 4 Ω. După două ore de funcționare, se măsoară din nou rezistența înfășurării și se găsește 5,1 Ω. La cît s-a mărit temperatura înfășurării?

Soluția: Înfășurarea fiind din cupru, aplicăm relația (2-2), din care scoatem

$$t_2^0 = \frac{R_2}{R_1}(235 + t_1^0) - 235 .$$

Vom avea

$$t_2^0 = \frac{5{,}1}{4}\ 253 - 235 = 87{,}6^0\ C .$$

2-6. Expresia puterii și a energiei electrice

Am văzut că deplasarea unei sarcini electrice într-un dielectric corespunde unui lucru mecanic dat de relația (1-17)

$$A = U\,Q ,$$

în care U reprezintă diferența de potențial dintre punctele între care s-a deplasat sarcina q.

Această relație este valabilă și pentru conductoarele electrice. Deoarece într-un conductor, în curent continuu, $Q = It$, energia deplasată în timpul t de-a lungul conductorului este

$$W = UIt,$$

în care U reprezintă tensiunea sau diferența de potențial dintre extremitățile conductorului. Cînd de-a lungul conductorului nu se găsesc surse de energie (vezi par. 2-10), tensiunea U reprezintă o tensiune aplicată conductorului; dacă pe conductor nu se găsesc nici receptoare de energie (vezi par. 2-10), întreaga energie dată de relația de mai sus se transformă în căldură, în rezistența conductorului [vezi par. 2-7, relația (2-28)].

Puterea electrică care însoțește trecerea curentului prin conductor este, conform definiției puterii, dată de relația

$$P = \frac{W}{t} = UI . \qquad (2\text{-}27)$$

Unitatea MKSA de putere electrică este *watt*-ul (simbol W). Conform relației (2-27),

$$1\ W = \frac{1\ J}{1\ s} .$$

Ecuația de definiție a voltului [relația (1-20)] poate fi pusă și sub forma

$$1\,V = \frac{1\,J}{1\,C} = \frac{1\,W \cdot 1\,s}{1\,A \cdot 1\,s} = \frac{1\,W}{1\,A}\,.$$

Din această expresie rezultă definiția dată de STAS-ul 862—40 unității volt, care reprezintă:

tensiunea electrică între două puncte ale unui fir conductor, prin care trece un curent constant de un amper, cînd puterea disipată între aceste două puncte este de un watt.

2-7. Efectul termic al curentului electric. Legea lui Joule-Lenz

Experiența ne arată că trecerea curentului electric printr-un conductor este însoțită de o degajare de căldură, dată de relația

$$W = R\,I^2\,t\,, \qquad (2\text{-}28)$$

în care R este rezistența conductorului, iar t, timpul cît conductorul este parcurs de curent.

Acest fenomen poartă numele de *efectul termic* al curentului electric.

Efectul termic și relația (2-28) se explică, electronic, precum urmează:

După cum am arătat în par. 2-2, curentul electric reprezintă o mișcare dirijată a electronilor în conductoarele electrice. În această mișcare, electronii se ciocnesc în mod continuu cu particulele de masă ale conductorului, care, la corpurile solide, păstrează o poziție medie fixă, și le cedează surplusul de energie cinetică, acumulată în timpul cursei libere axiale. Mișcarea termică, dezordonată, a moleculelor conductorului crește și, odată cu ea, crește temperatura conductorului. În modul acesta, energia curentului electric se transformă, în rezistența conductorului, în energie termică (căldură).

Energia cinetică a electronului, la sfîrșitul cursei sale libere axiale, este dată de expresia

$$W_0 = \frac{m_0\,v^2_{max}}{2}\,, \qquad (2\text{-}29)$$

care, dacă ținem seama de relația (2-10), devine

$$W_0 = \frac{m_0}{2}\left(\frac{E\,e_0\,\tau}{m_0}\right)^2 = \frac{E^2\,e_0^2\,\tau^2}{2\,m_0}\,.$$

Presupunem că, în urma ciocnirii, electronul își pierde complet energia cinetică. În acest caz, puterea medie în acest proces de transformare este

$$p_0 = \frac{W_0}{\tau} = \frac{e_0^2\,\tau}{2m_0}\cdot E^2\,.$$

Unitatea de volum a conductorului conținînd n electroni liberi, rezultă că puterea termică dezvoltată într-o unitate de volum, este

$$P_0 = p_0 \cdot n = \frac{e_0^2 n \tau}{2m_0} E^2 = \gamma E^2 . \qquad (2\text{-}30)$$

Deoarece, potrivit relației (2-12),

$$\gamma E = \frac{I}{S},$$

rezultă că

$$P_0 = \frac{I^2}{\gamma S^2} .$$

Puterea termică, dezvoltată în întregul volum $l.S$ al conductorului, este

$$P = P_0 \cdot l \cdot S = \frac{1}{\gamma S} I^2 = R \cdot I^2 . \qquad (2\text{-}31)$$

In timpul t, acestei puteri îi corespunde o energie electrică, transformată în căldură, dată de relația (2-28).

Ținînd seama de echivalentul caloric al energiei electrice (1J = 0,24 cal) obținem energia termică corespunzătoare, în calorii (calorii mici),

$$Q = 0{,}24\, R\, I^2 t . \qquad (2\text{-}32)$$

Relația (2-28) a fost stabilită, pe cale experimentală, aproape simultan, de fizicianul englez Joule și de academicianul rus E. H. Lenz, profesor la Universitatea din Petersburg, și este cunoscută sub numele de *legea lui Joule-Lenz*.

Conform acestei legi, energia electrică, consumată prin trecerea curentului printr-o rezistență, se transformă în întregime în energie calorică (căldură). Legea Joule-Lenz se enunță în modul următor: *Cantitatea de căldură degajată în conductoare la trecerea curentului electric este proporțională cu rezistența lor, cu pătratul intensității curentului și cu timpul trecerii curentului.*

Pe efectul legii Joule-Lenz se bazează funcționarea a numeroase aparate și dispozitive electrice, printre care menționăm: lămpile cu incandescență, aparatele de încălzit, cuptoarele electrice din metalurgie, releele termice, siguranțele fuzibile etc.

Exemplul 2-4. Să se calculeze rezistența necesară unui fierbător electric, capabil să fiarbă 2 litri de apă în 15 minute, temperatura apei reci fiind de 14^0 C. Randamentul fierbătorului este de 85%, iar tensiunea lui de alimentare de 120 volți.

Soluția: Se aplică relația (2-28) pusă sub forma $W = \frac{U^2}{R} t$,

în care R este rezistența fierbătorului, $t = 15.60 = 900$ s și $U = 120$ V.

Energia absorbită de fierbător de la rețea este

$$W_a = \frac{120^2}{R} 900 = \frac{12{,}96 \cdot 10^6}{R} \text{ J} .$$

Energia utilă absorbită de apă este

$$W_u = \frac{12{,}96 \cdot 10^6}{R} \cdot 0{,}85 = \frac{11 \cdot 10^6}{R} J \cdot$$

Această energie trebuie să încălzească 2 litri de apă cu $(100^0 - 14^0) = 86^0C$, ceea ce echivalează în calorii (mici) cu

$$86 \cdot 2 \cdot 10^3 = 172 \cdot 10^3 \text{ calorii,}$$

care transformate în jouli reprezintă

$$\frac{172 \cdot 10^3}{0{,}24} = 716\,666 \text{ J} \cdot$$

Deci

$$W_u = \frac{11 \cdot 10^6}{R} = 716\,666 \text{ J, de unde } R = \frac{11 \cdot 10^6}{716666} = 15{,}3\ \Omega \cdot$$

2-8. Calculul încălzirii conductoarelor electrice

Conductoarele electrice prezentînd o rezistență proprie se încălzesc prin trecerea curentului, datorită efectului termic al acestuia.

Puterea calorică pe care o primește un conductor de rezistență R, parcurs de un curent I, este dată în calorii/s de relația,

$$P_T = 0{,}24\, R\, I^2 \cdot \qquad (2\text{-}33)$$

O parte din căldura primită de conductor contribuie la creșterea temperaturii lui, iar restul se transmite mediului ambiant prin răcire.

Răcirea conductorului este proporțională cu diferența dintre temperatura sa proprie și aceea a mediului ambiant. Prin urmare, pe măsură ce conductorul se încălzește, o cantitate din ce în ce mai mică din căldura primită pe secundă rămîne în conductor și îi ridică mai departe temperatura, iar o cantitate din ce în ce mai mare este transmisă mediului ambiant. Viteza încălzirii conductorului devine din ce în ce mai mică și încălzirea se oprește cînd conductorul atinge temperatura pentru care întreaga energie calorică primită este transmisă, prin răcire, mediului ambiant.

Această temperatură se numește *temperatura de regim* a conductorului, corespunzătoare puterii P_T, deci corespunzătoare, potrivit relației (2-33), curentului I.

Timpul necesar conductorului să atingă temperatura de regim nu este același pentru diferite conductoare, ci depinde de particularitățile conductorului. De pildă, filamentul unei lămpi cu incandescență atinge temperatura de regim într-o fracțiune de secundă, în timp ce conductoarele din interiorul unei mașini electrice (înfășurarea mașinii), în cîteva ore.

O încălzire excesivă a conductoarelor izolate poate conduce la o deteriorare sau la o distrugere completă a izolației lor. O încălzire excesivă a conductoarelor neizolate poate produce o schimbare a proprietăților lor mecanice. În ambele cazuri, încălzirea excesivă a conductoarelor poate provoca incendierea materialelor în contact cu ele sau aflate în apropierea lor.

Pentru a se evita o încălzire excesivă a conductoarelor, normele fixează pentru fiecare tip de conductor, după particularităţile lui constructive, anumite limite pe care le poate atinge curentul, în funcţie de secţiunea conductorului şi de materialul din care este confecţionat.

Dacă notăm cu c coeficientul de răcire al conductorului, care reprezintă cantitatea de căldură în calorii degajată în unitatea de timp de fiecare unitate de suprafaţă a conductorului, la o diferenţă între temperatura conductorului şi aceea a mediului ambiant de 1°C, cu S suprafaţa periferică a conductorului, prin care are loc răcirea, cu θ° diferenţa, la un moment oarecare, dintre temperatura conductorului şi aceea a mediului ambiant, expresia căldurii degajate prin răcire de conductor, în acel moment, în calorii pe secundă, este

$$K = c\,S\,\theta^0 .$$

Cînd conductorul atinge temperatura de regim, vom avea, notînd încălzirea respectivă cu θ^0_{fin}

$$K_{fin} = c\,S\,\theta^0_{fin} . \qquad (2\text{-}34)$$

Conform definiţiei date temperaturii de regim, rezultă că

$$K_{fin} = P_T$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (2-33) şi (2-34),

$$c\,S\,\theta^0_{fin} = 0{,}24\,R\,I^2 .$$

Prin urmare,

$$\theta^0_{fin} = \frac{0{,}24\,R\,I^2}{c\,S} \qquad (2\text{-}35)$$

şi

$$I = \sqrt{\frac{c\,S\,\theta^0_{fin}}{0{,}24\,R}} . \qquad (2\text{-}36)$$

Deoarece atît rezistenţa R a conductorului, cît şi suprafaţa lui de răcire S, sînt proporţionale cu lungimea conductorului, rezultă că valorile temperaturii θ'_{fin} şi ale intensităţii I, date de relaţiile precedente, sînt independente de lungimea conductoarelor.

Temperatura finală a conductorului se obţine adăugînd încălzirii finale, date de relaţia (2-35), temperatura t^0_a a mediului ambiant. Notînd temperatura finală a conductorului cu t^0_{fin}, avem

$$t^0_{fin} = \theta^0_{fin} + t^0_a .$$

Cu ajutorul relaţiei (2-36) putem calcula curentul pe care îl poate suporta conductorul fără ca temperatura sa finală să depăşească temperatura prevăzută de norme.

Pentru conductoarele izolate, normele stabilesc o temperatură maximă de încălzire de 60°—100°C, în funcţie de natura izolaţiei şi de condiţiile montajului. Curentul calculat în aceste condiţii poartă numele de *curentul nominal* al conductorului.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă este parcurs de un curent mai mare decît cel nominal, conductorul se „supraîncarcă" și temperatura lui poate atinge valori care să depășească temperatura admisibilă. În fig. 2-3 sînt reprezentate curbele

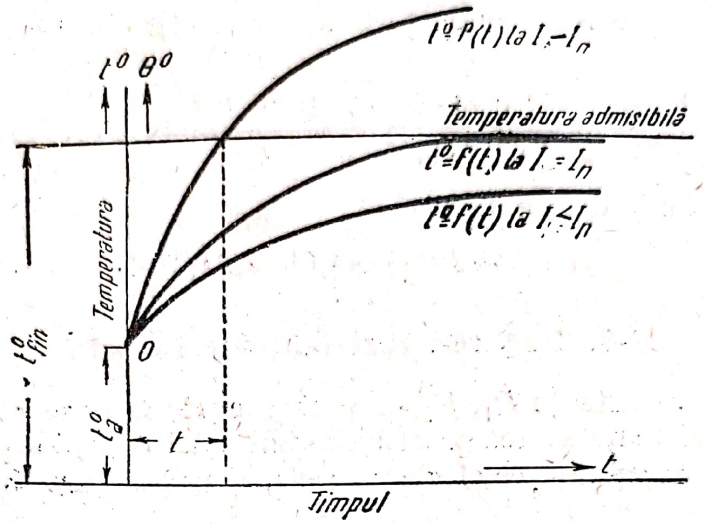


Fig. 2-3. Curbele de încălzire a conductorului electric

de încălzire ale unui conductor electric și anume curba corespunzătoare sarcinii nominale ($I=I_n$), unei subsarcini ($I<I_n$) și unei suprasarcini ($I>I_n$). Se vede din figură că conductorul poate suporta curentul de suprasarcină numai atîta timp cît durata supraîncărcării nu depășește timpul t. După trecerea acestui timp, curba trece în zona temperaturilor periculoase.

La intensitatea nominală și la intensități sub cea nominală, conductorul poate funcționa oricît fără ca temperatura sa să depășească valoarea limitei impuse de norme.

Valorile curenților nominali, în funcție de secțiunea conductorului, sînt date în tabele speciale. În tabela 2-2 sînt date valorile curenților nominali pentru conductoarele de cupru cu izolația de cauciuc, montate în instalație fixă în țeavă.

Tabela 2-2

Valorile curenților nominali în funcție de secțiunea conductorului

Secțiune în mm²	Curent maxim admisibil în A	Secțiune în mm²	Curent maxim admisibil în A	Secțiune în mm²	Curent maxim admisibil în A
1,0	12	10	43	70	175
1,5	16	16	68	95	215
2,5	21	25	90	120	255
4,0	27	35	110	150	295
6,0	35	50	140		

Exemplul 2-5. Să se calculeze temperatura pe care o atinge un conductor de cupru, cu secțiunea de 2,5 mm² parcurs, în regim permanent, de un curent de 30 A, cunoscînd că coeficientul de răcire al cuprului este $c=6$ și rezistivitatea $\varrho = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ $\Omega \frac{mm^2}{m}$. Temperatura mediului ambiant este de 20° C.

Soluția: Aplicăm relația (2-35) $\theta^0_{fin} = \dfrac{0{,}24\, R I^2}{c\, S}$.

Rezistența R a conductorului este $R = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot l/2{,}5 = 7 \cdot 10^{-3}\, l \cdot \Omega$.
Diametrul conductorului $d = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ m.
Suprafața de răcire a conductorului, $S = \pi \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot l = 5{,}65 \cdot 10^{-3}\, l\, m^2$.
Rezultă

$$\theta^0_{fin} = \frac{0.24 \cdot 30^2 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot l}{6 \cdot 5{,}65 \cdot 10^{-3} \cdot l} = 44{,}6^0\,C.$$

Temperatura atinsă de conductor

$$t^0_{fin} = 20^0 + 44{,}6^0 = 64{,}6^0\,C.$$

2-9. Legarea rezistențelor în serie

Mai multe rezistențe R_1, R_2,..., R sînt legate în serie atunci cînd sfîrșitul primei rezistențe se leagă cu începutul celei de a doua, sfîrșitul celei de a doua cu începutul celei de a treia, ș.a.m.d. (fig. 2-4). În modul

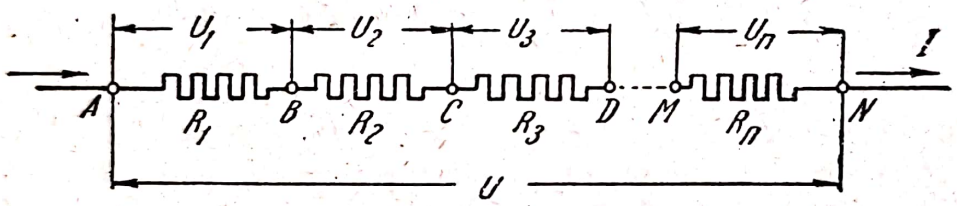


Fig. 2-4. Legarea rezistențelor în serie

acesta, ansamblul rezistențelor formează un conductor unic continuu.

Dacă la capetele A și N ale ansamblului de rezistențe aplicăm o diferență de potențial $U = V_A - V_N$, prin toate rezistențele va trece același curent care, conform legii lui Ohm, este dat de relația

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_A - V_N}{R}, \qquad (2\text{-}37)$$

în care R este *rezistența echivalentă* a ansamblului de rezistențe legate în serie.

Prin trecerea curentului I, în fiecare rezistență se produce, conform relației (2-5), o cădere de tensiune. Notînd căderile de tensiune din rezistențe cu U_1, U_2, U_3,..., U_n, vom avea

$$U_1 = V_A - V_B = R_1 I,$$
$$U_2 = V_B - V_C = R_2 I,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n = V_M - V_N = R_n I.$$

Adunînd aceste egalități, avem

$$V_A - V_N = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)\, I,$$

de unde

$$I = \frac{V_A - V_N}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}. \qquad (2\text{-}38)$$

Din relaţia (2-37) şi (2-38) rezultă că

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n, \qquad (2\text{-}39)$$

adică, *la legarea rezistenţelor în serie, rezistenţa echivalentă a ansamblului de rezistenţe este egală cu suma rezistenţelor respective.*

2-10. Surse de energie electrică. Forţe electromotoare. Receptoare electrice

1. **Surse de energie electrică.** Se numeşte *sursă de energie electrică* sau *generator electric,* un aparat sau o maşină în stare să transforme o energie disponibilă oarecare în energie electrică.

În aplicatiile industriale se utilizează următoarele categorii de surse electrice:

a) *pile* sau *elemente galvanice,* care transformă energia chimică în energie electrică;

b) *maşini electrice* (generatoare de curent continuu şi generatoare de curent alternativ sau alternatoare), care transformă energia mecanică în energie electrică.

Sursele de energie electrică se reprezintă convenţional aşa cum se se arată în fig. 2-5a, cînd este vorba de un aparat static (pilă sau acumulator), ca în fig. 2-5b, cînd este vorba de un generator de curent con-

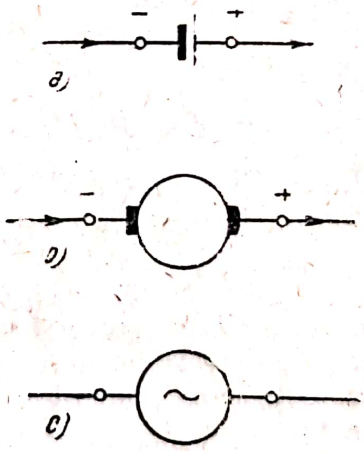


Fig. 2-5. Simbolurile grafice ale surselor de energie electrică

tinuu şi ca în fig. 2-5c, cînd este vorba de un generator de curent alternativ.

Producerea şi întreţinerea curentului electric de către o sursă electrică se datoreşte apariţiei, în interiorul sursei, a unei *forţe electromotoare*

(f.e.m.)*. F.e.m. reprezintă o mărime fizică și are caracterul unei tensiuni electrice, măsurîndu-se, ca și tensiunea, în volți. Simbolul f.e.m. este E sau e.

Modul de producere a forței electromotoare depinde de natura generatorului de energie. În pile, f.e.m. ia naștere pe cale chimică (vezi par. 4-4). În mașinile electrice, f.e.m. ia naștere prin fenomenul inducției electromagnetice (vezi par. 7-1).

În fig. 2-6 este reprezentat un circuit electric, cuprinzînd o sursă de energie și un receptor electric.

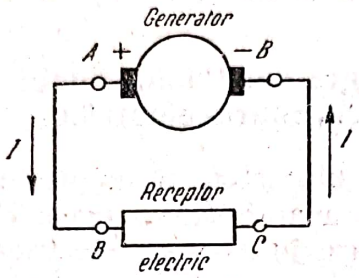


Fig. 2-6. Circuit electric cu sursă și receptor electric

Oricare ar fi natura sursei, circuitul din interiorul acesteia, dintre borna de intrare și cea de ieșire a curentului, care poartă numele de *circuit interior*, are o rezistență numită *rezistența interioară* a sursei, pe care o vom nota cu r. Dacă notăm cu R rezistența circuitului exterior sursei de curent, pe care îl numim *circuit exterior* sau *circuit de utilizare*, rezistența întregului circuit este dată de suma $r + R$ și curentul care ia naștere în circuit este

$$I = \frac{E}{r+R}. \tag{2-40}$$

Din relația precedentă rezultă

$$E = rI + RI, \tag{2-41}$$

sau ținînd seama că produsul RI, căderea de tensiune în rezistența R, reprezintă diferența de potențial U dintre bornele generatorului, rezultă că

$$E = rI + U. \tag{2-41a}$$

Prin urmare, f.e.m. produsă de generator face față căderii de tensiune interioară și diferenței de potențial la borne.

Dacă circuitul pe care debitează generatorul este întrerupt ($R = \infty$), $I = 0$ și relația (2-41 a) devine

$$E = U.$$

Urmează că *f.e.m. a unei surse electrice este egală cu diferența de potențial dintre bornele sursei, cînd ea nu debitează curent.* Acesta este *regimul de funcționare în gol* al sursei.

*) În unele tratate de electrotehnică a fost înlocuită, în timpul din urmă, denumirea de forță electromotoare cu aceea de *tensiune electromotoare*.

Punînd relația (2-41a) sub forma

$$U = E - rI, \qquad (2\text{-}41b)$$

rezultă că diferența de potențial la bornele unei surse, care debitează pe un circuit, este totdeauna inferioară forței sale electromotoare. Valoarea tensiunii U este cu atît mai mică cu cît sarcina I este mai mare, deci cu cît rezistența R este mai mică.

Cînd rezistența R devine zero, sursa se găsește *în regim de scurt-circuit*. Diferența de potențial la borne se anulează și, potrivit relației (2-41a), căderea interioară de tensiune devine egală cu forța electromotoare a sursei.

Prin urmare, cînd rezistența exterioară R a sursei variază între infinit și zero, diferența de potențial la bornele sursei variază de la E la zero.

Dacă înmulțim cu I ambii membri ai relației (2-41 a), obținem *ecuația bilanțului puterilor*

$$EI = rI^2 + UI. \qquad (2\text{-}42)$$

Termenul EI reprezintă *puterea electrică totală* a generatorului; termenul rI^2 reprezintă *pierderile* prin efect Joule-Lenz în generator, iar termenul UI, *puterea disponibilă* la bornele generatorului.

Înmulțind relația precedentă cu t, obținem *ecuația bilanțului energiilor*.

$$EIt = rI^2t + UIt. \qquad (2\text{-}43)$$

Membrul întîi al relației (22-43) reprezintă *energia electrică totală produsă* de generator; primul termen din membrul al doilea, *energia pierdută* în generator în timpul funcționării sale (pierderea de energie prin efect Joule-Lenz în generator), iar termenul al doilea, *energia debitată* de generator pe circuitul de utilizare.

2. **Receptoare electrice.** Se numește *receptor electric* un aparat sau o mașină care transformă o energie electrică disponibilă într-o formă de energie necesară.

Principalele receptoare electrice sînt:

a) *motoarele*, care transformă energia electrică în lucru mecanic;

b) *lămpile* și *aparatele de încălzit*, care transformă energia electrică în energie luminoasă și în energie termică;

c) *băile de electroliză* și *acumulatoarele electrice în curs de încărcare*, care transformă energia electrică în energie chimică.

Ca și generatoarele, receptoarele electrice au o rezistență interioară, pe care o vom nota tot cu r. Prin trecerea curentului se produce, în această rezistență interioară, o cădere de tensiune rI, care trebuie să fie acoperită de diferența de potențial U, aplicată la bornele receptorului.

Cînd receptorul transformă întreaga energie electrică numai în energie termică, avem

$$U = rI.$$

Dacă înmulțim ambii membri ai relației precedente cu I, obținem

$$UI = rI^2,$$

adică întreaga putere absorbită de receptor este convertită în căldură, prin efect Joule-Lenz.

Dacă însă receptorul transformă energia electrică în altă energie decît cea termică, de pildă în lucru mecanic sau în energie chimică, obișnuit numai o mică parte din energia primită se transformă în căldură prin efect Joule-Lenz în rezistența interioară, constituind astfel pierderile transformării, și cea mai mare parte se transformă în lucru mecanic sau energie chimică. În acest caz avem relația

$$UI = rI^2 + P, \tag{2-44}$$

în care P este puterea produsă de receptor.

Împărțind relația precedentă cu I, obținem.

$$U = rI + \frac{P}{I}.$$

Prin urmare, tensiunea U aplicată receptorului face față căderii ohmice rI în interiorul receptorului și mărimii fizice P/I, care este deci tot de natura unei diferențe de potențial. Numim această mărime *f.e.m. a receptorului* și o notăm cu E. Datorită ei are loc apariția puterii produse (puterii convertite) P a receptorului. Prin urmare $P = EI$.

Relația precedentă devine

$$U = rI + E, \tag{2-45}$$

de unde

$$I = \frac{U - E}{r}. \tag{2-46}$$

Tensiunea U și rezistența interioară r fiind constante, rezultă că I este cu atît mai mic cu cît E este mai mare. Prin urmare, la receptor f.e.m. se opune trecerii curentului, din care cauză ea poartă, uneori, numele de *forță contraelectromotoare* (f.c.e.m.).

Introducînd f.e.m., relația (2-44) a bilanțului puterilor devine

$$UI = rI^2 + EI, \tag{2-44 a}$$

în care UI reprezintă *puterea absorbită* de receptor, rI^2 reprezintă *pierderile de putere* în receptor și EI, *puterea convertită* sau *puterea produsă* a receptorului.

Receptoarele electrice pot fi reversibile. Alimentate cu energia pe care o produc ca receptoare, ele pot transforma această energie în energie electrică și pot astfel funcționa ca generatoare de energie electrică.

Printre receptoarele reversibile, menționăm mașinile electrice și acumulatoarele electrice.

Exemplul 2-6. Un generator de curent continuu, avînd o tensiune la borne de 120 volți, debitează pe un circuit de utilizare avînd o rezistență de 5 Ω. Rezistența interioară a generatorului fiind 0,4 Ω, se cere: *a*) curentul debitat de generator; *b*) căderea de tensiune în generator; *c*) f.e.m. a generatorului și *d*) puterea electrică a generatorului.

Soluția: Curentul debitat este dat de relația $I = U/R$ prin urmare

$$I = \frac{120}{5} = 24 \text{ A}.$$

Căderea de tensiune în generator este dată de relația rI, deci

$$0{,}4 \cdot 24 = 9{,}6 \text{ V} \cdot$$

Forța electromotoare este dată de relația (2-41 a)

$$E = 120 + 9{,}6 = 129{,}6 \text{ V} \cdot$$

Puterea electrică a generatorului este

$$P = EI = 129{,}6 \cdot 24 = 3{,}11 \text{ kW} \cdot$$

Exemplul 2-7. Un motor electric, alimentat de la o rețea cu tensiunea de 220 V, absoarbe un curent de 180 A. Se cere să se calculeze: a) puterea absorbită din rețea și b) puterea utilă la arborele motorului, randamentul motorului fiind de 0,87.

Soluția: Puterea absorbită este $P = UI$, adică

$$P = 220 \cdot 180 = 39\,600 \text{ W} = 39{,}6 \text{ kW} \cdot$$

Puterea utilă fiind egală cu puterea absorbită înmulțită cu randamentul, vom avea

$$P_u = 39{,}6 \cdot 0{,}87 = 34{,}4 \text{ kW} \cdot$$

2-11. Scurtcircuite. Siguranțe fuzibile

Cînd două puncte ale unui circuit electric sau două conductoare între care există o diferență de potențial se găsesc legate, accidental sau intenționat, printr-o rezistență foarte mică, se spune că între acele puncte, sau între acele conductoare, s-a produs un *scurtcircuit*. Dacă U este diferența de potențial dintre punctele între care s-a produs scurtcircuitul și R_{sc} rezistența conductorului care provoacă scurtcircuitul, curentul de scurtcircuit este

$$I_{sc} = \frac{U}{R_{sc}} \cdot$$

Curentul I_{sc} este cu atît mai mare cu cît U este mai mare și R_{sc} este mai mic. El poate atinge valori extrem de ridicate și conductoarele pe care le parcurge, inclusiv rezistența care provoacă scurtcircuitul, se pot încălzi excesiv, cu consecințele semnalate mai sus.

În caz de supraîncărcare de durată mai lungă a conductorului și în cazuri de scurtcircuit, curentul trebuie întrerupt înainte ca temperatura conductorului să depășească valorile admisibile. În acest scop, printre alte mijloace de protecție, se întrebuințează *siguranțele fuzibile*, formate din bucăți scurte de sîrmă subțire sau de panglică metalică subțire. Montate în serie pe circuite, siguranțele fuzibile se topesc atunci cînd intensitatea curentului devine periculoasă și întrerup astfel circuitul respectiv. Siguranțele se calibrează după valoarea maximă admisibilă a curentului în circuit.

În fig. 2-8 este arătat dispozitivul unei siguranțe bipolare neprotejate. În schemele de montaj, siguranțele fuzibile se reprezintă convențional așa cum se arată în fig. 2-8.

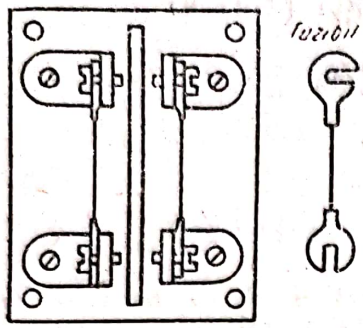


Fig. 2-7. Siguranțe filiforme

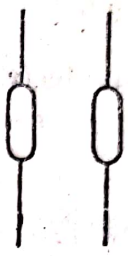


Fig. 2-8. Simbolul grafic al siguranțelor

Exemplul 2-8. Să se calculeze secțiunea unui fuzibil de plumb, de formă lamelară, care să se topească la trecerea unui curent de 200 A, la o temperatură ambiantă de 25° C. Plumbul are un coeficient de răcire $c = 2{,}09$, rezistivitatea $\varrho = 0{,}221\ \Omega\frac{mm^2}{m}$ și se topește la 326° C.

Soluția: Luăm o grosime a fuzibilului de 3 mm și notăm cu d lățimea necunoscută a fuzibilului. Secțiunea fuzibilului este de $3.b$ mm². Rezultă rezistența fuzibilului,

$$R = 0{,}221 \cdot \frac{l}{3\,b}$$

și suprafața de răcire $S = 2\,(b+3).\ 10^{-3}\ l$ m².

Din relația (2-35) scoatem

$$S = \frac{0{,}24 \cdot I^2 \cdot R}{c \cdot \theta^0_{fin}},$$

în care $\theta^0_{fin} = 326^0 - t^0_a = 301^0$C.

Rezultă

$$2\,(b+3) \cdot 10^{-3} \frac{0{,}24 \cdot 200^2 \cdot 0{,}221}{2{,}09 \cdot 301 \cdot 3\,b}.$$

Dacă neglijăm, în paranteza din membrul întîi, grosimea de 3 mm față de lățimea b a secțiunii, avem

$$b = 200 \sqrt{\frac{0{,}24 \cdot 0{,}221 \cdot 10^3}{2{,}09 \cdot 301 \cdot 3 \cdot 2}} = 23{,}7\ \text{mm}.$$

2-2. Reostate

Pentru variația curentului dintr-un circuit, sau a tensiunii aplicate circuitului, se utilizează rezistențe reglabile numite *reostate*. În fig. 2-9 este arătată reprezentarea convențională (simbolul grafic) a reostatelor.

În practica de laborator se întrebuinţează, în special, *reostatele cu cursor* (fig. 2-10). Un asemenea reostat constă dintr-unul sau două corpuri cilindrice sau prismatice, confecţionate dintr-un material izolant şi bun conducător de căldură (marmură, ardezie, porţelan etc.) pe care se

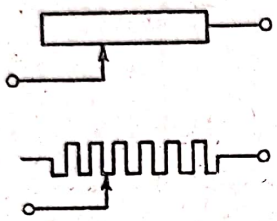


Fig. 2 - 9. Reprezentarea convenţională a reostatelor

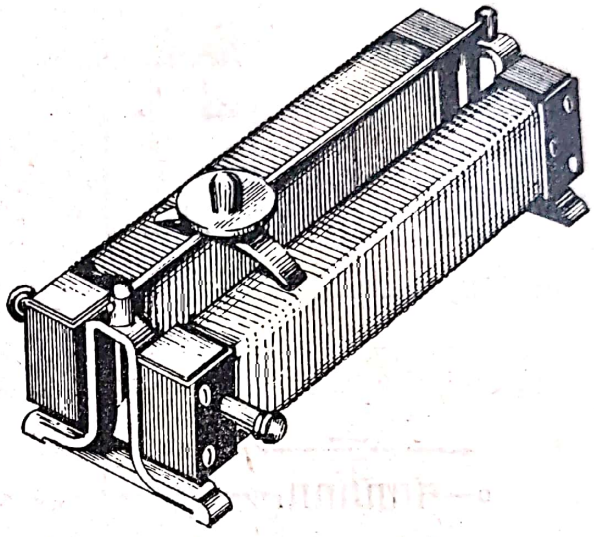


Fig. 2 - 10. Reostat cu cursor

bobinează o sîrmă neizolată, astfel încît spirele să nu se atingă. Capetele acestor corpuri sînt fixate pe doi suporţi laterali. Pe aceşti suporţi este montată o bară metalică, de-a lungul căreia se poate deplasa un cursor, prevăzut cu un arc de contact, care apasă pe spirele reostatului. Prin deplasarea cursorului, rezistenţa reostatului intercalată în circuit, se variază în mod continuu.

Ca material pentru sîrma care constituie rezistenţa reostatului se utilizează aliaje (constantan, crom-nichel, manganin etc.), care prezintă o rezistivitate mare şi au un coeficient de temperatură redus, pentru ca rezistenţa reostatului să varieze foarte puţin cu temperatura.

Reostatele cu cursor au, de regulă, trei borne, cu ajutorul cărora pot fi legate în serie cu sursa de energie, ca în fig. 2-11a, sau în derivaţie cu această sursă, ca în fig. 2-11b. În acest din urmă caz, ele servesc la reglajul tensiunii aplicate unui circuit şi poartă numele de *potenţiometre*.

Reostatele cu cursor se construiesc pentru rezistenţe de la cîţiva ohmi, pînă la 1000 Ω şi pentru curenţi de la o zecime de amper, pînă la cîteva zeci de amperi. Construcţia lor nu asigură în mod satisfăcător disiparea căldurii, ceea ce duce la imposibilitatea de a le folosi pentru **curenţi intenşi.**

Pentru reglajul unor curenţi mai puternici, se utilizează *reostate în trepte* (fig. 2-12). Elementele de rezistenţă ale acestor reostate sînt formate din sîrmă groasă, răsucită în spirale, sau din panglici şi sînt fixate pe izolatoare de porţelan montate pe o carcasă metalică. Capetele elementelor de rezistenţă sînt legate la contacte fixe numite *ploturi,*

pe care alunecă un contact mobil numit *perie*, fixat pe o pîrghie, *maneta reostatului*. Prin acționarea manetei, peria trece de pe un plot pe altul,

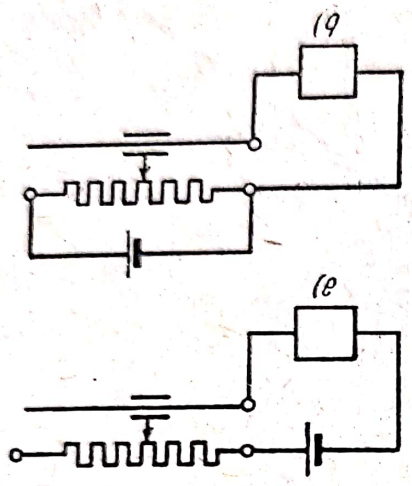


Fig. 2 - 11. Reostate cu cursor :
a) montaj serie ; *b*) montaj derivație (potențiometru)

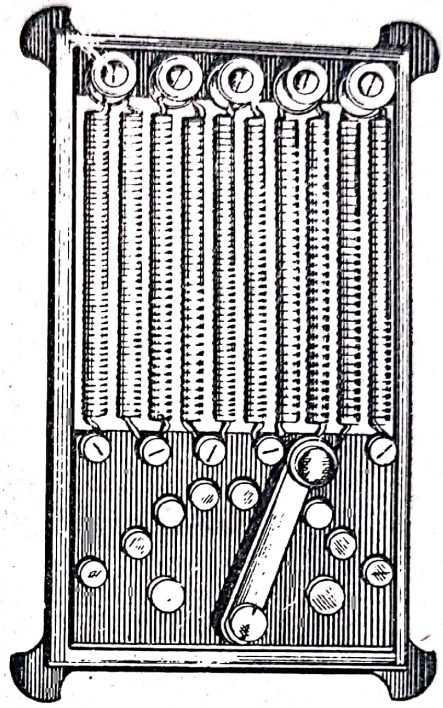


Fig. 2 - 12. Reostat în trepte

putîndu-se lega în serie un număr mai mare sau mai mic de elemente de rezistență în circuitul al cărui curent se reglează.

Reostatele în trepte se folosesc mai ales ca reostate de încărcare a circuitelor (reostate de sarcină).

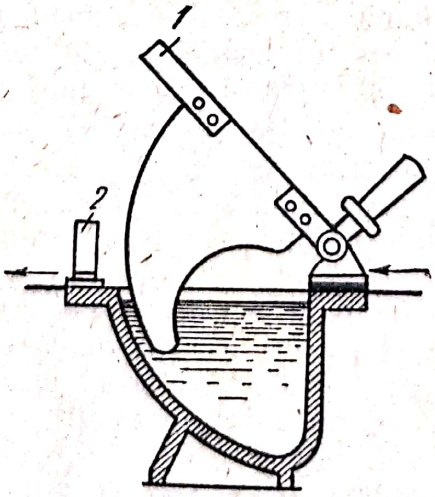


Fig. 2 - 13. Reostat lichid

Tot ca reostate de încărcare servesc și *reostatele cu lichid*. Un asemenea reostat (fig. 2-13) constă dintr-un electrod fix, constituit dintr-un

vas metalic care conține soluția unui electrolit, de pildă o soluție de sodă, și un electrod mobil, izolat electric de electrodul fix, care poate fi scufundat în soluția electrolitului. Rezistența reostatului se micșorează pe măsură ce electrodul mobil este introdus mai adînc în lichid și devine zero cînd piesele *1* și 2 ale reostatului fac contact. Se obține, în modul acesta, un reglaj continuu al rezistenței reostatului.

2-13. Legea lui Ohm pentru circuite neomogene

Legea lui Ohm, sub forma în care a fost stabilită în par. 2-3, este valabilă numai pentru circuitele omogene, adică acele circuite în care, în afară de diferența de potențial aplicată între extremitățile circuitului, nu mai există nici o altă f.e.m. Dacă asemenea f.e.m. există, circuitul este neomogen.

Ne propunem să stabilim forma pe care o ia legea lui Ohm în cazul circuitelor neomogene.

Să presupunem că menținem, la bornele unui conductor AB (fig. 2-14), o diferență de potențial constantă $V_A - V_B$, sub acțiunea unei

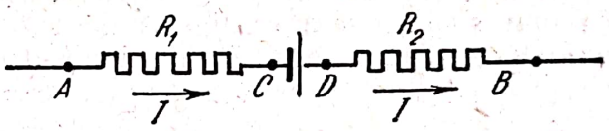


Fig. 2 - 14. Circuit electric neomogen

f.e.m. produse din exterior și că, între punctele C și D ale circuitului, acționează o altă f.e.m. care produce, între aceste puncte, o diferență de potențial $V_C - V_D$. În conductorul AB va apare un curent I, care este același în toate punctele conductorului.

Conform legii lui Ohm, putem scrie următoarele relații:

— pentru porțiunea $A\ C$ a conductorului

$$I = \frac{V_A - V_C}{R_1};$$

— pentru porțiunea $D\ B$

$$I = \frac{V_D - V_B}{R_2},$$

în care R_1 și R_2 sînt, respectiv, rezistențele porțiunilor $A\ C$ și $D\ B$.

Rezultă că

$$I = \frac{V_A - V_C}{R_1} = \frac{V_D - V_B}{R_2}.$$

Dacă adunăm numărătorii între ei și numitorii între ei, avem

$$I = \frac{V_A - V_C + V_D - V_B}{R_1 + R_2} = \frac{V_A - V_B + (V_D - V_C)}{R_1 + R_2}.$$

Diferența de potențial $V_D - V_C$ este pozitivă și egală cu f.e.m. E a sursei (în ipoteza că se neglijează rezistența interioară), cînd D repre-

zintă polul pozitiv și C polul negativ al sursei sau negativă și egală cu $-E$, cînd C reprezintă polul pozitiv și D polul negativ al sursei. Vom avea deci

$$I = \frac{V_A - V_B \pm E}{R_1 + R_2}.$$

În cazul cînd pe conductor activează mai multe f.e.m., avem

$$I = \frac{V_A - V_B + \sum E}{\sum R}. \qquad (2\text{-}46)$$

În această relație $\sum E$ poate fi pozitivă sau negativă, deoarece, sub semnul sumei, f.e.m. apar cu semnele lor, fixate prin regula de mai sus. Termenul $\sum R$ reprezintă suma rezistențelor porțiunilor respective de conductor.

Pentru a ține seama și de rezistențele interioare ale surselor, este suficient să scoatem aceste rezistențe în porțiunile exterioare ale circuitului, conectîndu-le în serie cu celelalte rezistențe de pe circuit și considerînd, la fel ca mai sus, sursele ca lipsite de rezistențe. Acest procedeu nu schimbă intensitatea curentului din circuit. În acest caz, relația (2-46) ia forma

$$I = \frac{V_A - V_B + \sum E}{\sum R + \sum r}, \qquad (2\text{-}47)$$

în care $\sum r$ reprezintă suma rezistențelor interioare ale surselor de energie.

Relația (2-47) reprezintă *legea lui Ohm aplicată circuitelor neomogene.*

Exemplul 2-9. În circuitul din fig. 2-15 sînt legate în serie 5 surse de curent

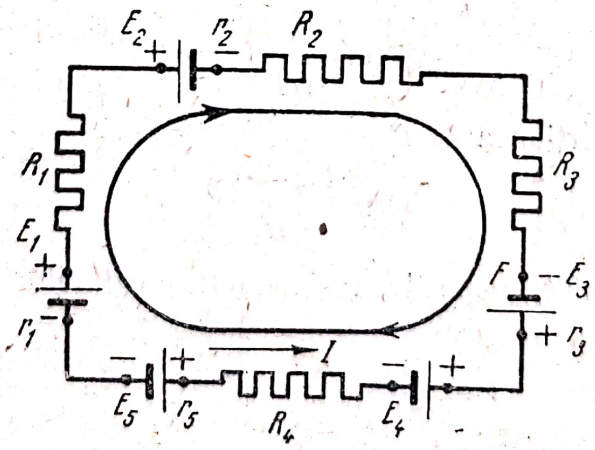


Fig. 2-15. Schemă la exemplul 2-9

(elemente galvanice) avînd ca f.e.m. $E_1 = 1{,}8$ V, $E_2 = 1{,}2$ V, $E_3 = 1$ V, $E_4 = 1{,}6$ V, și $E_5 = 2$ V. Rezistențele interioare respective sînt $r_1 = 5\,\Omega$, $r_2 = 7\,\Omega$, $r_3 = 10\,\Omega$, $r_4 = 6\,\Omega$, și $r_5 = 4\,\Omega$. Pe circuit se mai găsesc și următoarele rezistențe exterioare: $R_1 = 6\,\Omega$, $R_2 = 14\,\Omega$; $R_3 = 4\,\Omega$ și $R_4 = 2\,\Omega$. Se cere să se determine valoarea curentului din circuit.

Soluția: Circuitul fiind închis, termenul $V_A - V_B$ din relația (2-44) este 0 și relația devine $I = \pm E/\sum R + \sum r$.

Alegem un anumit sens de parcurgere al circuitului, de pildă cel orar, și convenim să considerăm ca pozitive f.e.m. ale surselor din care ieșim prin borna pozitivă și ca negative cele din care ieșim prin borna negativă. Rezultă

$$E = 1{,}8 - 1{,}2 + 1 - 1{,}6 - 2 = -2 \text{ V},$$

de unde

$$I = \frac{-2}{6 + 14 + 4 + 2 + 5 + 7 + 10 + 6 + 4} = -0{,}3 \text{ A}.$$

Semnul negativ ne arată că curentul circulă în sens opus sensului considerat ca pozitiv, adică în sens antiorar.

2-14. Diagrama potențialelor de-a lungul unui circuit electric

Potențialul unui punct oarecare al unui circuit electric, parcurs de curent, față de un punct fix al circuitului, luat ca origină de potențial, este dat de diferența între potențialul acelui punct și potențialul punctului luat ca origină. Cînd acest din urmă punct este legat la pămînt, potențialul său este zero.

Ne propunem să determinăm modul cum variază potențialul în lungul unui asemenea circuit electric.

Să considerăm circuitul din fig. 2-16 a și să presupunem că punctul

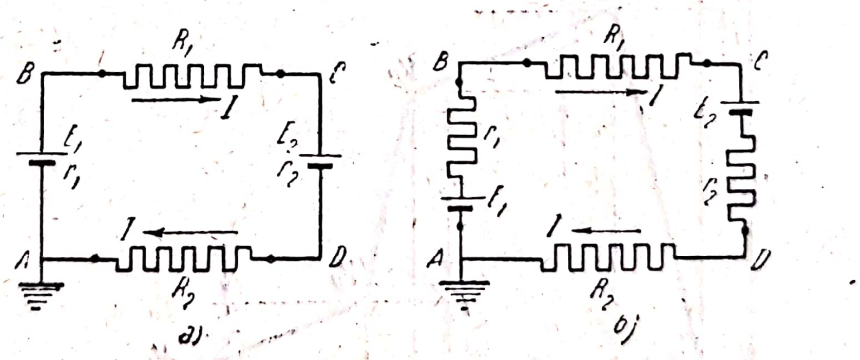


Fig. 2-16. Schema circuitului legat la pămînt

tul său A este legat la pămînt (deci are potențialul zero) și îl luăm ca origină a potențialului. În ipoteza că $E_1 > E_2$, curentul din circuit va avea sensul arătat în figură.

Pentru a înlesni expunerea, înlocuim circuitul real printr-o schemă echivalentă, în care rezistențele interioare ale surselor sînt scoase în afara acestora (fig. 2-16 b). Pornind din punctul de origină A și parcurgînd circuitul în sensul curentului, obținem următoarele valori ale potențialului pe circuit, aplicînd de fiecare dată relația (2-47):

pentru punctul B

$$V_A - V_B + E_1 = r_1 I \quad ,$$

de unde, ținînd seama că $V_A = 0$,

$$V_B = E_1 - r_1 I \quad ;$$

pentrul punctul C

$$V_B - V_C = R_1 I \quad ,$$

de unde

$$V_C = V_B - R_1 I \quad ;$$

pentru punctul D

$$V_C - V_D - E_2 = r_2 I \quad ,$$

de unde

$$V_D = V_C - E_2 - r_2 I \quad .$$

Reprezentarea grafică a distribuției potențialelor de-a lungul unui circuit se numește *diagrama potențialelor*. În fig. 2-17 am reprezentat diagrama potențialelor corespunzătoare circuitului din fig. 2-16.

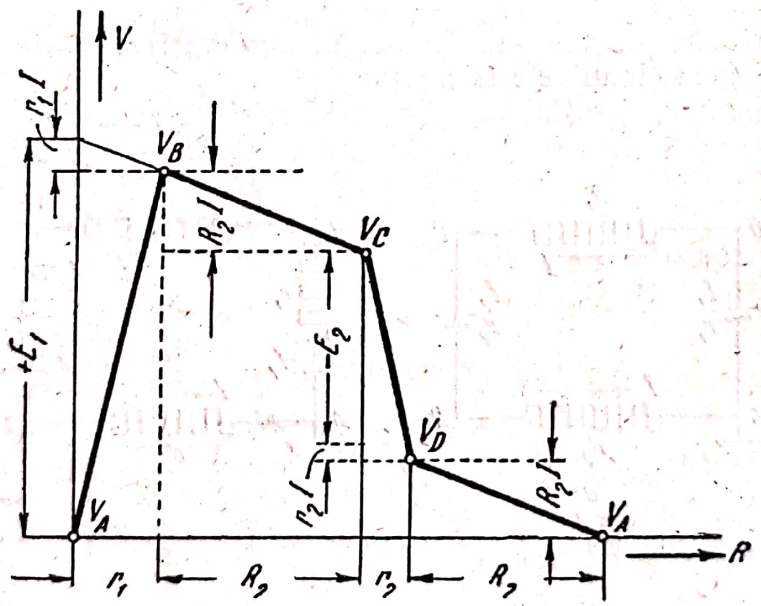


Fig. 2-17. Distribuția potențialelor de-a lungul circuitului din fig. 2 - 16

Diagrama se construiește luîndu-se, la scările alese, pe axa absciselor rezistențele din circuit, în ordinea lor de succesiune, iar pe axa ordonatelor, potențialele respective ale punctelor de pe circuit.

Dacă punctul luat ca origină a potențialelor are un potențial, în raport cu pămîntul, diferit de zero, axa absciselor se va deplasa, în sus sau în jos, după valoarea și semnul acestui potențial și ordonatele diagramei, deci potențialele circuitului se socotesc în raport cu această axă.

Exemplul 2-10. Se cere să se construiască diagrama potențialelor pentru circuitul din fig. 2-18, în care avem

$E_1 = 60$ V ; $E_2 = 30$ V ; $E_3 = 40$ V ; $r_1 = 4\,\Omega$; $R_1 = 7\,\Omega$; $r_2 = 2\,\Omega$; $R_2 = 5\,\Omega$; $r_3 = 3\,\Omega$; $R_3 = 4\,\Omega$.

Diagrama se construiește în următoarele ipoteze:

a) punctul $V_F = 0$ și
b) punctul $V_C = 0$.

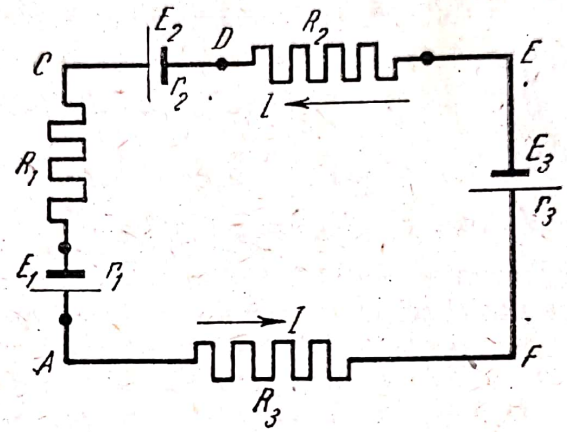


Fig. 2-18. Schema la exemplul 2 - 10

Soluția: Curentul din circuit este dat de relația

$$I = \frac{E_1 + E_2 - E_3}{r_1 + R_1 + r_2 + R_2 + R_3 + r_3} = \frac{50}{25} = 2\text{ A} = \text{tg}\,\alpha = \text{const}$$

și are sensul arătat în figură.

a) Urmînd sensul curentului, calculăm potențialul punctelor principale ale circuitului.

Pentru punctul E se aplică relația

$$V_F - V_E - E_3 = r_3 I \quad ;$$

obținem, ținînd seama că $V_F = 0$,

$$V_E = -E_3 - r_3 I = -40 - 6 = -46\text{ V} \cdot$$

Pentru punctul D

$$V_E - V_D = R_2 I \quad ,$$

deci

$$V_D = V_E - R_2 I = -46 - 10 = -56\text{ V}.$$

Pentru punctul C

$$V_D - V_C + E_2 = r_2 I \quad ,$$

deci

$$V_C = V_D + E_2 - r_2 I = -56 + 30 - 4 = -30\text{ V}$$

Pentru punctul B

$$V_C - V_B = R_1 I ,$$

deci

$$V_B = V_C - R_1 I = -30 - 14 = -44\,\text{V}.$$

Pentru punctul A

$$V_B - V_A + E_1 = r_1 I ,$$

deci

$$V_A = V_B + E_1 - r_1 I = -44 + 60 - 8 = 8\,\text{V} .$$

În sfîrșit, din relația

$$V_A - V_F = R_3 I$$

rezultă că

$$V_F = V_A - R_3 I = 8 - 8 = 0 .$$

b) Pentru a reprezenta diagrama potențialelor în raport cu V_C, este de ajuns să deplasăm axa absciselor, facînd-o să treacă prin V_C.

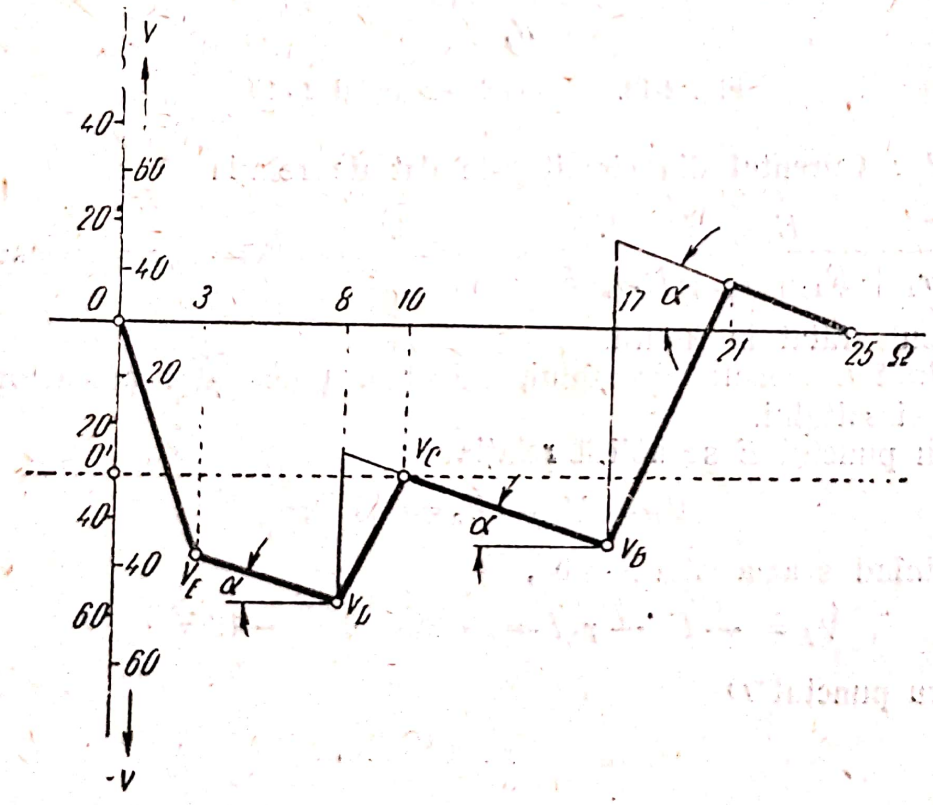


Fig. 2-19. Diagrama potențialelor circuitului din exemplul 2 - 10

Diagrama potențialelor, construită cu rezultatele obținute, este reprezentată în fig. 2-19.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

3-1. Legile lui Kirchhoff

Am studiat pînă acum circuite electrice simple, neramificate, conținînd una sau mai multe f.e.m. Calculul curentului s-a făcut cu ajutorul legii lui Ohm.

În practică survin cazuri de circuite ramificate, compuse din mai multe circuite simple închise și în care găsim diverse f.e.m., care provin din surse sau din receptoare de energie electrică, precum și diverse rezistențe. Un asemenea circuit poartă numele de *circuit* sau *rețea complexă* și dispune în general de un număr mare de laturi.

Problema care se pune este de a se găsi intensitatea și sensul curenților din fiecare latură, cînd se cunoaște valoarea și poziția f.e.m. din circuit, sau de a se găsi valoarea f.e.m., cînd se cunoaște poziția surselor de energie și valorile curenților.

Asemenea probleme se pot rezolva cu ajutorul *legilor lui Kirchhoff*.

Prima lege a lui Kirchhoff: *Legea curenților*. Această lege stabilește relația dintre curenții din conductoarele rețelei complexe care au un

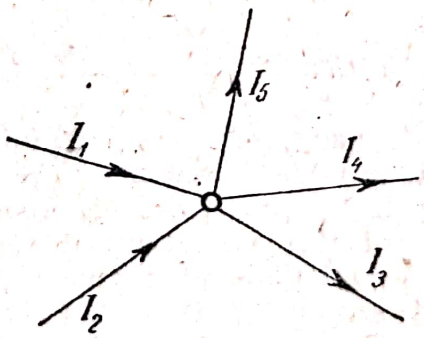


Fig. 3-1. Un nod al unei rețele complexe

punct comun, deci care formează ceea ce se chiamă un *nod* (fig. 3-1). Legea se enunță precum urmează:

Suma intensităților curenților care se îndreaptă spre nod este egală cu suma intensităților curenților care se îndepărtează de nod.

În nodul A, din fig. 3-1, avem

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

sau

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0 .$$

Dacă considerăm ca pozitivi curenții care se îndreaptă spre nod și ca negativi cei care se îndepărtează de nod, avem relația

$$\sum I = 0 . \qquad (3\text{-}1)$$

Legea rezultă din considerația că în nod neputîndu-se acumula nici o cantitate de electricitate, curenții care se îndreaptă spre nod sînt egali cu cei care se îndepărtează de nod.

A doua lege a lui Kirchhoff: *Legea căderilor de tensiune.* Această lege stabilește relația care există între f.e.m. și căderile de tensiune dintr-un circuit închis oarecare al rețelei complexe.

Fie circuitul închis $ABCDE$ (fig. 3-2). Vom alege pe acest cir-

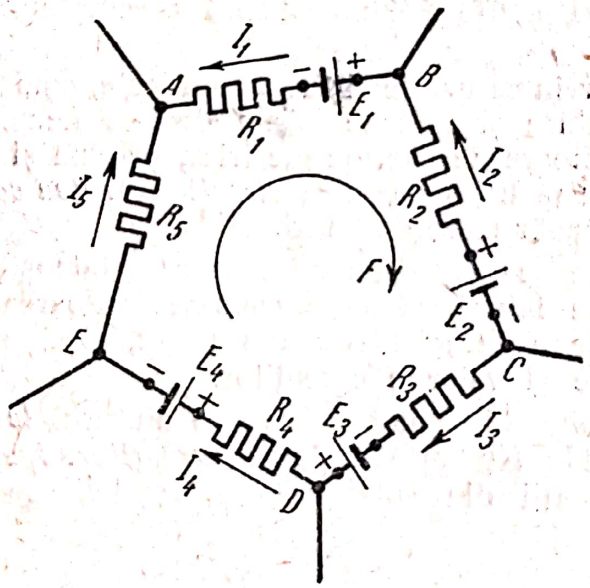


Fig. 3-2. Un circuit închis al unei rețele complexe

cuit un sens arbitrar de parcurgere a circuitului, de pildă acela indicat de săgeata F, pe care îl vom considera ca sens pozitiv. Cînd vom parcurge circuitul în sensul săgeții F, orice forță electromotoare întîlnită va avea semnul + dacă tinde să dea un curent în sensul deplasării noastre pe circuit și semnul — dacă tinde să dea un curent de sens contrar. De asemenea, orice curent întîlnit va fi afectat de semnul + sau de — după cum va curge în sensul ales ca pozitiv sau în sens contrar.

În aceste condiții, dacă parcurgem circuitul în sensul ales legea a 2-a a lui Kirchhoff se enunță precum urmează: *Suma algebrică a forțelor electromotoare întîlnite în circuit este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune.*

Prin urmare,

$$\sum E = \sum R I . \qquad (3\text{-}2)$$

Să analizăm, de pildă, circuitul închis din fig. 3-2, care face parte dintr-o rețea complexă. Circuitul este compus dintr-o serie de surse și de receptoare de energie electrică și o serie de rezistențe. Să presupunem că f.e.m. și curenții din laturile circuitului au sensurile indicate în figură și să notăm potențialele nodurilor cu V_A, V_B, V_C, V_D și V_E.

Aplicînd relația (2-47) și ținînd seama de regula dată mai sus în ceea ce privește semnul f.e.m. și al curenților, obținem, pentru fiecare latură a circuitului,

$$-I_1 = \frac{V - V_B + E_1}{R_1 + r_1};$$

$$-I_2 = \frac{V_B - V_C - E_2}{R_2 + r_2};$$

$$+I_3 = \frac{V_C - V_D + E_3}{R_3 + r_3};$$

$$+I_4 = \frac{V_D - V_E - E_4}{R_4 + r_4};$$

$$+I_5 = \frac{V_E - V_A}{R_5}.$$

Din relațiile precedente rezultă

$$E_1 = -V_A + V_B - R_1 I_1 - r_1 I_1,$$
$$-E_2 = -V_B + V_C - R_2 I_2 - r_2 I_2,$$
$$E_3 = -V_C + V_D + R_3 I_3 + r_3 I_3,$$
$$-E_4 = -V_D + V_E + R_4 I_4 + r_4 I_4,$$
$$0 = -V_E + V_A + R_5 I_5.$$

Adunînd aceste relații, obținem

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 = -R_1 I_1 - r_1 I_1 - R_2 I_2 - r_2 I_2 + R_3 I_3 + r_3 I_3 + R_4 I_4 + r_4 I_4 + R_5 I_5$$

sau

$$\sum E = \sum R I.$$

În expresia ΣRI intră și căderile interioare de tensiune.

Prin urmare, ambele legii ale lui Kirchhoff ne conduc la sisteme de ecuații liniare, ușor de rezolvat.

Pentru a aplica legile lui Kirchhoff, procedăm precum urmează. Cunoaștem în rețea, spre exemplu, mărimile f.e.m., sensul lor și mărimile rezistențelor R și r și vrem să determinăm valorile curenților și sensul lor.

Începem prin a indica, prin săgeți de *sensuri arbitrare*, sensul curenților în diverse ramuri ale rețelei și reprezentăm prin literele I_1, I_2,...,

I_l, intensităţile acestor curenţi necunoscuţi. Reţeaua avînd l laturi, vom avea nevoie de l ecuaţii.

Aplicăm fiecărui nod al reţelei prima lege, adică scriem că suma curenţilor care se îndreaptă spre nod este egală cu suma curenţilor care se îndepărtează de nod. Dacă în reţea sînt p noduri, prin aplicarea primei legi nu se pot obţine ecuaţii independente decît pentru $p-1$ noduri. Ecuaţia rezultată la ultimul nod va fi consecinţa celor precedente.

Pentru a putea rezolva sistemul, ne mai rămîne de alcătuit, cu ajutorul celei de a doua legi, a căderilor de tensiune, un număr de $l-(p-1)=(l-p)+1$ ecuaţii.

Parcurgem fiecare circuit închis al reţelei, în sensul ales ca pozitiv şi scriem, pentru fiecare din ele, determinînd semnul f.e.m. şi acela al curenţilor după regula indicată mai sus, egalitatea dată de relaţia (3-2).

Rezolvînd cele l ecuaţii liniare obţinute, se determină valorile curenţilor respectivi.

Dacă se obţine pentru un curent o valoare negativă, înseamnă că sensul său este invers aceluia indicat arbitrar prin săgeată.

Trebuie observat că un contur, ca *ABCD* din fig. 3-3, poate să

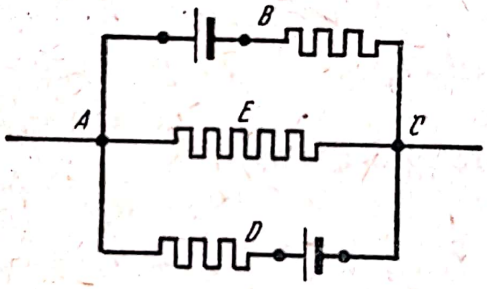


Fig. 3-3. Contururi interioare şi exterioare

cuprindă două contururi, *ABCE* şi *AECD*. În acest caz, a doua lege aplicată acestor trei contururi ar da trei ecuaţii, dintre care nu sînt distincte însă decît două. Prin urmare, într-un asemenea caz aplicăm legea căderilor de tensiune fie la cele două contururi interioare, fie la conturul exterior şi unul din contururile interioare, alcătuind astfel două ecuaţii.

Ecuaţiile date de legile lui Kirchhoff pot determina şi f.e.m. ale circuitului, atunci cînd se cunosc intensităţile curenţilor şi rezistenţele din circuit, sau rezistenţele, atunci cînd se cunosc curenţii şi f.e.m. din circuit.

Exemplul 3-1. Două pile E_1 şi E_3, avînd respectiv f.e.m. 1,5 şi 2 V şi rezistenţele interioare 0,8 şi 0,2 Ω sînt montate în circuitele din fig. 3-4, aşa cum se indică pe figură. Rezistenţele circuitelor sînt $R_1=1{,}2\,\Omega$, $R_2=0{,}8\,\Omega$ şi $R_3=0{,}4\,\Omega$.

Se cere valoarea curenţilor I_1, I_3 şi I_2, din cele trei ramuri ale circuitului complex.

Soluţia: Se alege un sens pozitiv arbitrar de parcurgere a circuitului şi anume acela indicat de săgeata F; de asemenea, se fixează arbitrar sensul curenţilor în fiecare ramură, aşa cum se arată în fig. 3-4.

Prima lege a lui Kirchhoff, aplicată nodului A, ne dă

$$I_3=I_1+I_2. \qquad (a)$$

Aplicînd a doua lege a lui Kirchhoff contururilor *ABCDA* și *ADBGA*, obținem respectiv

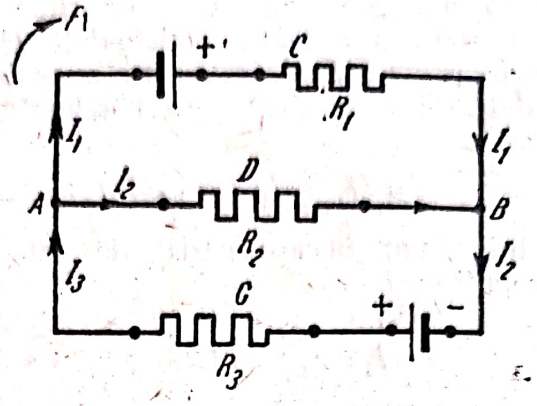


Fig. 3-4 Schemă la exemplul 3 - 1

$$1{,}5 = 0{,}8\,I_1 + 1{,}2\,I_1 - 0{,}8\,I_2 \quad , \qquad (b)$$

$$2{,}0 = 0{,}2\,I_2 + 0{,}4\,I_3 + 0{,}8\,I_2 \quad . \qquad (c)$$

Rezolvînd sistemul de ecuații [(a), (b) și (c)], obținem

$$I_1 = 1{,}132\ \text{A}\ ; \quad I_2 = 0{,}945\ \text{A}\ ; \quad I_3 = 2{,}077\ \text{A}\ .$$

Toți curenții ieșind pozitivi, înseamnă că sensurile de curent au fost bine alese. Dacă vreunul din curenți ieșea negativ, atunci trebuia schimbat sensul curentului în ramura respectivă.

3-2. Legarea rezistențelor în paralel

Două sau mai multe rezistențe sînt legate *în paralel* sau *în derivație*, cînd se aplică fiecărei rezistențe aceeași tensiune comună (fig. 3-5).

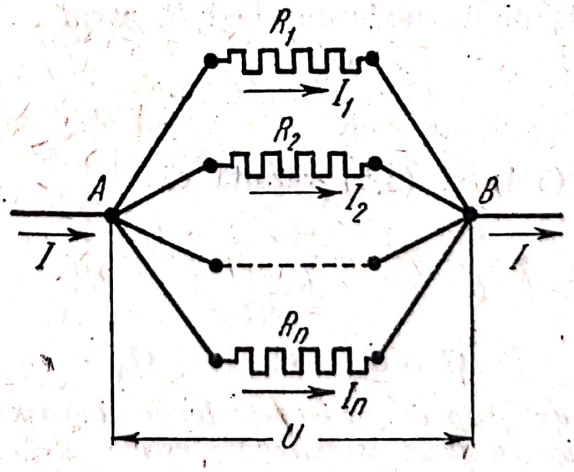


Fig. 3-5. Legarea rezistențelor în paralel

În acest mod de legare, rezistențele au un capăt legat la un punct comun, formînd un nod al grupului de rezistențe, iar celălalt capăt la alt punct comun, formînd al doilea nod al grupului de rezistențe. Rezistența echi-

valentă a grupului astfel format este rezistența echivalentă dintre cele două noduri.

Să notăm cu U tensiunea aplicată nodurilor A și B din fig. 3-5, între care sînt legate, în paralel, rezistențele R_1, R_2,..., R_n. Între curentul total I și curenții I_1, I_2,..., I_n, care apar în rezistențe, există relația de legătură dată de legea 1-a a lui Kirchhoff, aplicată, de pildă, nodului A

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \cdot \tag{3-3}$$

Potrivit legii lui Ohm, fiecare rezistență este parcursă de către un curent, dat de relațiile

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = UG_1 ,$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = UG_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$I_n = \frac{U}{R_n} = UG_n \cdot$$

Adunînd aceste relații și ținînd seama și de ecuația (3-3), avem

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) = \tag{3-4}$$

$$= U(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) \cdot$$

Pe de altă parte, notînd cu R rezistența echivalentă și cu G conductanța echivalentă dintre nodurile A și B, avem

$$I = \frac{U}{R} = UG \cdot \tag{3-5}$$

Din relațiile (3-4) și (3-5) rezultă că

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{3-6}$$

și

$$G = G_1 + G_2 \cdots + G_n \cdot \tag{3-7}$$

Prin urmare, *un grup de rezistențe legate în paralel este echivalent cu o rezistență unică, a cărei conductanță este egală cu suma conductanțelor fiecăreia din ele.*

Înmulțind ambii membri ai relației (3-7) prin U^2, avem

$$U^2 G = U^2 G_1 + U^2 G_2 + \cdots + U^2 G_n$$

și, deoarece

$$U^2 G = I^2 R = P ,$$

obținem ecuația care exprimă bilanțul puterilor din circuit

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n ,$$

adică puterea întregului circuit este egală cu suma puterilor din fiecare ramură a circuitului.

În cazul legării în paralel a două rezistențe R_1 și R_2, rezistența echivalentă este

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} ,$$

de unde

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} , \qquad (3\text{-}8)$$

adică, rezistența echivalentă este egală cu produsul rezistențelor împărțit prin suma lor.

Dacă U este diferența de potențial la capetele celor două rezistențe, avem

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R I .$$

Din această relație, obținem

$$I_1 = I \frac{R}{R_1} \quad \text{și} \quad I_2 = I \frac{R}{R_2} .$$

Ținînd seama de relația (3-8), expresiile precedente devin

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} \qquad (3\text{-}9)$$

și

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I \frac{G_2}{G_1 + G_2} . \qquad (3\text{-}10)$$

Dacă cele n rezistențe legate în paralel sînt egale între ele și egale cu r, rezistența echivalentă este dată de relația

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \cdots \quad \text{de } n \text{ ori} .$$

Deci

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{r} ,$$

de unde

$$R = \frac{r}{n} . \qquad (3\text{-}11)$$

Exemplul 3-2. Trei rezistențe $R_1 = 18\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$ și $R_3 = 24\ \Omega$ sînt legate în paralel. Punctul lor de derivație este alimentat cu un curent de 50 A. Să se determine curenții din ramurile respective.

Soluția: Aplicînd relația (3-7), se determină conductanța echivalentă

$$G = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{13}{72} = \frac{1}{5{,}54}, \text{ de unde } R = \frac{1}{G} = 5{,}54\ \Omega .$$

Tensiunea la borne este $U = R\,I = 5{,}54 \cdot 50 = 277$ V.
Curenții în rezistențe sînt

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{277}{18} = 15{,}38\ \text{A},$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{277}{12} = 23{,}08\ \text{A},$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{277}{24} = 11{,}54\ \text{A}.$$

Verificare: $I_1 + I_2 + I_3 = I$; $15{,}38 + 23{,}08 + 11{,}54 = 50$ A.

3-3. Legarea mixtă a rezistențelor

Cînd într-un circuit rezistențele sînt grupate unele în serie și altele în paralel, avem o *grupare mixtă* sau *compusă*. Pentru determinarea rezistenței echivalente procedăm precum urmează: Se calculează, separat, rezistența echivalentă a grupului de rezistențe legate în serie și a grupului legate paralel. Suma rezistențelor echivalente, astfel obținute, reprezintă rezistența echivalentă a întregului circuit mixt.

În fig. 3-6 este reprezentată o grupare mixtă, realizată în modul

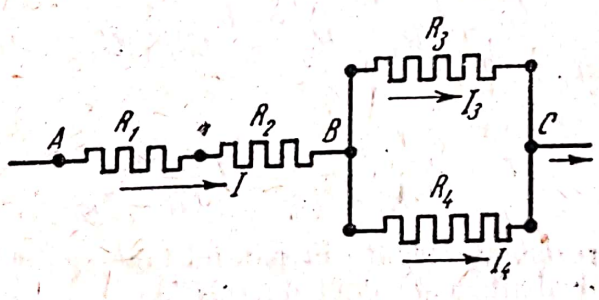


Fig. 3-6. Legarea mixtă a rezistențelor

următor. Între punctele A și B sînt grupate, în serie, rezistențele R_1 și R_2; între punctele B și C sînt grupate, în paralel, rezistențele R_3 și R_4. Vom avea

$$R_{AB} = R_1 + R_2$$

și

$$R_{BC} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Prin urmare, rezistența echivalentă a întregului circuit este

$$R = R_{AB} + R_{BC} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Exemplul 3-3. Se dă circuitul mixt din fig. 3-7 în care $E = 1{,}8$ V, $r = 0{,}4\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 2{,}6\ \Omega$; $R_3 = 12\ \Omega$; $R_4 = 4\ \Omega$ şi $R_5 = 6\ \Omega$. Să se determine curenţii şi tensiunile din circuit şi să se facă bilanţul puterilor.

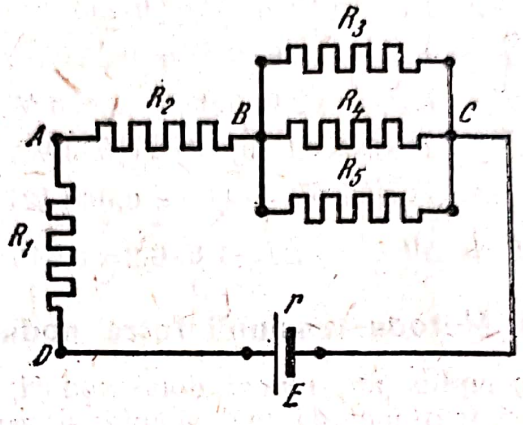


Fig. 3-7. Schemă la exemplul 3 - 3

Soluţia: Rezistenţa echivalentă a rezistenţelor legate în serie, inclusiv a rezistenţei interioare a sursei, este

$$R_{CDB} = r + R_1 + R_2 = 0{,}4 + 1 + 2{,}6 = 4\,\Omega\cdot$$

Conductanţa echivalentă a grupului de rezistenţe legale în paralel este

$$G_{BC} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\ \mathrm{S}\ ,$$

de unde rezistenţa echivalentă

$$R_{BC} = 2\,\Omega\cdot$$

Rezistenţa echivalentă a întregului circuit mixt

$$R = R_{CDB} + R_{BC} = 4 + 2 = 6\,\Omega\cdot$$

Curentul în partea neramificată a circuitului este

$$I = \frac{E}{R} = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3\ \mathrm{A}\ .$$

Tensiunea între nodurile B şi C este

$$U_{BC} = R_{BC}\, I = 2 \cdot 0{,}30\ \mathrm{A} = 0{,}60\ \mathrm{V}\ .$$

Curenţii în ramuri,

$$I_3 = \frac{U_{BC}}{R_3} = \frac{0{,}60}{12} = 0{,}05\ \mathrm{A}; \qquad I_4 = \frac{U_{BC}}{R_4} = \frac{0{,}60}{4} = 0{,}15\ \mathrm{A};$$

$$I_5 = \frac{U_{BC}}{R_5} = \frac{0{,}60}{6} = 0{,}1\ \mathrm{A}\ .$$

Verificare: $I_3 + I_4 + I_5 = I$; $0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}3$ A.

Scanned with OKEN Scanner

Puterea consumată în rezistențe este

$$P_0 = r I^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}036 \text{ W}.$$
$$P_1 = R_1 I^2 = 1{,}0 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}090 \text{ W}.$$
$$P_2 = R_2 I^2 = 2{,}6 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}234 \text{ W}.$$
$$P_3 = R_3 I_3^2 = 12{,}0 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}030 \text{ W}.$$
$$P_4 = R_4 I_4^2 = 4{,}0 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}090 \text{ W}.$$
$$P_5 = R_5 I_5^2 = 6{,}0 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}060 \text{ W}.$$
$$P = \Sigma P_i = EI = 1{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}540 \text{ W}.$$

3-4. Metoda tensiunii între noduri

Cînd circuitul complex are numai două noduri, curenții din circuit pot fi determinați printr-o metodă mai simplă și mai rapidă decît prin rezolvarea ecuațiilor obținute aplicînd cele două legi ale lui Kirchhoff.

Fie, de pildă, circuitul compus din fig. 3-8, avînd nodurile notate cu A și B.

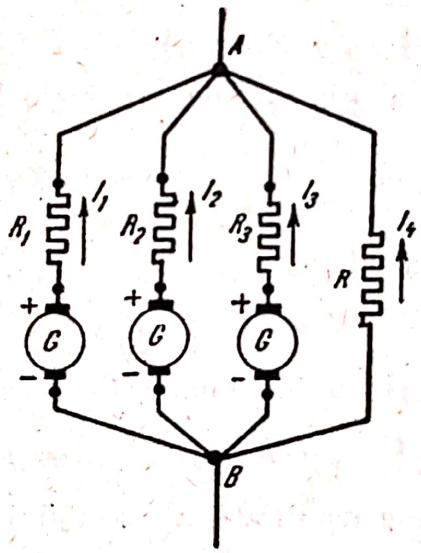


Fig. 3-8. Circuit complex, cu două noduri

Vom lua ca sens pozitiv al f.e.m. și al curenților din ramuri sensul de la nodul B către nodul A și vom nota potențialele nodurilor cu V_A și V_B. Rezultă că tensiunea dintre nodurile A și B este

$$U = V_A - V_B.$$

Aplicînd relația (2-47) fiecărei ramuri a circuitului, obținem

$$I_1 = \frac{V_B - V_A + E_1}{R_1} = \frac{E_1 - U}{R_1} = (E_1 - U) G_1 ,$$
$$I_2 = (E_2 - U) G_2 ,$$
$$I_3 = (E_3 - U) G_3 , \qquad (3\text{-}12)$$
$$I_4 = (0 - U) G_4 = - U G_4 .$$

Conform primei legi a lui Kirchhoff, aplicată nodului A, avem

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

sau, însumînd relaţiile (3-12),

$$(E_1 - U)\,G_1 + (E_2 - U)\,G_2 + (E_3 - U)\,G_3 + (-U\,G_4) = 0.$$

Din relaţia precedentă rezultă valoarea tensiunii între noduri

$$U = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

sau

$$U = \frac{\sum (E \cdot G)}{\sum G}. \qquad (3\text{-}13)$$

Prin urmare, *tensiunea dintre nodurile circuitului complex cu două noduri este egală cu raportul dintre suma algebrică a produselor dintre f.e.m. şi conductanţele ramurilor şi suma acestor conductanţe.*

Cînd f.e.m. este îndreptată de la nodul A către nodul B, valoarea ei apare în relaţia (2-47) cu semnul minus şi produsul EG respectiv apare în relaţia (3-13) negativ. În relaţiile de mai sus, rezistenţa sau conductanţa fiecărui generator este considerată inclusă în rezistenţa sau conductanţa ramurii pe care se găseşte generatorul.

Introducînd în ecuaţiile (3-12) tensiunea U dintre noduri, calculată cu formula (3-13), putem determina uşor curenţii din diferitele ramuri ale circuitului complex cu două noduri.

Exemplul 3-4. Să se calculeze curenţii din ramurile circuitului complex cu două noduri din fig. 3-9, cunoscînd că $E_1 = 232$ V, $E_2 = 230$ V, $r_1 = r_2 = 0{,}2\ \Omega$ şi $R = 2\ \Omega$.

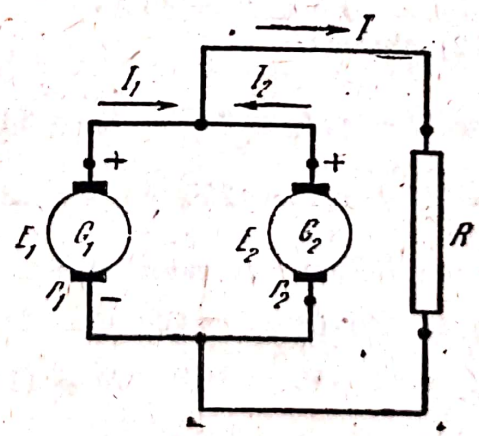


Fig. 3-9. Schemă la exemplul 3-4

Soluţia: Se calculează tensiunea dintre noduri aplicîndu-se relaţia (3-13), cunoscînd că: $g_1 = g_2 = 1/r_1 = 1/0{,}2 = 5$ S şi $G = 1/R = 1/2 = 0{,}5$ S.

$$U = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + G} = \frac{232 \cdot 5 + 230 \cdot 5}{5 + 5 + 0{,}5} = 220 \text{ V}.$$

Curenții din ramurile circuitului sînt dați de relațiile (3-12)

$$I_1 = (E_1 - U)\, g_1 = (232 - 220)\, 5 = 60 \text{ A},$$
$$I_2 = (E_2 - U)\, g_2 = (230 - 220)\, 5 = 50 \text{ A},$$
$$I = (0 - U)\, G = -220 \cdot 0{,}5 = -110 \text{ A}.$$

Vom avea

$$I_1 + I_2 + I = 60 + 50 - 110 = 0,$$

deci sensul curentului I va fi cel din figură.

Metoda tensiunii între noduri poate fi folosită, între altele, pentru determinarea rapidă a condițiilor de funcționare în paralel a generatoarelor dintr-o uzină electrică.

În fig. 3-9 este reprezentat cazul funcționării a două generatoare G_1 și G_2, legate în paralel. Ele debitează simultan pe circuitul de utilizare de rezistență R. Tensiunea U, la bornele comune ale generatoarelor, se menține constantă. Sarcina totală I, absorbită de rețea, este funcție de rezistența R a rețelei. Potrivit relațiilor (3-12), această sarcină se împarte între generatoare potrivit cu f.e.m. respective.

Exemplul 3-5. Reluăm exemplul 3-4, pe care îl tratăm invers. Între bornele comune ale generatoarelor G_1 și G_2, legate în paralel, se menține o tensiune constantă de 220 V. Să se determine f.e.m. ale generatoarelor, pentru ca sarcina totală I a rețelei să se împartă între mașini în raportul 6/5, precum și puterea debitată de fiecare generator. Celelalte date ale problemei rămîn aceleași ca și în exemplul precedent.

Soluția: Sarcina totală I debitată pe rețea este

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220}{2} = 110 \text{ A}.$$

Din condiția $I_1/I_2 = 6/5$, scoatem că $I_1 = 1{,}2\, I_2$, deci $I_1 + I_2 = 1{,}2\, I_2 + I_2 = 110$ A, de unde $I_2 = 50$ A și $I_1 = 60$ A.

Din relațiile (3-12) obținem

$$E_1 = U + r_1 I_1 = 220 + 12 = 232 \text{ V},$$

$$E_2 = U + r_2 I_2 = 220 + 10 = 230 \text{ V}.$$

Puterea debitată de fiecare generator este

$$P_1 = U I_1 = 220 \cdot 60 = 13\,200 \text{ W} = 13{,}20 \text{ kW}.$$
$$P_2 = U I_2 = 220 \cdot 50 = 11\,000 \text{ W} = 11{,}0 \text{ kW}.$$

Puterea furnizată rețelei

$$P = P_1 + P_2 = 13{,}2 + 11{,}0 = 24.2 \text{ kW},$$
$$P = UI = 220 \cdot 110 = 24{,}2 \text{ kW}.$$

Exemplul 3-6. Să se determine pînă la ce valoare trebuie ridicată f.e.m. a primului generator din exemplul precedent, pentru ca al doilea generator să se descarce complet.

Soluția: Cînd generatorul al doilea este complet descărcat, $I_2 = 0$, deci $I_2 = (E_2 - U)\, g_2 = 0$. Prin urmare, este necesar ca $E_2 - U = 0$, adică $E_2 = U$. În acest caz, aplicînd relația (3-13), avem

$$\frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + G} = U = E_2,$$

de unde

$$E_1 = \frac{E_2 (g_1 + G)}{g_1} = \frac{220\,(5 + 0{,}5)}{5} = 242 \text{ V}.$$

3-5. Metoda transformării

Circuitele complexe au uneori porțiuni în care rezistențele sînt legate în triunghi, între trei noduri, așa cum se arată în fig. 3-10 a. În acest caz, calculul circuitului complex poate fi simplificat dacă înlocuim

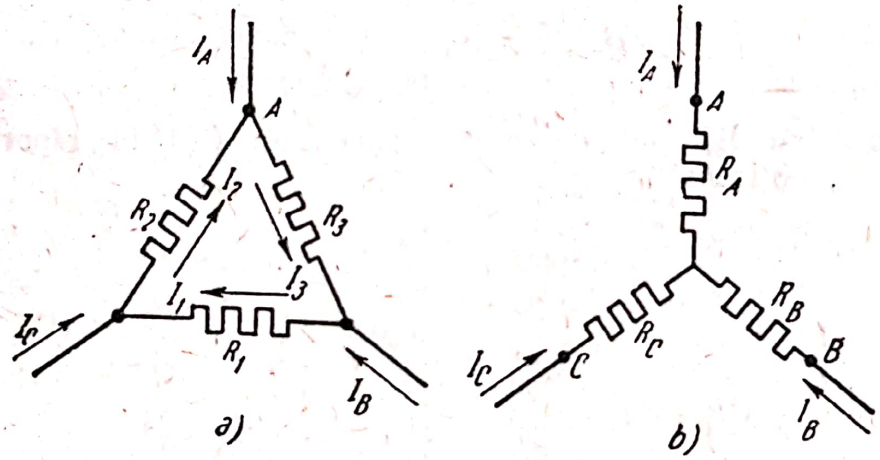


Fig. 3-10. Rezistențe legate: *a*) în triunghiu *b*) în stea

rezistențele legate în *triunghi* prin trei rezistențe echivalente legate în *stea,* avînd un singur nod (fig. 3-10 b). Alteori se obține o simplificare a calculului dacă rezistențele legate în stea ale circuitului complex sînt înlocuite cu rezistențe echivalente legate în triunghi. Această metodă de simplificare a calculului circuitelor complexe poartă numele de *metoda transformării* sau *a transfigurării.*

Să notăm cu R_1, R_2 și R_3 rezistențele celor trei laturi ale triunghiului și cu R_A, R_B și R_C, rezistențele razelor stelei echivalente.

Din fig. 3-10 a se vede că rezistența R_{AB}, a porțiunii de circuit cuprinsă între nodurile A și B, este egală cu rezistența echivalentă a celor două ramuri în paralel dintre aceste noduri, și anume a ramurii AB, de rezistență R_3, și a ramurii BCA, de rezistență $(R_1 + R_2)$. Prin urmare, rezistența R_{AB} este, conform relației (3-8),

$$R_{AB} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \qquad (3\text{-}14)$$

Rezistența dintre vîrfurile A și B ale stelei echivalente (fig. 3-10 b) are ca valoare

$$R_{AB} = R_A + R_B \,. \tag{3-15}$$

Pentru a se satisface condiția de mai sus, de care este legată transformarea, urmează ca rezistența R_{AB} să aibă aceeași valoare, fie că este calculată cu formula (3-14), fie cu formula (3-15). Prin urmare

$$R_A + R_B = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \,. \tag{a}$$

În mod analog, obținem pentru rezistența dintre B și C,

$$R_B + R_C = \frac{R_2 R_1 + R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \,, \tag{b}$$

iar pentru rezistența dintre C și A,

$$R_C + R_A = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \,. \tag{c}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații [(a), (b), (c)] în raport cu R_A, R_B și R_C, obținem

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \,, \\ R_B &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \,, \\ R_C &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \,. \end{aligned} \tag{3-16}$$

Dacă se prezintă cazul transformării unei stele în triunghi, rezistențele necunoscute R_1, R_2 și R_3 ale triunghiului echivalent se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații [(a), (b), (c)] în raport cu aceste necunoscute. Vom avea

$$\begin{aligned} R_1 &= R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A} \,, \\ R_2 &= R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B} \,, \\ R_3 &= R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \,. \end{aligned} \tag{3-17}$$

Exemplu 3-7. Se dă circuitul complex din fig. 3-11 a cu rezistențele din ramuri: $R_1 = 4\,\Omega$; $R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = 5\,\Omega$; $R_4 = 6\,\Omega$; $R_5 = 6\,\Omega$ și $R_6 = 4{,}4\,\Omega$.

Circuitul este alimentat cu o tensiune $U = 60$ V. Se cere valoarea și distribuția curenților în diversele ramuri ale circuitului.

Soluția: Triunghiul de rezistențe *BCD* din fig. 3-11 a se înlocuiește prin steaua echivalentă *BCD* din fig. 3-11 b. Rezistențele razelor stelei sînt

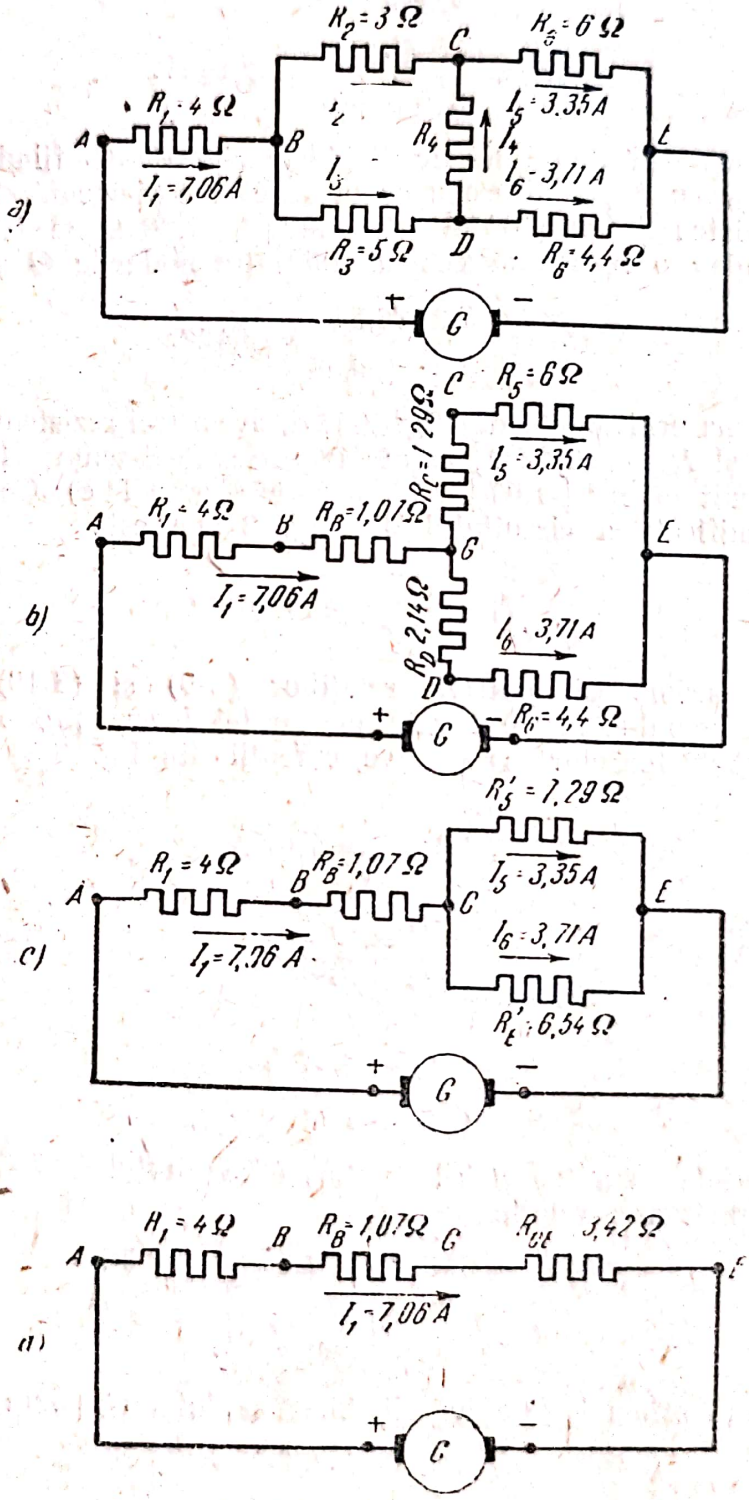


Fig. 3-11. Scheme la exemplul 3-7

$$R_B = \frac{3 \cdot 5}{3+5+6} = 1{,}07\ \Omega\ ,$$

$$R_C = \frac{6 \cdot 3}{3+5+6} = 1{,}29\ \Omega\ ,$$

$$R_D = \frac{6 \cdot 5}{3+5+6} = 2{,}14\ \Omega\ .$$

În schema echivalentă din fig. 3-11 b, rezistența R_C fiind legată în serie cu R_5 și R_D cu R_6, se trece ușor la schema echivalentă din fig. 3-11 c, în care rezistențele în paralel $R'_5 = 1{,}29 + 6 = 7{,}29\ \Omega$ și $R'_6 = 2{,}14 + 4{,}4 = 6{,}54\ \Omega$ dau o rezistență echivalentă între nodurile G și E

$$R_{GE} = \frac{7{,}29 \cdot 6{,}54}{7{,}29 + 6{,}54} = 3{,}42\ \Omega\ .$$

În schema echivalentă din fig. 3-11 d, avem trei rezistențe: $R_1 = 4{,}0\ \Omega$; $R_B = 1{,}07\ \Omega$ și $R_{GE} = 3{,}42\ \Omega$, legate în serie. Rezistența echivalentă a întregului circuit este $4 + 1{,}07 + 3{,}42 = 8{,}49\ \Omega$ (fig. 3-11 e). Curentul în porțiunea neramificată a circuitului din fig. 3-11 a este

$$I_1 = \frac{60}{8{,}49} = 7{,}06\ \text{A}\ .$$

Ținînd seama că, potrivit relațiilor (3-9) și (3-10), curentul se distribuie în conductoarele legate în paralel invers proporțional cu rezistențele conductoarelor respective, curenții din fig. 3-11 c rezultă din relațiile

$$I_5 + I_6 = 7{,}06\ \text{A}$$

și

$$\frac{I_5}{I_6} = \frac{6{,}54}{7{,}29}\ .$$

Se obține

$$I_5 = 3{,}35\ \text{A}\ ,$$

$$I_6 = 3{,}71\ \text{A}\ .$$

Aplicînd legea a 2-a a lui Kirchhoff circuitului $CEDC$ (fig. 3-11 a), se obține următoarea relație

$$6 \cdot I_4 + 6 \cdot 3{,}35 - 4{,}4 \cdot 3{,}71 = 0\ ,$$

de unde

$$I_4 = -\ 0{,}628\ \text{A}\ .$$

Aplicînd prima lege a lui Kirchhoff nodului C, avem

$$I_2 = I_5 - I_4 = 3{,}35 + 0{,}628 = 3{,}978\ \text{A}\ .$$

Procedînd la fel pentru nodul D, avem

$$I_3 = I_6 + I_4 = 3{,}71 - 0{,}628 = 3{,}082\ \text{A}\ .$$

3-6. Metoda suprapunerii

Această metodă poate simplifica calculul rețelelor complexe în care lucrează mai multe surse de energie electrică. Metoda se bazează pe principiul suprapunerii efectelor, care, în circuitele rețelelor, se enunță precum urmează:

Dacă în aceeași rețea suprapunem două regimuri de echilibru, obținem tot un regim de echilibru.

Conform acestui principiu, curentul într-o ramură oarecare a circuitului poate fi considerat ca suma algebrică a curenților produși în acea ramură de fiecare f.e.m. în parte, care ar lucra pe circuit independent de celelalte f.e.m. În consecință, se determină în ramura de circuit respectivă curenții produși de fiecare sursă în parte și se însumează apoi acești curenți parțiali, ținînd seama de semnul lor.

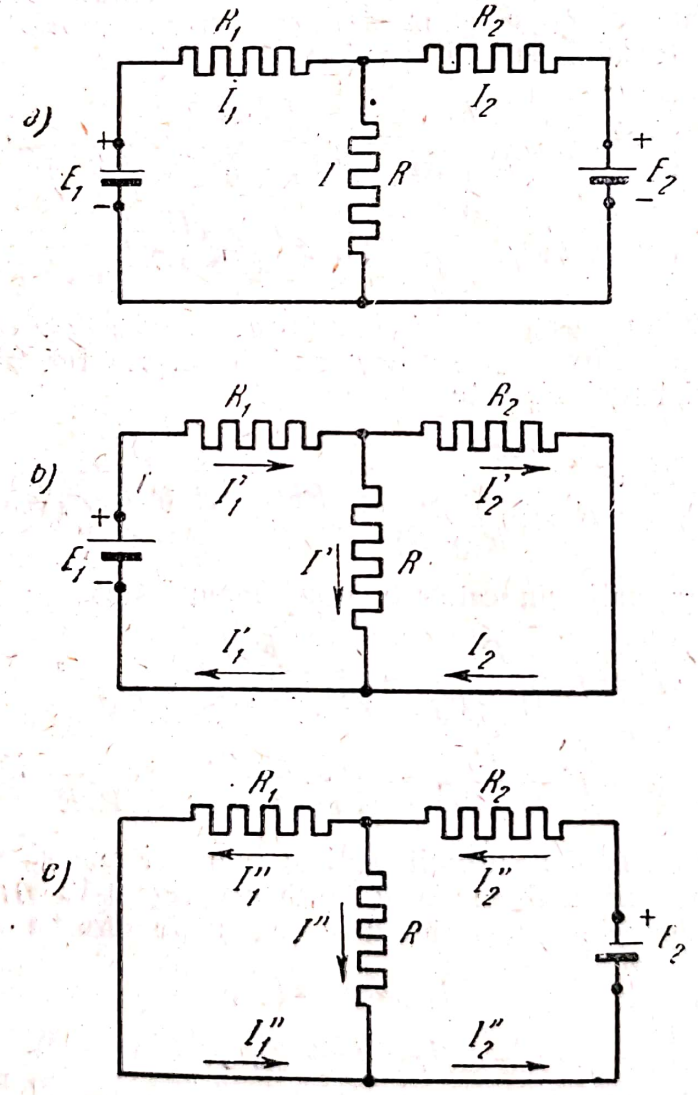


Fig. 3-12. Scheme la metoda suprapunerii

Atunci cînd calculăm curenții parțiali este necesar să luăm în considerație rezistențele interioare ale tuturor surselor din circuit, prin urmare și a acelora considerate ca inactive la determinarea curentului parțial respectiv.

Să aplicăm metoda suprapunerii la circuitul complex din fig. 3-12 a, în care acționează sursele E_1 și E_2 și pe ramurile căruia se găsesc rezistențele R_1, R_2 și R. Pentru simplificare, am presupus că rezistența interioară a sursei E_1 se găsește înglobată în rezistența R_1, iar a sursei E_2, în rezistența R_2.

Vom presupune mai întîi că în circuit acționează numai f.e.m. E_1, adică avem schema reprezentată în fig. 3-12 b. Curentul din ramura rezistenței R_1 este dat, în acest caz, de relația

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2}} = \frac{(R + R_2) E_1}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R}.$$

Potrivit relațiilor (3-9) și (3-10), acest curent se împarte în ramurile rezistențelor R_2 și R invers proporțional cu rezistențele de pe aceste ramuri. Rezultă curenții parțiali

$$I_2' = I_1' \frac{R}{R + R_2} = \frac{R E_1}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R},$$

$$I' = I_1' \frac{R_2}{R + R_2} = \frac{R_2 E_1}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R}.$$

Vom presupune acum că în circuitul complex acționează numai f.e.m. a celei de a doua surse E_2, adică avem schema din fig. 3-12 c. Curentul din ramura rezistenței E_2 este

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R R_1}{R + R_1}} = \frac{(R + R_1) E_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R}.$$

Curenții parțiali din celelalte două ramuri sînt

$$I'' = I_2'' \frac{R_1}{R + R_1} = \frac{R_1 E_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R},$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{R}{R + R_1} = \frac{R E_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R}.$$

Notînd cu I_1, I_2 și I curenții reali în cele trei ramuri, atunci cînd acționează concomitent ambele f.e.m. (schema fig. 3-12 a), avem din suprapunerea componentelor și ținînd seama și de direcția acestora,

$$I_1 = I_1' - I_1'',$$

$$I_2 = I_2'' - I_2',$$

$$I = I' + I''.$$

Exemplul 3-8. Se dă circuitul din fig. 3-13 a în care acționează sursele E_1 și E_2, avînd respectiv, 8 și 6 V și rezistențele interioare $r_1 = 5\ \Omega$ și $r_2 = 4\ \Omega$. Circuitul conține rezistențele $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$ și $R_3 = 10\ \Omega$. Să se determine, prin metoda suprapunerii, curenții în rezistențele R_1, R_2 și R_3.

Soluția: Considerăm mai întîi că în circuit acționează numai f.e.m. E_1, avînd grijă să înlocuim sursa E_2 prin rezistența sa interioară r_2 (fig. 3-13 b). Rezistența echivalentă a circuitului este

$$R = R_1 + r_1 + \frac{R_3(R_2 + r_2)}{R_3 + (R_2 + r_2)} = 13 + \frac{10 \cdot 16}{26} = 19{,}15\ \Omega\ ;$$

de unde

$$I_1' = \frac{8}{19{,}15} = 0{,}416\ \text{A},$$

$$I_3' = 0{,}416 \cdot \frac{16}{26} = 0{,}256\ \text{A},$$

$$I_2' = 0{,}416 \cdot \frac{10}{26} = 0{,}158\ \text{A}.$$

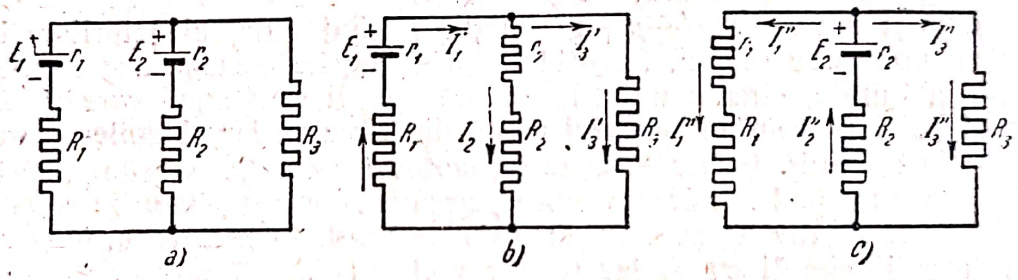


Fig. 3-13. Scheme la exemplul 3-8

Considerăm acum că în circuit acționează numai f.e.m. E_2, înlocuind sursa E_1 prin rezistența sa interioară (fig. 3-13 c). Rezistența echivalentă a circuitului este

$$R = R_2 + r_2 + \frac{R_3 \cdot (R_1 + r_1)}{R_3 + (R_1 + r_1)} = 16 + \frac{10 \cdot 13}{23} = 21{,}66\ \Omega;$$

de unde

$$I_2'' = \frac{6}{21{,}66} = 0{,}277\ \text{A},$$

$$I_3'' = 0{,}277 \cdot \frac{13}{23} = 0{,}156\ \text{A},$$

$$I_1'' = 0{,}277 \cdot \frac{10}{23} = 0{,}121\ \text{A}\ .$$

În consecință vom obține:

— pentru ramura rezistenței R_1

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 0{,}416 - 0.121 = 0{,}295\ \text{A}\ ;$$

— pentru ramura rezistenței R_3

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 0{,}256 + 0{,}156 = 0{,}412\ \text{A}\ ;$$

— pentru ramura rezistenței R_2

$$I_2 = -I_2' + I_2'' = -0{,}158 + 0{,}277 = 0{,}119\ \text{A} \cdot$$

Verificarea

$$I_1 + I_2 = I_3\ ;\ 0{,}295 + 0{,}119 = 0{,}414\ \text{A} \cong 0{,}412\ \text{A} \cdot$$

4-7. Metoda circuitelor independente

Metoda circuitelor independente (circuitelor separate) permite determinarea curenților din circuitele complexe cu un număr mai redus de ecuații decît este necesar prin aplicarea celor două legi ale lui Kirchhoff.

Circuitul complex se consideră ca o suprapunere de circuite simple, separate, fiecare din aceste circuite fiind străbătut de un curent al său propriu. Numărul de circuite simple, în care se descompune rețeaua complexă, este egal cu numărul de ecuații distincte date de legea a 2-a a lui Kirchhoff și anume $n = l - p + 1$ ecuații, l fiind numărul laturilor, iar p numărul nodurilor rețelei. Rezultă că prin laturile comune a două circuite simple, alăturate, circulă doi curenți, pe care îi vom numi *curenți simpli*, unul din ei reprezentînd curentul unuia din circuite, iar al doilea, curentul din celălalt circuit. În aceste condiții, *curenții reali* din laturile rețelei sînt dați de suma sau de diferența dintre curenții simpli din laturile respective, după sensul relativ al acestor din urmă curenți. În cele ce urmează, vom nota curenții simpli cu J, iar pe cei reali cu I.

Aplicînd circuitelor simple a doua lege a lui Kirchhoff, după ce în prealabil am fixat, în mod arbitrar, sensul curenților simpli $J_1, J_2, \ldots, J_n$ din aceste circuite, și grupînd relațiile obținute după curenții simpli, obținem următoarele n ecuații

$$\begin{aligned} &R_{11} J_1 + R_{12} J_2 + \cdots + R_{1n} J_n = \sum E_1\ , \\ &R_{21} J_1 + R_{22} J_2 + \cdots + R_{2n} J_n = \sum E_2\ , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &R_{n1} J_1 + R_{n2} J_2 + \cdots + R_{nn} J_n = \sum E_n\ , \end{aligned} \qquad (3\text{-}18)$$

în care $R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{nn}$ reprezintă suma rezistențelor din circuitele simple 1, 2, ..., n, iar $R_{12} = R_{21}$ ... $R_{1n} = R_{n1}$ reprezintă rezistențele comune ale circuitelor simple 1 și 2, ..., 1 și n. În calculul numeric, aceste rezistențe sînt afectate de semnul pozitiv cînd cei doi curenți simpli trec prin aceeași rezistență în același sens și cu semnul minus, în caz contrar.

$\sum E_1$ este suma algebrică a f.e.m. din circuitul 1, suma fiind scrisă parcurgînd circuitul în sensul curentului J_1. Analog pentru $\sum E_2, \cdots, \sum E_n$.

Sistemul de ecuații (3-18) ne permite să calculăm toți curenții simpli. Dacă prin rezolvarea sistemului găsim pentru unii curenți simpli valori negative, înseamnă că sensurile lor reale sînt inverse sensurilor adoptate arbitrar. Curentul real I, dintr-o latură oarecare a rețelei, este egal cu suma algebrică a curenților J din circuitele din care face parte latura considerată.

Scanned with OKEN Scanner

Prin aplicarea acestei metode, care foloseşte curenţii simpli ca necunoscute auxiliare, reducem numărul ecuaţiilor de rezolvat de la l ecuaţii, în cazul aplicării legilor lui Kirchhoff, la $n = l - p + 1$ ecuaţii. În fig. 3-14 este reprezentat un circuit complex format din trei circuite

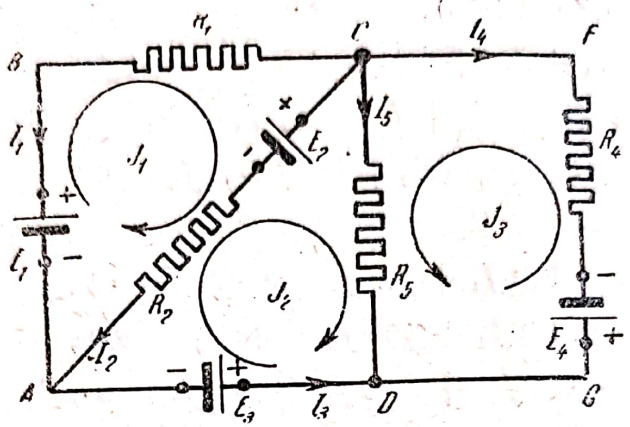


Fig. 3-14. Schemă la metoda circuitelor independente

simple *ABCA*, *ACDA* şi *DCFGD*, parcurse de curenţii J_1, J_2 şi J_3, în sensul indicat în figură. Rezistenţele surselor de curent sînt cuprinse în rezistenţele laturilor respective.

Relaţiile (3-18) devin

$$(R_1 + R_2)\, J_1 - R_2 J_2 = E_1 - E_2\,,$$
$$-R_2 J_1 + (R_2 + R_5)\, J_2 + R_5 J_3 = E_2 - E_3\,,$$
$$R_5 J_2 + (R_4 + R_5)\, J_3 = -E_4\,.$$

Curenţii reali I_1, I_2,..., I_5 sînt daţi de relaţiile

$$I_1 = -J_1;\ I_1 = J_1 - J_2;\ I_3 = -J_2;\ I_3 = -J_3;\ I_5 = J_2 + J_3\,.$$

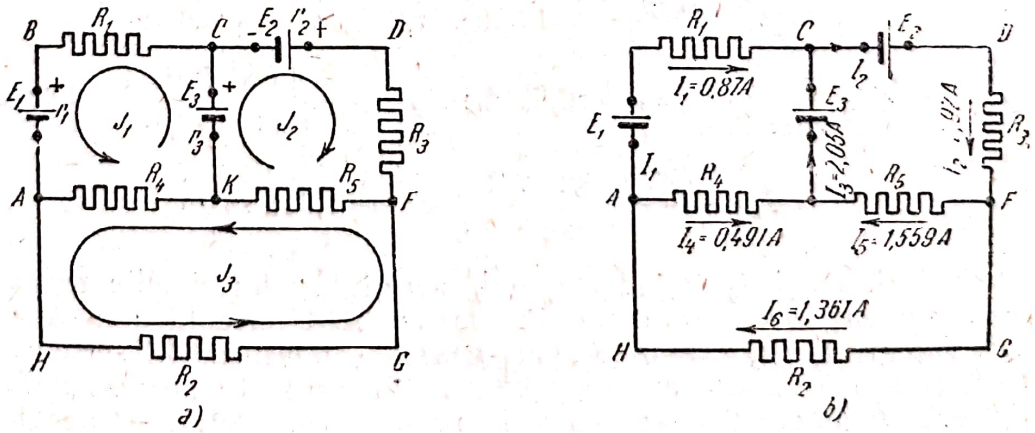


Fig. 3-15. Scheme la exemplul 3-9

Exemplul 3-9. Să se determine distribuţia şi valorile curenţilor din circuitul complex reprezentat în fig. 3-15 a, în care $E_1 = 100$ V, $E_2 = 110$ V, $E_3 = 90$ V, $r_1 = 0{,}8\ \Omega$, $r_2 = 0{,}8\ \Omega$, $r_3 = 1{,}2\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 70\ \Omega$, $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 60\ \Omega$ şi $R_5 = 80\ \Omega$.

Soluția: Descompunem circuitul complex în trei circuite simple *ABCK*, *CDFK* și *AFGH* și dăm ca sens arbitrar curenților simpli J_1, J_2 și J_3 din aceste circuite sensul indicat de săgeți.

Aplicînd relațiile (3-18), obținem

$$(R_1 + r_1 + R_4 + r_3)\, J_1 + r_3 J_2 - R_4 J_3 = -E_1 + E_3\,,$$
$$r_3 J_1 + (r_2 + R_3 + R_5 + r_3)\, J_2 + R_5 J_3 = E_2 + E_3\,,$$
$$-R_4 J_1 + R_5 J_2 + (R_2 + R_4 + R_5)\, J_3 = 0$$

sau, numeric,

$$112\, J_1 + 1{,}2\, J_2 - 60\, J_3 = -10\,,$$
$$1{,}2\, J_1 + 107\, J_2 + 80\, J_0 = 200\,,$$
$$-60\, J_1 + 80\, J_2 + 210\, J_3 = 0\,.$$

Soluția acestui sistem de ecuații liniare este, aplicînd determinanții și ținînd seama că

$$\Delta = \begin{vmatrix} -112 & 1{,}2 & -60 \\ 1{,}2 & 107 & 80 \\ -60 & 80 & 210 \end{vmatrix} = 1\,350\,977{,}6\,,$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 1{,}2 & -60 \\ 200 & 107 & 80 \\ 0 & 80 & 210 \end{vmatrix}}{1\,350\,977{,}6}\,;\quad J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 112 & -10 & -60 \\ 1{,}2 & 200 & 80 \\ -60 & 0 & 210 \end{vmatrix}}{1\,350\,977{,}6}\,;$$

$$J_3 = \frac{\begin{vmatrix} 112 & 1{,}2 & -10 \\ 1{,}2 & 107 & 200 \\ -60 & 80 & 0 \end{vmatrix}}{1\,350\,977{,}6}$$

$$J_1 = -\frac{1\,171\,100}{1\,350\,977{,}6} = -0{,}87\ \text{A}\,;\quad J_2 = \frac{4\,034\,520}{1\,350\,977{,}6} = 2{,}92\ \text{A}$$

$$J_3 = -\frac{1\,842\,760}{1\,350\,977{,}6} = -1{,}361\ \text{A}\,.$$

Curenții J_1 și J_3 ieșind negativi, sensul lor din circuite trebuie inversat. Urmează că curentul I_1 din latura *ABC* circulă dela *A* la *C* și are ca valoare $I_1 = |J_1| = 0{,}87$ A. Curentul I_2, din latura CDF, circulă de la *C* la *F* și are ca valoare $I_2 = 2{,}92$ A. Curentul din latura *FGHA* circulă de la *F* către *A* și are ca valoare $I_6 = |J_3| = 1{,}361$ A. Curentul din latura *AK* este dat de $I_4 = |J_3 - J_1| = 1{,}361 - 0{,}87 - 0{,}491$ A și circulă de la *A* la *K*. Curentul din latura *KF* este dat de $I_5 = |J_2 - J_3| = 2{,}92 - 1{,}361 = 1{,}559$ A și circulă de la *F* la *K*. Curentul din latura *KC* este dat de $I_3 = |J_2 - J_1| = 2{,}92 - 0{,}87 = 2{,}05$ A și circulă de la *K* la *C*.

Distribuția curenților reali este dată în fig. 3-15b.

CAPITOLUL IV

EFECTUL CHIMIC AL CURENTULUI ELECTRIC. FENOMENE TERMOELECTRICE

4-1. Conductivitatea electroliților

Am arătat, în par. 2-1, că soluțiile acizilor, bazelor și sărurilor, care poartă numele de electroliți, sînt bune conducătoare de electricitate, constituind clasa a doua de conductoare electrice. Electroliții se deosebesc de conductoarele din clasa întîia (metalele și cărbunele) prin aceea că trecerea curentului prin ele este însoțită de anumite schimbări chimice, pe care le vom examina în acest capitol. Aceste schimbări, în ansamblul lor, constituie ceea ce numim *efectul chimic* al curentului electric.

Moleculele oricărui electrolit sînt formate din două părți, din care una este un metal în cazul unei sări sau a unei baze, sau hidrogen în cazul unui acid, iar cealaltă parte, constituind restul moleculei, este așa numitul *radical* al electrolitului. Moleculele unui electrolit sînt neutre din punct de vedere electric. Sub acțiunea dizolvantului o parte din moleculele electrolitului se disociază în cele două părți componente, metalul, respectiv hidrogenul, și radicalul. Acesta din urmă desprinzîndu-se din moleculă ia cu sine unul sau mai mulți electroni, deci poartă o sarcină negativă. Metalul sau hidrogenul, rămîne încărcat pozitiv. Aceste părți componente ale moleculei, purtătoare de cantități egale și de sens contrar de electricitate, se numesc *ioni*.

Astfel, sub acțiunea unui dizolvant, de pildă a apei, o moleculă de acid sulfuric H_2SO_4 se descompune în ionii pozitivi $2 \cdot H^+ = (2\,H)^{++}$ și ionii negativi SO_4^{--}, adică vom avea

$$H_2SO_4 \longrightarrow 2 \cdot H^{++} + SO_4^{--} \cdot$$

Procesul de desfacere a moleculelor electrolitului prin dizolvare se numește *disociere electrolitică*, iar raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul total al moleculelor electrolitului, aflate în soluție, se numește *grad de disociere*.

Să legăm un electrolit într-un circuit electric. Pentru aceasta este necesar să introducem în electrolit două plăci metalice, numite *electrozi*,

pe care le legăm la sursa de curent (fig. 4-1). Electrodul legat cu polul pozitiv al sursei se numește *electrod pozitiv* sau *anod*, iar cel legat cu polul negativ, *electrod negativ* sau *catod*.

Sub acțiunea cîmpului electric creat între electrozi, ionii pozitivi se deplasează în sensul cîmpului, spre catod, iar cei negativi, în sens opus

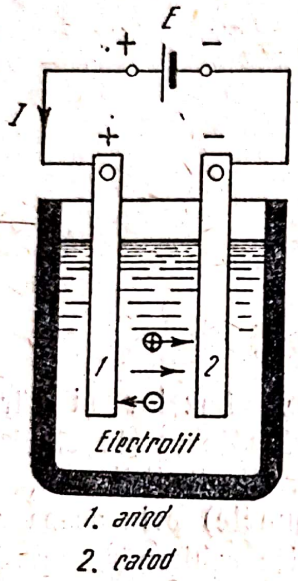


Fig. 4-1. Curentul electric prin electrolit

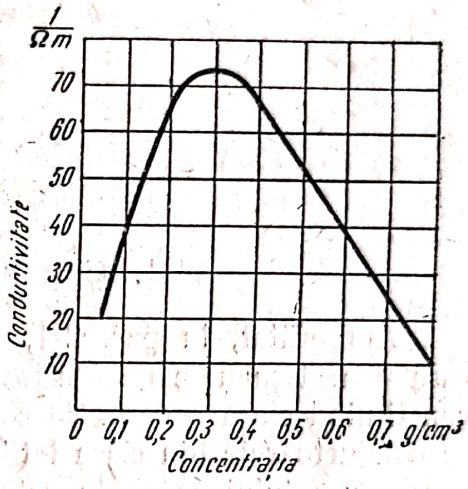


Fig. 4-2. Conductivitatea în funcție de concentrație a soluției de acid sulfuric în apă

cîmpului, spre anod. De aceea, ionii pozitivi se mai numesc și *cationi*, iar cei negativi, *anioni*.

Ajunși la electrozi, ionii sau intră în reacție cu materialul electrozilor, sau se depun pe electrozi; în ambele cazuri, ei cedează electrozilor sarcina lor electrică. Anionii trec anodului electronii pe care îi dețin, devenind astfel atomi neutri. Electronii eliberați se deplasează mai departe prin conductoarele metalice și sursa de curent. Cationii pozitivi, ajunși la catod, își completează numărul de electroni lipsă cu cei veniți de la sursă prin conductoare, devenind astfel și ei atomi neutri.

În consecință, trecerea curentului prin electrolit se face printr-o dublă deplasare de atomi, unii spre catod purtînd sarcini pozitive, alții spre anod purtînd sarcini negative.

Curentul din electrolit este dat de legea lui Ohm

$$I = \frac{U}{R},$$

în care U este tensiunea aplicată electrozilor, iar R, rezistența stratului de electrolit cuprins între electrozi dată de relația

$$R = \frac{l}{\gamma S}.$$

Conductivitatea γ a electrolitului depinde de numărul ionilor cuprinși într-un cm³ de electrolit, care depinde, la rîndul lui, de gradul de concentrație al electrolitului.

Disocierea electrolitului sub acțiunea dizolvantului este cu atît mai accentuată, cu cît concentrația lui este mai mică. Prin urmare, cu cît electrolitul este mai diluat, cu atît o parte relativ mai mare a moleculelor din electrolit se disociază în ioni. Odată cu reducerea concentrației scade însă numărul de molecule aflate într-un cm³ de electrolit. În consecință, conductivitatea electrolitului crește la început cu concentrația soluției, pînă la un anumit grad de concentrație, cînd γ atinge valoarea sa maximă, pentru a scădea apoi cu concentrația. În fig. 4-2 este reprezentată curba de variație cu concentrația a conductivității γ a soluției de acid sulfuric în apă.

Gradul de disociere al electroliților crește brusc cu temperatura și, odată cu el, conductivitatea electrolitului. Prin urmare, electroliții au un coeficient de tempraetură negativ, care pentru majoritatea lor este de circa — 0,02.

În tabela 4-1 dăm rezistivitățile $\left(\rho = \frac{1}{\gamma}\right)$ în Ω cm²/cm, la 10° C, a unor electroliți de diverse concentrații.

Tabela 4-1

Valorile rezistivității ρ în Ω cm²/cm, la 10°C, a unor electroliți la diverse grade de concentrație

Concentrația soluției în procente de greutate, %	Sulfat de cupru	Sulfat de zinc	Carbonat de sodiu	Clorură de sodiu	Clorură de amoniu	Acid sulfuric	Acid azotic	Acid clorhidric	Hidrat de potasiu
5	42,9	52,2	22,2	14,9	10, 9	4,79	3,88	2,52	5,81
10	31,3	31,2	14,3	8,26	5,64	2,55	2,17	1,50	3,18
15	23,8	24,1	12,0	6,1	3,87	1,84	1,63	1,34	2,35
20	—	21,3	—	5,1	2,98	1,53	1,41	1,31	2,00
25	—	20,3	—	4,67	2,48	1,40	1,30	1,36	1,85
30	—	22,7	—	—	—	1,35	1,27	1,50	1,85
35	—	—	—	—	—	1,38	1,30	1,69	1,37
40	—	—	—	—	—	1,47	1,36	1,34	2,24
50	—	—	—	—	—	1,85	1,59	—	—
60	—	—	—	—	—	2,68	1,95	—	—
70	—	—	—	—	—	4,63	2,55	—	—
80	—	—	—	—	—	9,01	3,75	—	—
ρ minim	—	20,2	—	—	—	1,35	1,27	1,30	1,81
la concentrația	—	23,5%	—	—	—	30,5%	30%	18%	28%

Exemplu 4-1. Să se calculeze rezistența unei soluții de acid sulfuric dintr-o baie electrolitică, avînd o concentrație de 20%, cu o distanță între electrozi de 25 cm și o suprafață de trecere a curentului între electrod și electrolit de 2 cm².

Soluția: Din tabela 4-1, rezultă pentru concentrația de 20% a acidului sulfuric, $\varrho = 1{,}53\ \Omega\ \text{cm}^2/\text{cm}$. Deci, aplicînd relația $R = \frac{l}{\gamma S} = \varrho \frac{l}{S}$, avem

$$R = 1{,}53 \frac{25}{2} = 19{,}1\ \Omega.$$

4-2. Fenomenul electrolizei

Am văzut că, odată cu trecerea curentului prin electrolit, metalul (respectiv hidrogenul) este antrenat în sensul curentului și depus pe catod, iar radicalul este antrenat în sens invers curentului și depus pe anod. Fenomenul acesta, al descompunerii electroliților cu ajutorul curentului electric, se numește *electroliză*.

Să examinăm cazul cel mai simplu și cel mai general, acela în care corpul dizolvant este o sare, de pildă sulfatul de cupru, a cărui formulă chimică este $CuSO_4$. Conform regulii enunțate, odată cu trecerea curentului cuprul se depune pe catod, iar radicalul SO_4 apare pe anod. Acest radical nu poate exista în stare liberă și, după cazuri, suferă diverse transformări. Dacă metalul din care este făcut anodul este un metal inalterabil, spre exemplu platină, radicalul SO_4, neputîndu-se combina cu acest metal, atacă apa, pe care o descompune, și dă acid sulfuric, cu degajare de oxigen, după formula

$$SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + O.$$

La catod se obține cupru curat, la anod degajare de oxigen, iar în lichid acid sulfuric.

În cazul examinat apar, după cum vedem, și alte produse decît cele care trebuie să rezulte direct din electroliză. În asemenea cazuri, se spune că intervin *reacții secundare*.

Dacă în loc de platină anodul se face din cupru, la catod se obține, la fel ca mai sus, cupru în stare pură. Radicalul SO_4, care se depune la anod, atacă anodul, refăcînd sulfatul de cupru care se disolvă în lichid. Se realizează, în felul acesta, un transfer continuu de cupru de la anod la catod. Această metodă se întrebuințează, în practica industrială, pentru a se obține un cupru pur (cupru rafinat) dintr-un cupru cu impurități.

Fenomenul electrolizei are la bază următoarele două legi cantitative, descoperite de *Faraday:*

Prima lege: *Cantitatea de substanță, depusă pe electrod într-un interval de timp dat, este proporțională cu cantitatea de electricitate care traversează electrolitul în acel interval de timp.*

Această lege poate fi exprimată prin următoarea relație

$$G = c\,Q = c\,I\,t \quad , \tag{4-1}$$

în care G este cantitatea de substanță în mg;

c — echivalentul electrochimic al substanței respective;

t — timpul cît circulă curentul, în secunde.

Echivalentul electrochimic al unui corp simplu este greutatea acelui corp depusă pe electrod de o cantitate de electricitate egală cu un coulomb. El se dă în mg pe coulomb sau în grame pe amperoră.

Se mai constată, în fenomenul electrolizei, că cantitatea de electricitate necesară pentru a pune în libertate o cantitate de materie dintr-un corp, egală în greutate cu echivalentul chimic al acelui corp (echivalentul gram), este aceeași pentru toate corpurile și anume $F = 96\ 494$ coulombi. Valoarea F poartă numele de *constanta lui Faraday*.

A doua lege: *Echivalenții electrochimici c ai elementelor sînt proporționali cu echivalenții chimici ai acestora, coeficientul de proporționalitate fiind egal cu 1/F.*

Prin urmare, legea a doua poate fi exprimată prin următoarea relație

$$c = \frac{1}{F} M \cdot 10^3 \text{ mg/C}, \qquad (4\text{-}2)$$

în care M reprezintă echivalentul gram al substanței depuse.

În tabela 4-2 sînt date valorile echivalenților electrochimici și chimici pentru o serie de elemente care pot fi obținute prin electroliză.

Tabela 4-2

Echivalenții electrochimici și chimici ai unor corpuri simple

Corpul simplu	Echivalentul electrochimic c (mg/coulomb)	Echivalentul chimic M (g/96 494 couolmb)
Aluminiu	0,0938	8,99
Argint	1,1183	107,88
Aur	0,6827	65,70
Cadmiu	0,5814	56,20
Clor	0,3695	35,50
Cupru	0,3294	31,78
Fier	0,1931	18,61
Hidrogen	0,01045	1,008
Magneziu	0,1260	12,16
Mercur	1,0393	100,30
Nichel	0,3041	29,34
Oxigen	0,0829	8,00
Platină	0,5078	48,80
Plumb	1,0744	103,60
Potasiu	0,4084	39,10
Sodiu	0,2384	23,00
Zinc	0,3387	32,685

4-3. Aplicațiile industriale ale electrolizei

a) ELECTROMETALURGIA

Dintre aplicațiile electrolizei în metalurgie, cele mai importante sînt *rafinarea metodelor* și obținerea metalelor ușoare prin procedeul numit *electroliza sărurilor topite*.

1) **Rafinarea metalelor.** Am arătat în par. precedent cum se poate produce cupru rafinat cu ajutorul electrolizei.

Cuprul obținut prin topirea minereurilor este un cupru impur, care conține între altele, CuS și Cu_2S. Din acest cupru se confecționează anodele instalației de rafinare prin electroliză și, pentru acest motiv, i se dă și denumirea de cupru anodic. Cuprul pur depus pe catod poartă numele de *cupru catodic* sau *cupru electrolitic*. Ca electrolit se întrebuințează o soluție de acid sulfuric.

Metoda aceasta se aplică și altor metale utilizîndu-se ca electrolit o sare a metalului respectiv, iar ca anod metalul impur, care urmează să fie rafinat. Astfel, pentru rafinarea aurului se utilizează ca electrolit o soluție diluată de clorură aurică ($AuCl_3$) în acid clorhidric, pentru rafinarea argintului, o soluție de azotat de argint ($AgNO_3$) etc. Metalele rafinate pe această cale ating o puritate de 99,98%—99,99%.

2) **Electroliza sărurilor topite.** Este o operație electrometalurgică care constă din producerea unui metal prin descompunerea, pe cale de electroză, a unei sări a acelui metal. Acest procedeu se aplică mai ales în metalurgia metalelor ușoare (aluminiu, magneziu, sodiu etc.).

Aluminiul, un metal foarte mult întrebuințat în tehnica modernă, este obținut în întregime prin electroliza sărurilor sale. Ca electrolit se întrebuințează florura dublă de aluminiu și sodiu topită, iar ca electrozi, plăci de cărbune. Sarea rămîne topită prin căldură ridicată (950—980°C) care se degajează prin trecerea curentului.

O baie pentru electroliza industrială a aluminiului necesită curenți de 30—55 mii A și consumul de energie electrică se ridică la 18—20 mii kWh pe tona de aluminiu. De aceea, uzinele pentru producerea aluminiului sînt așezate, de obicei, în apropierea centralelor hidroelectrice, care produc energie electrică ieftină.

b) FABRICAREA UNOR PRODUSE CHIMICE

Cu ajutorul electrolizei se obține industrial, prin oxidare: oxigen, țelege operația reproducerii unor obiecte prin depunerea, pe cale electrolitică se obține: hidrogen, sulfiți, nitriți, cetone etc., iar prin electroliza clorurilor alcaline se obține, după caz, clor, sodă, natriu, hipercloraţi și cloraţi.

c) GALVANOSTEGIA

Prin galvanostegie se înțelege depunerea unui strat metalic aderent, protector, pe un alt metal. Obiectul care urmează să fie acoperit cu metal este cufundat într-o soluție a sării metalului cu care vrem să-l acoperim și este legat cu polul negativ al unei surse, formînd astfel catodul băii galvanice. Anodul băii, legat cu polul pozitiv al sursei, este constituit dintr-o placă a aceluiași metal.

Dacă se urmărește nichelarea unui obiect, se utilizează ca electrolit o soluție de sulfat dublu de nichel și de amoniu. Pentru argintarea unui obiect se utilizțează o cianură dublă de argint și de potasiu, iar pentru aurire, o soluție de cianură de potasiu și de clorură de aur.

O formă diferită a galvanostegiei este *galvanoplastia*, descoperită de academicianul rus *B. S. Iacobi*, în 1838. Prin galvanoplastie se înțelege operația reproducerii unor obiecte prin depunerea, pe cale elec-

trolitică, de cupru, aur, nichel etc. pe o formă executată, după obiectul respectiv, dintr-un material plastic corespunzător (ipsos, ceară, gutapercă, parafină etc.). Forma se acoperă cu un strat subțire de plombagină, pentru a o face bună conducătoare și formează catodul băii electrolitice.

Exemplul 4-3. O piesă avînd o suprafață de 40 dm², a fost nichelată, în două ore, într-o baie electrolitică, cu un curent de 15 A. Se cere grosimea stratului de nichel depus, cunoscînd că greutatea specifică a nichelului este 8,5 g/cm³.

Soluția: Se aplică relația (4-1), ținînd seama că valoarea echivalentului electrochimic c al nichelului este, conform tabelei 4-2, $c = 0{,}3041$ mg/coulomb.

$$G = c\,I\,t = 0{,}3041 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 3600 = 32\,843 \text{ mg} = 32{,}843 \text{ g}.$$

Volumul nichelului depus este

$$V = \frac{32\,843}{8{,}5} = 3{,}86 \text{ cm}^3,$$

iar grosimea metalului depus,

$$\frac{3\,860}{400\,000} = 0{,}01 \text{ mm}.$$

Exemplul 4-3. Ce curent trebuie să debiteze generatorul unui atelier de nichelaj, pentru a depune două kg de nichel pe ziua de 8 ore de lucru.

Soluția: Din relația (4-1) deducem numărul de coulombi necesari

$$Q = I\,t = \frac{G}{c} = \frac{2 \cdot 10^6}{0{,}3041} = 6{,}58 \cdot 10^6 \text{ C}$$

$$t = 8 \cdot 3600 = 28\,800 \text{ s}.$$

Rezultă

$$I = \frac{6{,}58 \cdot 10^6}{28{,}8 \cdot 10^3} = 229 \text{ A}.$$

4-4. Pile electrice

Dacă se introduc într-un electrolit doi electrozi constituiți din metale diferite sau dintr-un metal și dintr-un cărbune, se constată că între ei apare o diferență de potențial electric, care poate fi utilizată în vederea alimentării unui circuit cu curent electric. Se realizează astfel sursa de curent numită *pilă electrică* sau *element galvanic primar*.

Cea mai simplă pilă este *pila Volta* (fig. 4-3), la care unul din electrozi este o placă de cupru, care constituie polul pozitiv al sursei *(anodul)*, iar celălalt electrod este o placă de zinc, care constituie polul negativ *(catodul)*, potențialul zincului, în prezența electrolitului, fiind mai scăzut decît al cuprului.

Electrozii sînt cufundați într-o soluție apoasă de acid sulfuric, deci pila Volta se poate reprezenta prin lanțul

$$\underset{\text{catod}}{\text{Zn}} \,|\, \text{H}_2\text{SO}_4 \,|\, \underset{\text{anod}}{\text{Cu}}$$

Dacă se leagă cuprul şi zincul la extremităţile unui circuit exterior de rezistenţă R, acesta va fi parcurs de un curent în sensul de la cupru spre zinc, iar pila va fi traversată de curent în sensul de la zinc la cupru.

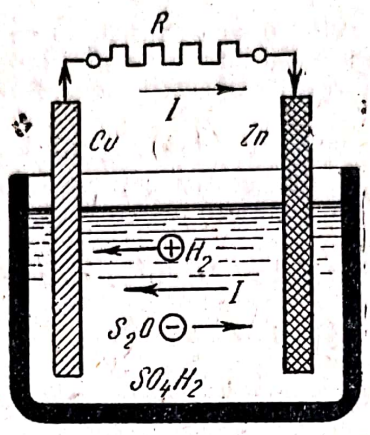


Fig. 4-3. Pila Volta

În timp ce pila debitează curent, se constată că zincul de dizolvă, încetul cu încetul, în apa acidulată; el este atacat de acid şi se transformă în sulfat de zinc, după relaţia

$$H_2SO_4 + Zn = ZnSO_4 + 2H$$

sau

$$Zn + 2H^{+} \rightarrow Zn^{++} + H_2 .$$

Energia chimică a ansamblului zinc-acid sulfuric se transformă în energie electrică, la fel cum energia chimică a ansamblului cărbune-oxigen, în fenomenul combustiunii cărbunelui, se transformă în energie termică. Deci *pila transformă o energie chimică în energie electrică.*

Ca orice sursă de curent, pila are o f.e.m. Apariţia acestei f.e.m. se explică precum urmează:

Placa de zinc, cufundată în soluţia apoasă a acidului sulfuric, fiind atacată de radicalul SO_4^{--}, începe să se dizolve şi atomii zincului trec în soluţie, sub forma sulfatului de zinc $ZnSO_4$, nu ca atomi neutri, ci sub forma de ioni pozitivi Zn^{++}. În consecinţă, electrolitul din jurul plăcii de zinc se va încărca pozitiv, iar electrodul de zinc negativ, şi la suprafaţa de separaţie dintre zinc şi soluţia H_2SO_4 apare o diferenţă de potenţial, deci un cîmp electric îndreptat dela lichid către metal. Dacă circuitul pilei este deschis, acest cîmp se opune ieşirii altor ioni pozitivi din zinc şi intrării lor în soluţie. Cînd diferenţa de potenţial dintre soluţie şi metal atinge o valoare bine determinată şi caracteristică acelui metal, care în cazul zincului pur este de $+0{,}51$ V, forţele electrice echilibrează pe cele chimice şi dizolvarea zincului încetează.

Prin faptul că în soluţie se găseşte şi placa de cupru, această placă se încarcă pozitiv datorită ionilor pozitivi $2H_2$, proveniţi din disocierea electrolitului, care se depun pe placă. La suprafaţa de separaţie dintre cupru şi soluţie apare o diferenţă de potenţial de $+0{,}6$ V, caracteristică cuprului. Ţinînd seama că diferenţa de potenţial dintre metal şi soluţie, în cazul zincului, este de $-0{,}51$ V, rezultă că f.e.m. E a pilei

Volta, care numeric este egală cu diferența de potențial dintre electrozi, este

$$E = 0{,}6 - (-0{,}51) = 1{,}11 \text{ V} .$$

Dacă se trece prin pila Volta un curent de sens contrar, produs de o sursă exterioară, electrodul de cupru se va dizolva, iar pe zinc se va degaja hidrogen. Deci într-o asemenea pilă, funcționînd ca receptor, reacția chimică produsă nu este inversă aceleia care are loc cînd pila funcționează ca sursă de energie. O asemenea pilă se numește *pilă ireversibilă.*

Ca orice sursă de curent, pila Volta are o rezistență interioară r. Prin trecerea curentului, în pilă se produce o cădere de tensiune rI. Deci pila în sarcină are o tensiune la borne U inferioară forței sale electromotoare E.

Valoarea curentului debitat de pilă rezultă din legea lui Ohm

$$I = \frac{E}{r + R} , \qquad (4\text{-}3)$$

în care R reprezintă rezistența circuitului exterior.

Dacă lăsăm o asemenea pilă să debiteze energie cîtva timp, se constată o reducere treptată a intensității curentului, provocată, în parte, de micșorarea forței sale electromotoare, în parte, de creșterea rezistenței interioare. Slăbirea curentului, consecință a slăbirii forței electromotoare, este provocată de fenomenul numit *polarizare,* care se explică în modul următor.

Hidrogenul depus pe placa de cupru constituie, împreună cu placa de zinc, în prezența electrolitului, un alt element de pilă, o pilă secundară, în care hidrogenul este pol negativ și zincul pol pozitiv. Această pilă secundară dă naștere unei f.e.m. inversă aceleia a elementului principal cupru-zinc, deci față de acest element, unei forțe *contraelectromotoare,* care se scade din f.e.m. a pilei principale.

Înafară de aceasta, hidrogenul formează o pătură gazoasă, aderentă, pe placa de cupru a polului pozitiv, mărind astfel rezistența interioară a pilei. Dacă se notează cu E f.e.m. a pilei înainte de polarizare, cu E' f.e.m. inversă, datorită polarizării, cu R rezistența exterioară, cu r rezistența interioară înainte de polarizare și cu r' rezistența interioară după polarizare, valoarea curentului, dată de relația (4-3), devine după polarizare

$$I = \frac{E - E'}{r' + R} . \qquad (4\text{-}4)$$

Pentru a se evita polarizarea, care face pila lui Volta inutilizabilă pentru aplicații practice, se folosesc pile cu *doi electroliți* și pile cu *depolarizant,* în care electrodul care se polarizează este înconjurat cu un material care se combină chimic cu produsele care cauzează polarizarea și astfel o împiedică. Se utilizează ca depolarizanți bioxidul de mangan, sulfatul de cupru, acidul azotic etc. Depolarizantul poate fi lichid sau solid. Cele mai răspîndite pile nepolarizate sînt pila *Daniell* și pila *Leclanché.*

a) **Pila Daniell.** Este o pilă cu doi electroliți, dispunînd de un electrod de cupru cufundat într-o soluție de $CuSO_4$ (care constituie depo-

larizantul) și de un electrod de zinc, cufundat într-o soluție de $ZnSO_4$. O asemenea pilă este reprezentată prin lanțul

$$\underset{\text{catod}}{Zn}\,|\,Zn\,So_4\,|\,Cu\,So_4\,|\,\underset{\text{anod}}{Cu}\ .$$

Cele două soluții sînt complet separate printr-un perete poros, evitîndu-se astfel amestecul electroliților respectivi (fig. 4-4). În timpul funcțio-

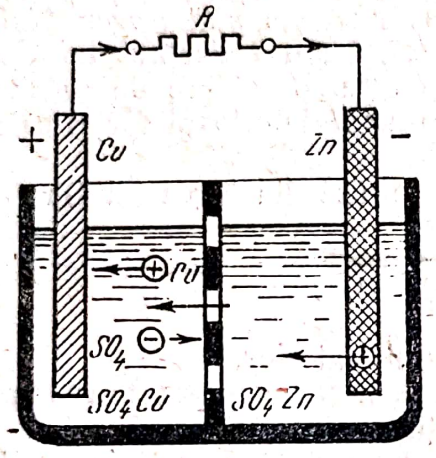


Fig. 4-4. Pila Daniell

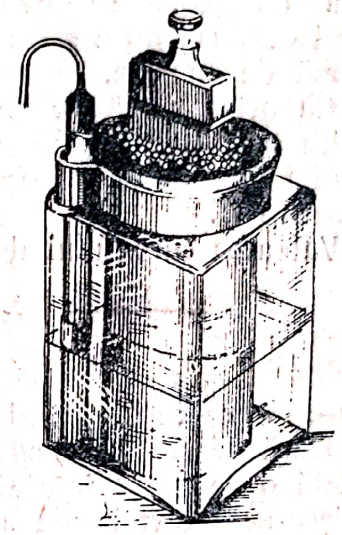


Fig. 4-5. Pila Leclanché

nării pilei, curentul care trece prin sulfatul de cupru antrenează cuprul disociat Cu^{++}, care se depune pe anod, iar radicalul SO_4^{--}, traversînd peretele poros, se combină cu zincul, care constituie catodul, pe care îl consumă. Soluția de sulfat de cupru se diluiază, iar cea de sulfat de zinc se concentrează.

Reacția chimică a pilei este

$$Zn + Cu\,So_4 = SO_4 + Cu\ .$$

Dacă pila Daniell este străbătută de un curent, furnizat din exterior, în sens contrar curentului său propriu, cuprul depus pe catod reintră în soluția de sulfat de cupru, iar ionii de zinc din soluția de sulfat de zinc se depun pe anodul de zinc, restabilindu-se exact starea inițială. O asemenea pilă se numește *pilă reversibilă*.

F.e.m. a pilei Daniell este de 1,1 V, iar rezistența interioară de 6-8Ω. Elementul Daniell este întrebuințat în telegrafie.

b) **Pila Leclanché.** Această pilă are anodul constituit dintr-o prismă de cărbune, fixată într-un vas poros, care conține un depolarizant format dintr-un amestec de bioxid de mangan MnO_2 și cărbune de retortă în grăunțe, iar catodul dintr-o placă sau vergea de zinc. Electrolitul este format dintr-o soluție de clorură de amoniu ($ClNH_4$), cu o concentrație de 20%, conținută într-un vas de sticlă. În vas se găsesc, cufundați în electrolit, electrodul de zinc și vasul poros conținînd electrodul de cărbune și depolarizantul (fig. 4-5). Rolul cărbunelui în grăunțe, amestecat cu polarizantul, este de a micșora rezistența interioară a elementului.

Pila este formată din lanțul

$$\underset{\text{catod}}{Zn}\,|\,NH_4Cl\,|\,\underset{\text{anod}}{MnO_2 + C}$$

Reacția chimică, destul de complicată, a acestei pile se poate rezuma în următoarea expresie

$$Zn + 2ClNH_4 + 2MnO_2 = Cl_2Zn + 2NH_3 + Mn_2O_3 + H_2O \cdot$$

Fiecare amperoră debitată de pilă necesită circa 2 g de clorură de amoniu și 1,5 g zinc.

Pila Leclanché are o f.e.m. de 1,48 V. Rezistența sa interioară, din cauza vasului poros, este relativ mare, variind, în măsura descărcării elementului, între 3-10 Ω. În schimb este o pilă robustă, cu o durată de funcționare foarte lungă, convenind în special aparatelor de consumație intermitentă, precum sînt soneriile, telefoanele etc.

Pentru a se reduce rezistența ridicată a pilei Leclanché, se înlocuiește uneori vasul poros printr-o pînză de sac sau se aglomerează depolarizantul dîndu-i-se o formă solidă, pentru a nu mai fi nevoie de vas poros. În modul acesta, rezistența interioară se reduce la 0,2-1 Ω.

c) *Pile uscate*. Pentru telefoane, telegraf, aparatele de radio, lămpile de buzunar și, în general, orice instalație mobilă, se construiesc pile Leclanché uscate, în care electrolitul este conținut într-o materie absorbantă (rumeguș de lemn, asbest, gips, amidon, celuloză etc.). Vasul pilei este în general din zinc și ține loc de catod, iar anodul este constituit dintr-un cărbune de retortă. Depolarizantul, format din bioxid de mangan, este conținut într-un săculeț care înconjoară electrodul de cărbune.

F.e.m. a pilei uscate este de 1,5 V, iar rezistența interioară variază, pe măsura descărcării elementului, între 0,3 și 5 Ω.

Curentul maxim admisibil al unei pile se numește *curentul nominal*, iar cantitatea de electricitate pe care o poate da un element de pilă, pînă la completa sa descărcare, se numește *capacitatea* elementului.

Pilele umede sînt mai economice decît cele uscate, ele putînd fi regenerate prin înlocuirea electrozilor consumați și restabilirea gradului de concentrație a electroliților.

4-5. Elementele normale

Elementele normale sau *pilele etalon* servesc în tehnica măsurătorilor electrice (vezi par. 15-12). Construcția unui asemenea element (elementul internațional *Weston*) este reprezentată în fig. 4-6.

Elementul constă dintr-un vas de sticlă, de dimensiuni relativ mici, în formă de H. În capetele de jos ale brațelor vasului este sudată cîte o sîrmă de platină. Polul pozitiv este format din mercur, deasupra căruia se găsește o pastă depolarizantă de sulfat de mercur (Hg_2SO_4) solid și cristale mici de sulfat de cadmiu ($CdSO_4 + 8/3\ H_2O$). Polul negativ este format din amalgam de cadmiu, deasupra căruia se așază cristale

mici de sulfat de cadmiu. Electrolitul constă dintr-o soluție de sulfat de cadmiu, a cărei saturație este asigurată de prezența, deasupra electrozilor, a cristalelor de sulfat de cadmiu. Cristalele acestea au proprietatea

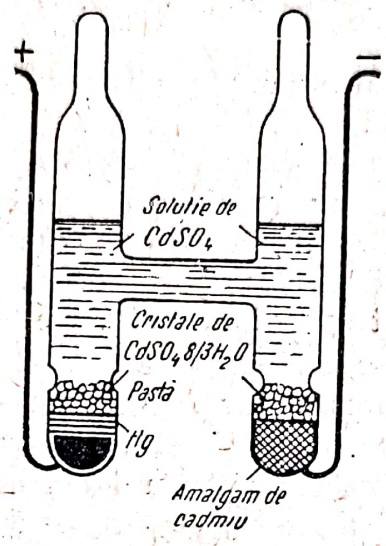


Fig. 4-6. Elementul etalon cu cadmiu

de a se lipi ușor, formînd o coajă care oprește mercurul, pasta și amalgamul să se deplaseze la înclinări și întoarceri ale vasului. La aceasta ajută și cele două strangulări ale vasului, de deasupra electrozilor.

Vasul este închis etanș și introdus într-o cutie metalică sau de bachelită, cu borne bine izolate, de care sînt legate firele de la electrozi.

Rezistența interioară a unui asemenea element este cuprinsă între 500 și 1000 Ω. Elementul Weston are o f.e.m. de aproximativ 1,0186 V, care se păstrează timp îndelungat. Pentru a asigura elementului păstrarea constantă a f.e.m., el nu trebuie solicitat cu un curent mai mare de 1 microamper, iar, în timpul măsurătorilor, acest curent poate fi cel mult de ordinul 10^{-9} A.

Coeficientul de temperatură al elementului normal este de cca. $4 \cdot 10^{-5}/^0C$, deci este practic neglijabil. În măsurătorile de mare precizie se ține totuși seama de acest coeficient, f.e.m. a elementului scăzînd cu cca. 40 microvolți pentru fiecare grad de ridicare a temperaturii.

4-6. Acumulatoarele

Acumulatoarele sînt elemente galvanice reversibile, în care energia are două sensuri de trecere: un sens de încărcare și altul de descărcare. Asemenea elemente se mai numesc și *elemente galvanice secundare*.

La încărcarea unui acumulator, energia electrică, furnizată de un generator, se transformă în energie chimică, iar la descărcare, energia chimică se transformă în energie electrică.

Cele mai răspîndite sînt *acumulatoarele acide* sau *cu plumb* și *acumulatoarele bazice* sau *cu feronichel*.

A. Acumulatoare cu plumb

Un acumulator cu plumb constă din două plăci de plumb, care formează electrozii elementului, cufundate într-o soluție apoasă de acid sulfuric, chimic pur, cu o densitate de 1,23-1,24, care formează electrolitul. Sub acțiunea acidului sulfuric, plăcile se acoperă cu un strat cenușiu de sulfat de plumb ($PbSO_4$).

Dacă facem să treacă prin electrolit un curent produs de o sursă exterioară (fig. 4-7), radicalul SO_4 al electrolitului se depune pe placa

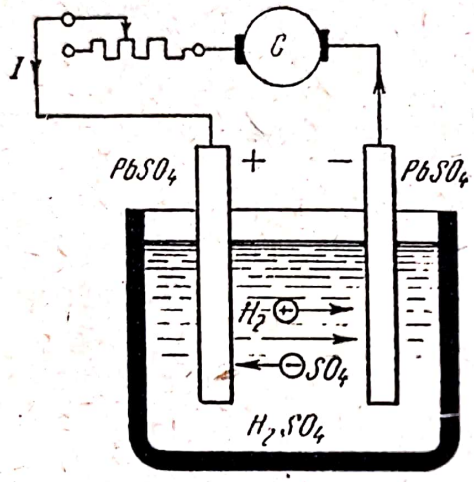


Fig. 4-7. Incărcarea acumulatorului acid

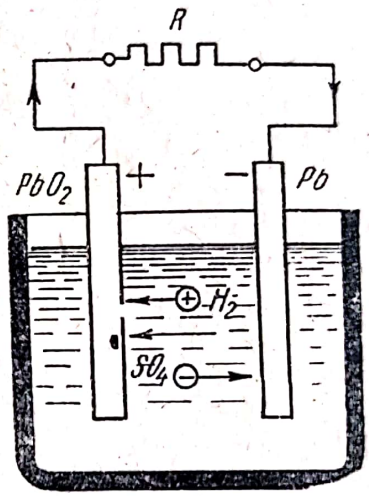


Fig. 4-8. Descărcarea acumulatorului acid

legată cu polul pozitiv, iar hidrogenul, pe placa legată cu polul negativ. Sub influența energiei primită de la sursă, se produce o modificare chimică a suprafeței plăcilor de plumb. Dacă suprimăm sursa și o înlocuim cu un circuit de utilizare (fig. 4-8), constatăm că circuitul este parcurs de un curent în sens invers, deci acumulatorul devine sursă electrică și în interiorul lui are loc un proces chimic invers. După oarecare timp, plăcile sînt readuse la starea lor inițială, ele devin practic identice din punct de vedere chimic și curentul încetează.

Prima operație, care constă în a furniza aparatului energie electrică, se numește *încărcarea* acumulatorului; cea de a doua, care constă în a consuma în receptoare exterioare, sub formă electrică, această energie acumulată, se numește *descărcarea* acumulatorului.

La încărcare, sulfatul de plumb al plăcii legată cu polul pozitiv al sursei este transformat de radicalul SO_4 în *peroxid de plumb* PbO_2 de culoare cafenie. Hidrogenul care se depune pe placa negativă atacă stratul de sulfat de plumb de pe această placă și îl readuce la starea de plumb metalic, cu un aspect caracteristic foarte poros, motiv pentru care i se spune *plumb spongios*. Încărcarea acumulatorului este terminată cînd practic întregul sulfat de plumb de pe plăci a fost transformat, pe de o parte

în peroxid de plumb, pe de altă parte în plumb spongios, care constituie ceea ce numim *masele active* ale acumulatorului.

În timpul descărcării curentul este de sens invers decît era la încărcare; radicalul SO_4 se depune pe placa negativă și transformă plumbul spongios în sulfat de plumb, iar hidrogenul, pe placa pozitivă, unde reduce peroxidul de plumb în oxid de plumb, care, sub influența acidului sulfuric, se transformă în sulfat de plumb.

Procesul de încărcare și de descărcare a acumulatorului se reduce la următoarele reacții chimice reversibile:

	Placa pozitivă	*Placa negativă*
Înainte de încărcare	$PbSO_4$	$PbSO_4$
În timpul încărcării	$PbSO_4 + SO_4 + 2H_2O = PbO_2 + 2H_2SO_4$	$SO_4Pb + 2H = Pb + SO_4H_2$
După încărcare	PbO_2 (peroxid) + concentrația acidului	Pb (spongios) + concentrația acidului
În timpul descărcării	$PbO_2 + 2H = PbO + H_2O$ $PbO + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O$	$Pb + SO_4 = PbSO_4$
După descărcare	$PbSO_4$ + slăbirea concentrației acidului	$PbSO_4$

Concentrînd reacțiile precedente într-o singură ecuație, avem

$$\underbrace{PbSO_4}_{\text{anod}} + 2H_2O + \underbrace{PbSO_4}_{\text{catod}} \underset{\text{descărcare}}{\overset{\text{încărcare}}{\rightleftarrows}} \underbrace{PbO_2}_{\text{anod}} + 2H_2SO_4 + \underbrace{Pb}_{\text{catod}}.$$

Din cauza apei produse, la descărcare densitatea acidului scade pînă la 1,17-1,18.

Cantitatea de electricitate maximă pe care o poate da un acumulator, fără să se defecteze, se numește *capacitatea* acumulatorului și se măsoară în amperore.

Prin încărcări și descărcări repetate, se constată că capacitatea unui acumulator crește, pînă atinge o valoare maximă pe care nu o mai poate depăși. Se spune atunci că acumulatorul este format.

În fabricarea modernă a acumulatoarelor, formarea lor nu se mai face prin încărcări și descărcări repetate, care necesită un timp destul de mare. Placa pozitivă a acumulatoarelor actuale este prevăzută cu șanțuri adînci, pentru a-i mări suprafața (fig. 4-9*a*), și supusă unei prime formări. După aceasta, șanțurile plăcii sînt umplute cu miniu de plumb (Pb_3O_4) și placa este din nou supusă formării.

Plăcile negative nu sînt supuse unei formări prealabile. Ele au forma unui grătar de plumb (fig. 4-9*b*), umplut cu o compoziție

de litargă de plumb (PbO). În modul acesta, plăcile sînt gata formate și prin cufundarea lor în soluția de acid sulfuric acumulatorul astfel constituit poate debita curent. Pentru a asigura acumulatoarelor gata formate condiții optime de exploatare, înainte de a fi puse în funcțiune ele sînt supuse la două sau trei operații de încărcare și descărcare.

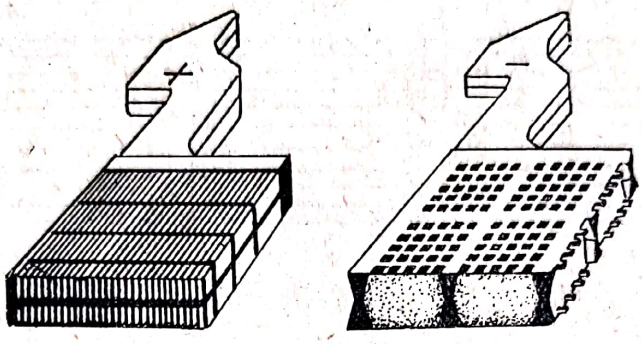


Fig. 4-9. Porțiuni din plăcile acumulatorului.
a) din placa pozitivă ; *b*) din placa negativă

Vasele acumulatoarelor se fac, în general, din sticlă. Pentru unități mari, vasele se fac din lemn și sunt căptușite cu plumb, iar pentru baterii portative, din ebonit.

Curentul maxim pe care îl poate da acumulatorul depinde de suprafața plăcilor sale. Pentru obținerea unor curenți mari, acumulatoarele industriale sînt formate din mai multe plăci montate în derivație în același vas și separate între ele prin izolatoare de porțelan, sau de sticlă, sau prin tacheți de lemn (fig. 4-10). Nivelul electrolitului

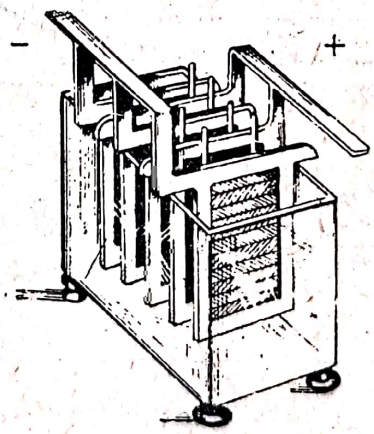


Fig. 4-10. Element de acumulator acid
în vas de sticlă

se potrivește astfel încît să acopere complet plăcile. Un asemenea ansamblu de plăci, cu vasul și electrolitul respectiv, se numește *element* sau *celulă* de acumulator. Pentru a nu se curba în timpul funcționării, plăcile pozitive se găsesc întotdeauna între două plăci negative, plăcile extreme ale unui element fiind deci totdeauna negative. Tensiunea unui

element de acumulator este de circa 2 V, iar rezistența interioară foarte mică. Pentru a avea tensiuni ridicate, se montează mai multe elemente în serie, formînd ceea ce se chiamă o *baterie de acumulatoare*. În fig. 4-11 este arătată o baterie de 6V formată prin legarea în serie a trei elemente.

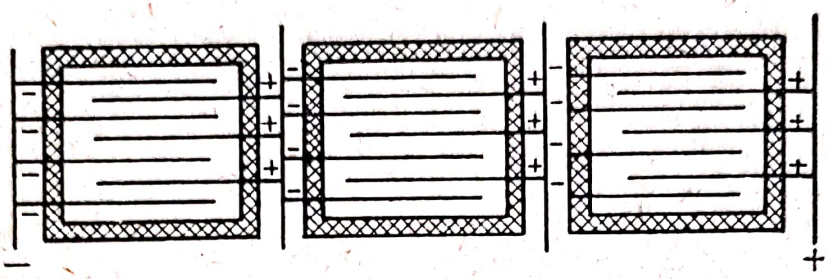


Fig. 4-11. Legarea elementelor în serie

În timpul încărcării și descărcării, tensiunea elementelor de acumulator variază după curbele indicate în fig. 4-12.

La începutul încărcării, tensiunea crește foarte repede pînă la 2,2 V și apoi, foarte încet, pînă la circa 2,3 V, după care acuză o creștere accentuată pînă la circa 2,5 V. La atingerea tensiunii de 2,2 V, încep să se degajeze bule de hidrogen, iar la 2,3 V se degajează atît hidrogenul

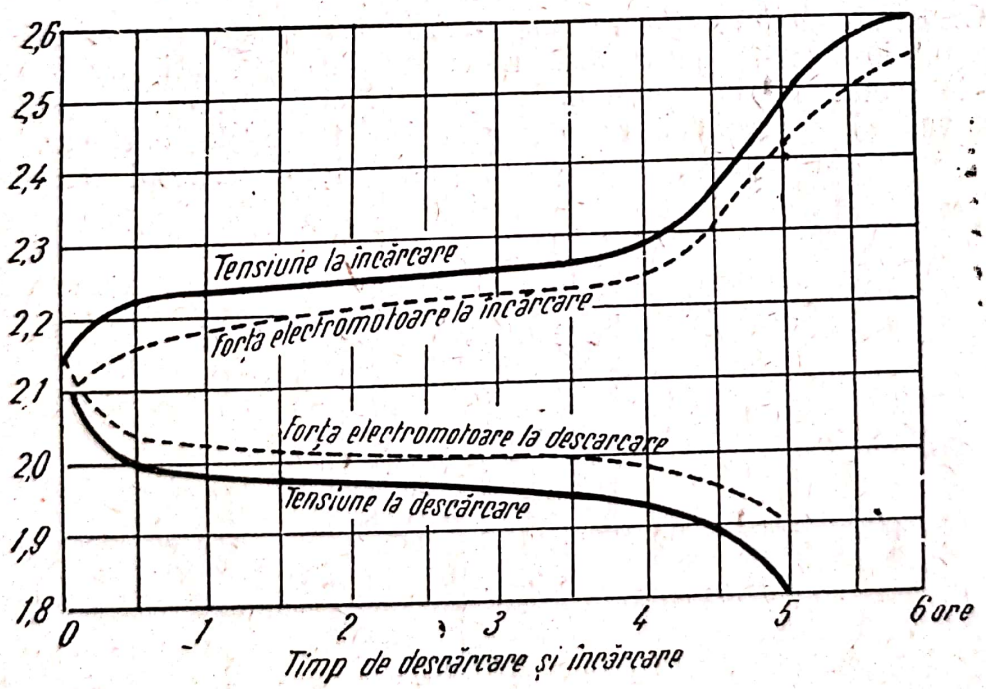


Fig. 4-12. Curbele de încărcare și de descărcare a acumulatorului acid

cît și oxigenul. La 2,5 V, curentul de gaze degajat de electrozi devine foarte puternic, iar cînd tensiunea atinge 2,6 V, acumulatorul începe „să fiarbă".

La descărcare, tensiunea scade brusc, de la 2,2 pînă la 2-1,95 V. La această valoare se menține un timp destul de îndelungat, după care

începe din nou să scadă. Cînd tensiunea pe element atinge 1,8 V, descărcarea bateriei trebuie oprită și bateria, supusă reîncărcării. O baterie descărcată sub 1,8 V pe element riscă să fie deteriorată.

Un acumulator se caracterizează prin următorii parametri:

1. *Regimul de funcționare.* Se înțelege prin regimul acumulatorului intensitatea de curent care nu trebuie întrecută la încărcarea și descărcarea lui. Regimul este proporțional cu greutatea plăcilor elementului și variază, după tipul de acumulator, între 0,5 și 1,5 A/kg la descărcare. Regimul mai poartă și numele de *curent nominal de descărcare.*

2. *Capacitatea.* Capacitatea acumulatorului, pe care am definit-o și mai sus, reprezintă cantitatea de electricitate, în amperore, pe care o poate furniza un element încărcat pînă la refuz, pînă la descărcarea lui completă, cînd f.e.m. scade la 1,8 V. Capacitatea este proporțională cu greutatea plăcilor pe element și variază, după tipul de acumulator, de la 10 la 15 amperore pe kg de plăci.

Pentru un acumulator dat, capacitatea depinde de regimul de descărcare (de curentul cerut la descărcare) și anume ea scade cînd regimul de descărcare crește.

Regimul și capacitatea unei baterii de elemente montate *în serie* sînt aceleași ca și ale unui singur element.

3. *Energia utilizabilă.* Este energia pe care poate să o furnizeze o baterie de acumulatoare, din momentul cînd este complet încărcată, pînă în momentul descărcării ei practic complete. Această energie se exprimă în wattore și se obține înmulțind capacitatea în amperore a acumulatorului, prin forța electromotoare medie, care este de circa 2 V pe element.

4. *Randamentul.* Un acumulator nu poate înapoia întreaga energie consumată la încărcarea lui. O parte din această energie se consumă în încălzirea acumulatorului și într-o serie de procese ireversibile.

Se disting următoarele două randamente: *randamentul în cantitate* și *randamentul în energie.*

Randamentul în cantitate reprezintă raportul dintre cantitatea de electricitate obținută la descărcarea acumulatoarelor și cantitatea de electricitate întrebuințată la încărcarea lor, ambele măsurate în amperore. Prin urmare, randamentul în cantitate este dat de relația

$$\eta_q = \frac{Q_d}{Q_i} = \frac{\int_0^{t_d} i_d \, dt}{\int_0^{t_i} i_i \, dt} . \qquad (4\text{-}5)$$

La acumulatoarele cu plumb acest randament variază între 94 și 97%.

Randamentul în energie reprezintă raportul dintre cantitatea de energie obținută la descărcarea acumulatoarelor și cantitatea de energie consumată pentru încărcarea lor. Acest randament este dat de relația

$$\eta_w = \frac{W_d}{W_i} = \frac{\int_0^{t_d} u_d \, i_d \, dt}{\int_0^{t_i} u_i \, i_i \, dt} .$$

Randamentul în energie al acumulatoarelor cu plumb variază între 75 și 89%.

În relațiile (4-5) și (4-6)

Q este cantitatea de electricitate;

W — energia;

i — curentul variabil în timpul încărcării și descărcării;

t — timpul.

u — tensiunea variabilă în timpul încărcării și descărcării.

Indicii d se referă la regimul de descărcare, iar i, la cel de încărcare.

Cu cît curentul de descărcare al acumulatorului este mai mic, cu atît randamentul său este mai ridicat.

Durata unei baterii de acumulatoare și capacitatea sa de lucru depind de modul cum ea este întreținută și exploatată.

Pe lîngă recomandările deja făcute, mai este necesar să se controleze, sistematic, nivelul electrolitului (care trebuie să întreacă cu cîțiva mm marginile superioare ale plăcilor) și densitatea sa. Densitatea trebuie să scadă, la descărcarea normală, pînă la circa 1,18. De asemenea trebuie să se evite lăsarea elementelor în stare neîncărcată. În acest scop, trebuie organizată încărcarea periodică a acumulatoarelor, chiar dacă nu au fost în exploatare, deoarece, cu timpul, din cauza izolației imperfecte dintre electrozi, ei se descarcă singuri.

Defectul cel mai grav ce poate interveni în exploatarea acumulatoarelor este *sulfatarea plăcilor*, care constă în depunerea, în mare cantitate, pe plăci, a unei formații de sulfat de plumb, în cristale mari, insolubile. Sulfatarea se recunoaște după structura tare și sfărîmicioasă a plăcilor. Ea poate proveni, în primul rînd, dintr-o împingere a descărcării peste limitele normale și prin lăsarea plăcilor prea mult timp descărcate.

Prin supraîncărcare se micșorează randamentul elementelor și se accelerează scoaterea din serviciu a plăcilor pozitive.

Acumulatoarele cu plumb sînt, în parte, standardizate prin STAS-urile 443-52, 444-52, 445-52 și 446-52.

B. Acumulatoarele alcaline

Aceste acumulatoare au fost create din necesitatea de a se înlocui plumbul electrozilor printr-un metal de greutate specifică mai mică. Electrolitul acumulatoarelor alcaline este hidratul de potasiu (KOH).

La plăcile pozitive se întrebuințează ca „masă activă" un oxid (de cupru, de argint sau de nichel); plăcile negative sînt confecționate din zinc, fier sau cadmiu.

Cele mai răspîndite acumulatoare alcaline sînt acumulatoarele cu *feronichel*. Electrozii lor sînt formați din grătare de fier nichelat, în golurile cărora sînt presate pungi din tablă subțire, nichelată, fin găurite, umplute cu „masă activă".

Masa activă a electrozilor pozitivi este formată din hidroxid de nichel [$Ni(OH)_3$], iar cea a electrozilor negativi, din fier spongios (Fe). Ca electrolit se folosește o soluție de 21% de KOH.

Prin urmare, acumulatorul cu feronichel formează sistemul

$$\underset{\text{anod}}{Ni\,(OH)_3}\,|KOH|\,\underset{\text{catod}}{Fe}\,.$$

Rezistivitatea electrolitului alcalin fiind relativ ridicată, electrozii acestor acumulatoare sînt aşezaţi cît mai aproape unul de altul, pentru a micşora rezistenţa interioară a elementului alcalin. Electrozii se aşază într-un vas sudat din fier nichelat, de care se sudează, de asemenea, şi capacul.

Prin disocierea moleculelor electrolitului KOH, apar ionii pozitivi ai metalului K şi ionii negativi ai radicalului OH. La descărcarea elementului, ionii negativi se depun pe electrodul negativ, unde transformă fierul spongios în hidrat fieros, după relaţia

$$Fe + 2\,OH = Fe\,(OH)_2;$$

ionii de potasiu se depun pe electrodul pozitiv, unde dau naştere următoarei reacţii chimice

$$2\,Ni\,(OH)_3 + 2\,K = 2\,Ni\,(OH)_2 + 2\,KOH,$$

adică hidroxidul de nichel este transformat în hidrat de nichel.

Întreaga reacţie chimică a descărcării se poate exprima prin ecuaţia

$$Fe + 2\,Ni\,(OH)_3 = Fe\,(OH)_2 + 2\,Ni\,(OH)_2.$$

La încărcare procesul chimic se desfăşoară invers, deci avem

$$Fe\,(OH)_2 + 2\,Ni\,(OH)_2 = Fe + 2\,Ni\,(OH)_3.$$

În ambele operaţii, concentraţia electrolitului rămîne constantă, deci se poate utiliza o cantitate redusă de electrolit.

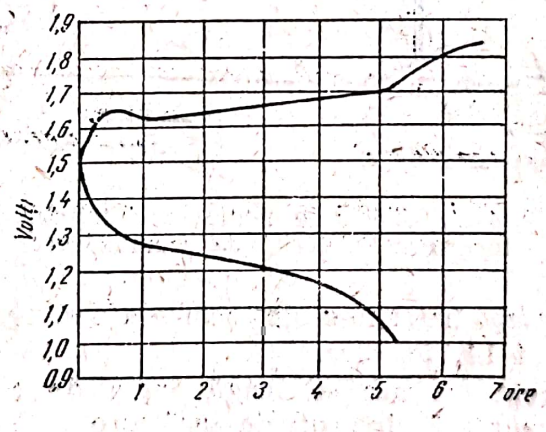


Fig. 4-13. Curbele de încărcare şi descărcare ale acumulatorului nichel-fier

F.e.m. a elementului de acumulator alcalin încărcat este de circa 1,45 V. Cînd tensiunea elementului scade la circa 1,15 V, descărcarea trebuie oprită şi acumulatorul supus reîncărcării.

În fig. 4-13 sînt reprezentate curbele de încărcare şi de descărcare a acumulatorului cu feronichel.

Datorită rezistenţei lor interioare relativ ridicate, randamentul acumulatoarelor alcaline este destul de scăzut şi anume este de circa 54%. În schimb, ele prezintă unele avantaje faţă de acumulatoarele acide, între altele: nu emană gaze nocive, au o greutate relativ mică şi o mare

rezistență mecanică a plăcilor, ceea ce le face de neînlocuit în anumite condiții de lucru, în special în cazul utilizării lor pe unele vehicule și ca acumulatoare portative.

4-7. Încărcarea acumulatoarelor

Încărcarea bateriilor de acumulatoare se face, de regulă, sub curent constant.

Intensitatea curentului de încărcare are o mare importanță pentru obținerea capacității nominale de încărcare a bateriei. Cînd curentul de încărcare are valori prea ridicate, reacțiile chimice dintre electrolit și masele active ale acumulatoarelor nu au timp să se termine și acumulatoarele înmagazinează o cantitate de electricitate sub capacitatea lor nominală. Un asemenea regim forțat de încărcare scurtează viața acumulatorului. În schimb, cînd încărcarea se face sub un curent prea mic, operația durează prea mult.

Dacă tipul de acumulator al bateriei nu are indicat curentul de încărcare, încărcarea se face sub un curent care ar corespunde unui regim de descărcare în 10 ore a întregii capacități a bateriei la acumulatoarele acide și în 5 ore, la acumulatoarele alcaline.

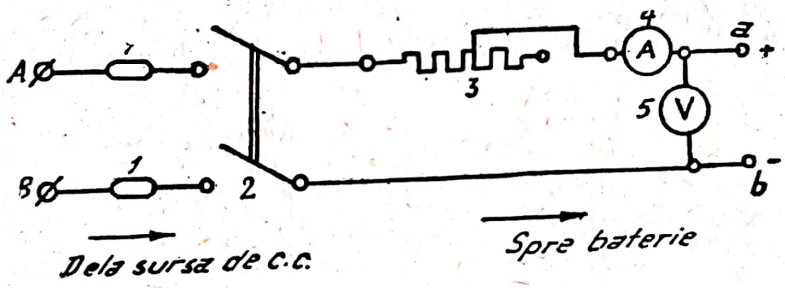


Fig. 4-14. Schema de montaj a circuitului de încărcare a bateriei de acumulatoare

Pentru încărcarea bateriilor de acumulatoare se utilizează schema de montaj din fig. 4-14, în care

A-B sînt bornele la care se leagă sursa de curent continuu care alimentează circuitul de încărcare;

1-1 — siguranțe fuzibile, calibrate după mărimea curentului din circuit;

2 — întreruptor, pentru conectarea și deconectarea bateriei la sursa de curent;

3 — un reostat de reglaj, pentru reglajul curentului de încărcare;

4 — un ampermetru, cu care se măsoară curentul din circuit;

5 — un voltmetru, cu care se măsoară tensiunea aplicată bateriei;

a-b — bornele la care se leagă bateria.

Sursa de curent continuu trebuie să debiteze sub o tensiune cu cel puțin 20% mai mare decît tensiunea bateriei de încărcat.

Ca sursă de curent continuu se utilizează: grupuri electrogene (compuse dintr-un motor termic sau un motor electric de curent alternativ, care antrenează un generator de curent continuu) și redresoare (aparate care transformă curentul alternativ în curent continuu). Acestea din urmă fiind dispozitive statice, care necesită o supraveghere și o întreținere cu totul reduse, sînt din ce în ce mai răspîndite, în dauna grupurilor motor de curent alternativ, generator de curent continuu.

Încărcarea bateriei de acumulatoare cu plumb este terminată atunci cînd tensiunea citită la voltmetrul din schemă ajunge la 2,6-2,7 V pe element. La aceste acumulatoare, sfîrșitul încărcării poate fi constatat și prin măsurarea concentrației electrolitului, care trebuie să ajungă la 28-30 grade Baumé.

4-8. Legarea pilelor și a acumulatoarelor

a) **Legarea în serie.** Cînd vrem să obținem o f.e.m. totală mare, elementele se montează în *serie*, așa cum se arată în fig. 4-15. Ele sînt dis-

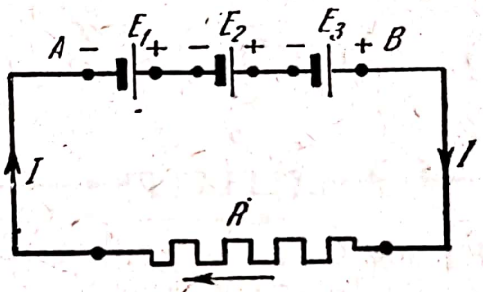


Fig. 4-15. Legarea în serie a elementelor galvanice

puse în așa fel, încît polul pozitiv al uneia să fie legat cu polul negativ al celei următoare. Cei doi poli extremi, unul negativ și celălalt pozitiv, sînt polii grupului. F.e.m. a ansamblului de elemente legate în serie este egală cu suma f.e.m. a fiecărui element

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n. \tag{4-7}$$

Rezistența interioară a ansamblului este egală cu suma rezistențelor fiecărui element. Dacă R este rezistența circuitului exterior, $\sum r$ suma rezistențelor interioare ($\sum r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$), valoarea curentului este dată de relația

$$I = \frac{E}{\sum r + R}, \tag{4-8}$$

iar diferența de potențial la borne este

$$U = E - \sum r\, I. \tag{4-9}$$

Elementele legate în serie au obișnuit aceeași f.e.m. E, aceeași rezistență interioară r și același curent nominal de descărcare. În cazul le-

gării în serie a n elemente, f.e.m. totală este nE, iar rezistența interioară nr. Curentul debitat pe rezistența exterioară R devine

$$I = \frac{nE}{nr + R} = \frac{E}{r + \frac{R}{n}}, \tag{4-10}$$

iar diferența de potențial la borne

$$U = nE - nrI = n(E - rI) \cdot \tag{4-11}$$

b) **Legarea în paralel.** Cînd vrem să obținem un curent mare, elementele se montează *în paralel* sau *în derivație*, așa cum se arată în fig. 4-16. Toți polii pozitivi ai elementelor sînt legați împreună formînd

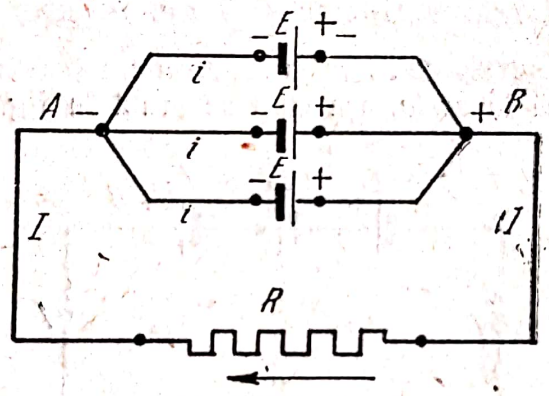


Fig. 4-16. Legarea în paralel a elementelor galvanice

un pol al grupului și, la fel, și polii negativi care formează al doilea pol al grupului. Legarea în derivație nu se poate face decît cu elemente avînd aceleași f.e.m. și aceleași rezistențe interioare; altfel, între diferitele elemente se produc curenți locali de circulație (curenți de egalizare), care produc pierderi inutile de energie, chiar atunci cînd circuitul exterior al grupului este întrerupt.

Dacă elementele sînt identice, f.e.m. a grupului este egală cu f.e.m. a fiecărui element, iar rezistența interioară a grupului este egală cu r/n, r fiind rezistența interioară a unui element și n numărul elementelor în paralel. Cînd grupul debitează pe o rezistență exterioară R, curentul total este

$$I = \frac{E}{\frac{r}{n} + R} = \frac{nE}{nR + r} \cdot \tag{4-12}$$

Diferența de potențial la borne are ca valoare

$$U = E - r\frac{I}{n} = E - \frac{r}{n}I$$

sau, ținînd seama de relația (4-12),

$$U = E - \frac{rE}{r + nR} = \frac{RnE}{r + nR}. \qquad (4\text{-}13)$$

c) **Legarea în serie-paralel.** Cînd avem nevoie atît de o f.e.m. totală ridicată cît și de un curent total mai mare decît al unei singure surse, se utilizează montajul *mixt* sau *serie-paralel*, reprezentat în fig. 4-17. F.e.m.

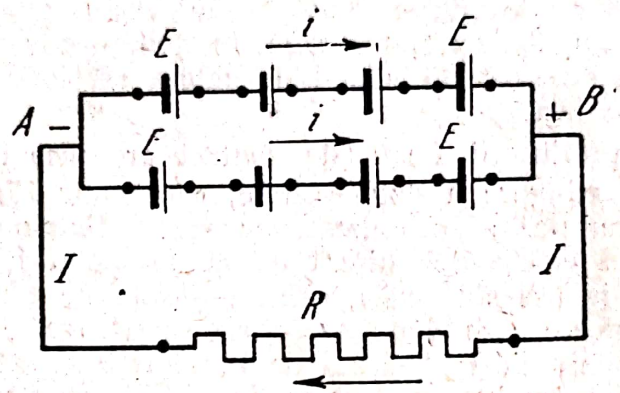


Fig. 4-17. Legarea în serie - paralel a elementelor galvanice

totală este egală cu f.e.m. legate în serie, iar curentul total este egal cu suma curenților în derivație.

Dacă m este numărul de elemente legate în serie și n numărul seriilor de elemente legate în paralel, curentul total este

$$I = \frac{mE}{\frac{mr}{n} + R} = \frac{nmE}{mr + nR}, \qquad (4\text{-}14)$$

iar tensiunea la borne

$$U = \frac{RnmE}{mr + nR}. \qquad (4\text{-}15)$$

Se numește *baterie* ansamblul de elemente galvanice legate în serie, în paralel sau în serie-paralel.

Exemplul 4-4. Se dă o baterie de 60 elemente de acumulatoare acide, fiecare element avînd 30 kg de plăci, regimul de 1,5 A și capacitatea de 12 amperoră/kg. Să se calculeze: f.e.m. totală a bateriei, regimul, capacitatea și energia utilizabilă, pentru cazul cînd: a) elementele sînt legate în serie; b) elementele sînt legate în serie-paralel, cu cîte 30 elemente pe ramură.

Soluția: a) *F.e.m.* a bateriei este 60.2=120 V. *Regimul* este acela al unui singur element, adică 30.1,5=45 A. *Capacitatea* este aceea a unui singur element, adică 30.12=360 amperore. *Energia utilizabilă:* 120.360= 43 200 wattore = 43,2 kWh.

b) *F.e.m.* este aceea a unui grup de 30 elemente în serie, adică 30.2=60 V. *Regimul:* Fiecare grup serie poate debita 45 A (regimul unui element), deci cele două grupuri montate în paralel dau 45.2=90 A. *Capacitatea* este egală cu de două ori capacitatea unui element, adică 2.360 amperore=720 Ah. *Energia utilizabilă* 60.720=43 200 wattore=43,2 kWh, adică la fel ca și în cazul precedent.

4-8. Fenomene termoelectrice

Experimental se dovedește că dacă două din capetele a două metale diferite sînt puse în contact, între capetele libere apare o f.e.m., numită *f.e.m. de contact,* determinată numai de natura metalelor și de temperatura locului de contact.

Fenomenul producerii f.e.m. de contact are următoarea explicație:

La locul de atingere a două metale, electronii liberi ai metalelor, în mișcarea lor termică dezordonată, vor trece dintr-un metal în altul. Presiunea „gazului electronic" diferă de la un metal la altul, după natura metalului. Din această cauză, prin suprafața de contact dintre două metale A și B, dintre care A posedă o presiune a gazului electronic mai mare, vor trece mai mulți electroni de la A la B, decît de la B la A. Aceasta va creea un surplus de electroni în metalul B și un minus de electroni în metalul A. În consecință, metalul A se va încărca pozitiv, iar metalul B, negativ: între cele două metale va apare o diferență de potențial V_{AB}, care va da naștere unui cîmp electric, îndreptat dela A la B. Acest cîmp electric va împiedica trecerea, mai departe, a electronilor din A în B.

Trecerea electronilor, deci creșterea diferenței de potențial dintre A și B încetează cînd forțele electrice produse de cîmp echilibrează diferența dintre presiunile „gazului electronic" al celor două metale.

F.e.m. de contact este dată de relația

$$E_{AB} = V_{AB} = 2{,}87 \cdot 10^{-7} \cdot T \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}, \qquad (4\text{-}16)$$

în care T^0 este temperatura absolută la locul de contact, iar η_{0A} și η_{0B} reprezintă numărul electronilor liberi cuprinși într-un cm^3 al metalelor respective.

În cazul unui circuit închis, format din diferite metale legate în serie (fig. 4-18), f.e.m. de contact rezultantă este nulă atunci cînd contactele au temperaturi egale. Într-adevăr, această f.e.m. reprezintă suma algebrică a tuturor creșterilor de potențial pe care le întîlnim în parcurgerea circuitului închis. În cazul celor trei metale diferite ale circuitului din fig. 4-18, avem

$$E = V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_A - V_C) = 0 \cdot$$

La aceeași concluzie se ajunge aplicînd relația (4-16).

Aplicînd această relație la cazul particular al unui circuit format din două metale diferite A și B (fig. 4-19), ale căror puncte de con-

tact au aceeaşi temperatură, avem

$$E = V_{AB} + V_{BA} = E_{AB} + E_{BA} = 2{,}87 \cdot 10^{-7} T^0 \left(ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} + \right.$$

$$\left. + ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}} \right) = 2{,}87 \cdot 10^{-7} T^0 ln\ 1 = 0 \cdot$$

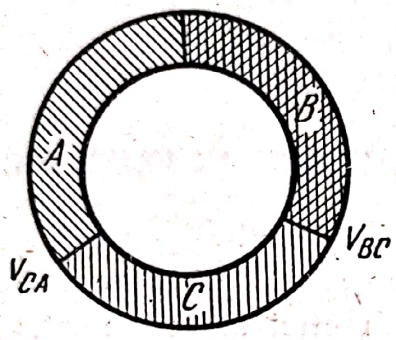


Fig. 4-18. Circuit închis compus din metale diferite

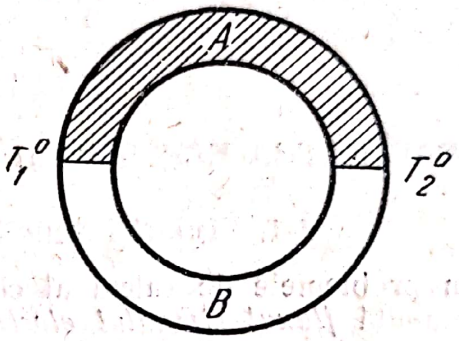


Fig. 4-19. Circuit format din două metale diferite

Cînd temperatura unui contact este mai mare decît a celuilalt, de pildă $T_2^0 > T_1^0$, f.e.m. rezultantă nu mai este nulă, după cum rezultă din relaţia

$$E = 2{,}87 \cdot 10^{-7} T_1^0 ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} + 2{,}87 \cdot 10^{-7} T_2^0 ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}} =$$

$$= 2.87 \cdot 10^{-7} (T_2^0 - T_1^0)\ ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}} \cdot$$

F.e.m. rezultantă E se numeşte *forţă termoelectromotoare* şi se notează cu E_T; ea dă naştere în circuit unui curent numit *curent termoelectric*.

Dacă notăm

$$2{,}87 \cdot 10^{-7} ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}} = E_0\ , \qquad (4\text{-}17)$$

relaţia precedentă devine

$$E_T = E_0 (T_2^0 - T_1^0)\ ; \qquad (4\text{-}18)$$

Prin urmare, forţa termoelectromotoare este proporţională cu diferenţa între temperaturile suprafeţelor de contact ale metalelor. Coeficientul de proporţionalitate E_0, dat de relaţia (4-17), se numeşte forţă termoelectromotoare specifică şi constituie o constantă a cuplului respectiv de metale.

Fenomenele termoelectrice au o largă utilizare în măsurarea temperaturilor industriale (par. 16-9).

CAPITOLUL V

CAPACITATEA ELECTRICA. ENERGIA CÎMPULUI ELECTRIC

5-1. Fluxul intensității cîmpului electric

În problemele de calcul al cîmpului electric ne servim de mărimea fizică numită *fluxul cîmpului electric,* pentru a cărei înțelegere intuitivă vom recurge la o analogie hidraulică.

Să presupunem un lichid care se scurge printr-un tub de expansiune (fig. 5-1). Dacă reprezentăm vitezele v în diverse puncte ale lichidului

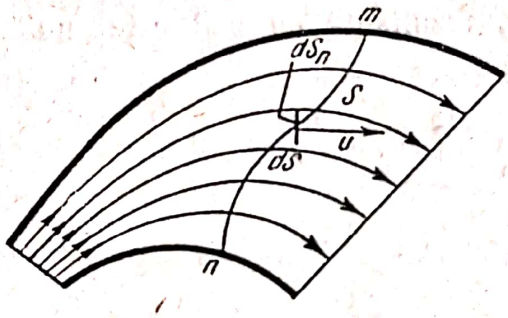


Fig. 5-1. Fluxul vectorului viteză

prin vectorii respectivi și trasăm în aceste puncte liniile tangente la acești vectori, obținem spectrul cîmpului de viteze din tub.

Să considerăm o suprafață oarecare S în acest cîmp, reprezentată prin linia mn, intersecția ei cu planul figurii, și să luăm din această suprafață un element infinit mic dS. Prin acest element va curge un debit de lichid dat de produsul valorii vitezei respective v cu mărimea dS_n, care reprezintă proiecția suprafeței dS pe planul perpendicular pe direcția vitezei v. Prin urmare,

$$dQ = v \cdot dS_n \quad . \tag{5-1}$$

Valoarea expresiei dS_n rezultă din relația

$$dS_n = dS \cdot \cos \alpha \ ,$$

în care α este unghiul pe care îl face direcția normalei la suprafața dS cu direcția vectorului v, din punctul respectiv al cîmpului de viteze.

Debitul de lichid prin suprafața S este dat de relația

$$Q = \int_S v \, dS_n \ , \qquad (5\text{-}2)$$

în care integrala se referă la întreaga suprafață S.

Cîmpul electric poate fi asimilat cîmpului hidraulic, vectorii acestui cîmp cu vectorii vitezei din cîmpul hidraulic, iar liniile de forță cu liniile de scurgere ale moleculelor lichidului. În aceste condiții, relația (5-1) devine, în cazul cîmpului electric,

$$\psi = \int_S E \, dS_n \ , \qquad (5\text{-}3)$$

în care dS_n reprezintă proiecția unui element infinit mic dS, făcînd parte dintr-o suprafață oarecare S a cîmpului, pe un plan perpendicular pe vectorul E corespunzător acelui element. Mărimea ψ reprezintă *fluxul vectorului cîmp electric* sau, mai pe scurt, *fluxul cîmpului electric* prin suprafața S.

Ca și debitul, fluxul este o mărime scalară.

Dacă se trasează liniile de forță trecînd prin punctele unui contur închis oarecare, aflat într-un cîmp electric, obținem ceea ce se numește un *tub de forță*. Într-un tub de forță fluxul de inducție se conservă, deoarece el fiind limitat prin linii de forță, rezultă că în interiorul lui nu mai pot intra sau ieși alte linii de forță. Se spune că fluxul tubului de forță *este conservativ*. Conservarea fluxului prin tubul de forță corespunde conservării debitului într-un tub hidraulic (fig. 5-1).

5-2. Teorema lui Gauss

Să considerăm o sarcină punctiformă Q, aflată în interiorul volumului limitat de o suprafață închisă S, într-un mediu omogen de per-

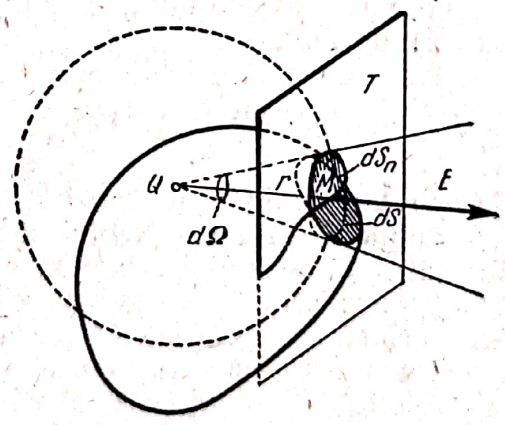


Fig. 5-2. Fluxul printr-o suprafață închisă, produs de sarcini interioare suprafeței

mitivitate ε (fig. 5-2). Ne propunem să determinăm valoarea fluxului cîmpului electric, prin suprafața S, creat de sarcina Q.

Scanned with OKEN Scanner

Să trasăm un con elementar cu vîrful în Q, corespunzător unui unghi solid infinit mic $d\Omega$. Acest con taie pe suprafaţă infinit suprafaţa S o mică dS. Axa conului străpunge suprafaţa S în punctul M.

Dacă notăm $OM=r$, rezultă că intensitatea cîmpului electric în punctul M este, conform relaţiei (1-10a),

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2} .$$

Fluxul elementar care străbate suprafaţa dS este dat, prin analogie cu relaţia (5-1), de expresia

$$d\psi = E\, dS_n = \frac{Q}{\varepsilon r^2} dS_n \quad , \tag{5-4}$$

în care dS_n este proiecţia suprafeţei dS pe planul T dus prin punctul M perpendicular pe vectorul E, deci perpendicular pe $OM=r$.

Elementul infinit mic dS_n este egal cu elementul sferic de rază r, corespunzător unghiului elementar $d\Omega$. Rezultă că

$$dS_n = r^2\, d\Omega \quad ,$$

şi relaţia (5-4) devine

$$d\psi = \frac{Q}{\varepsilon} d\Omega .$$

Fluxul care străbate întreaga suprafaţă S este

$$\psi = \int_S E\, dS_n = \int_S \frac{Q}{\varepsilon} d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon} \int_S d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon} \Omega . \tag{5-5}$$

Unghiul Ω reprezintă unghiul solid total sub care este văzută, din punctul în care se găseşte sarcina Q, întreaga suprafaţă S. Acest unghi solid total, din jurul unui punct al spaţiului, este egal cu 4π steradiani. În consecinţă, relaţia (5-5) devine

$$\psi = 4\pi \frac{Q}{\varepsilon} . \tag{5-6}$$

Deoarece relaţia (5-5) nu depinde de poziţia sarcinii în interiorul volumului limitat de suprafaţa S, ea este valabilă şi atunci cînd Q reprezintă suma algebrică a mai multor sarcini aflate în acest volum.

Fluxul prin suprafaţa închisă S a sarcinilor aflate în exteriorul ei este nul. Într-adevăr, să considerăm o sarcină Q' plasată înafara suprafeţei închise S (fig. 5-3). Dacă trasăm un con elementar cu vîrful în Q', care să formeze un unghi solid infinit mic $d\Omega$, el va tăia pe suprafaţa S două elemente de suprafaţă dS_1 şi dS_2. Conul elementar fiind delimitat de linii de forţă, constituie un tub de forţă, de-a lungul căruia fluxul este conservativ. Considerînd ca pozitiv fluxul care iese din interiorul suprafeţei S şi ca negativ cel care intră, rezultă că fluxul care trece prin suprafaţa dS_1 este egal şi de sens opus fluxului care trece prin suprafaţa dS_2, deci suma lor este nulă. Prin urmare, dacă tăiem întreaga suprafaţă S prin

conuri elementare cu vîrful în Q', pentru toate aceste conuri fluxul care intră în interiorul suprafeței este egal și de sens contrar cu cel care iese, deci fluxul total care trece prin suprafață este nul.

În concluzie, prin suprafața S nu trece decît fluxul sarcinilor aflate în interiorul suprafeței, a cărui valoare este dată de relația (5-6). De

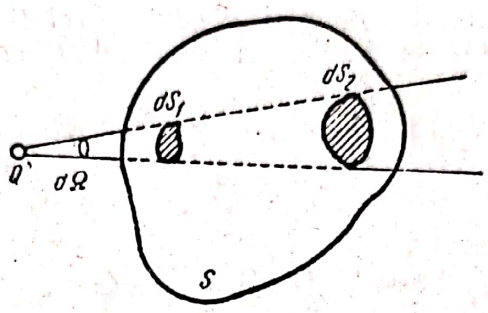


Fig. 5-3. Fluxul printr-o suprafață închisă, produs de sarcini exterioare

aci rezultă următoarea teoremă importantă, cunoscută sub numele de *teorema lui Gauss:*

Fluxul printr-o suprafață închisă oarecare, aflată într-un mediu omogen, este egal cu raportul dintre sarcina totală conținută în interiorul suprafeței și permitivitatea mediului respectiv, înmulțit cu coeficientul numeric 4π.

Dacă ținem seama de relația (1-9)

$$\varepsilon = 4\pi\varepsilon' \quad ,$$

rezultă că în sistemul raționalizat formula (5-6) devine

$$\psi = \frac{Q}{\varepsilon'} \quad . \tag{5-6a}$$

Se preconizează introducerea sistemului raționalizat pentru a face să dispară factorul 4π din relația teoremei lui Gauss și din diferitele formule stabilite cu ajutorul acestei teoreme.

5-3. Inducția electrică

Teorema lui Gauss poate fi aplicată și mediilor neomogene dacă se introduce o mărime auxiliară numită *inducția electrică* sau *deplasare electrică,* care se notează convențional cu simbolul D.

Inducția electrică este o mărime vectorială, ca și cîmpul electric, și derivă din acesta din urmă prin relația cantitativă

$$D = \varepsilon E \quad , \tag{5-7}$$

în care ε reprezintă permitivitatea mediului în punctul cîmpului electric în care E este modulul vectorului intensității.

În majoritatea cazurilor, direcția vectorului inducției electrice coincide cu aceea a vectorului intensității cîmpului electric și relația precedentă devine

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \quad . \tag{5-7a}$$

Prin orice suprafață din cîmp, vectorul inducției electrice creează un flux, care poartă numele de *fluxul vectorului inducției electrice* sau, mai pe scurt, *fluxul inducției* și care se notează cu Ψ. În mediile omogene

$$\Psi = \varepsilon \psi \ .$$

Dacă utilizăm fluxul inducției electrice, relația (5-5) care ne conduce la teorema lui Gauss devine, în cazul mediilor omogene,

$$\Psi = \int_S D \, \mathrm{d}S_n = \int_S \varepsilon E \, \mathrm{d}S_n = \varepsilon \int_S E \, \mathrm{d}S_n = 4\pi Q \ .$$

Pusă sub forma

$$\Psi = \int_S D \, \mathrm{d}S_n = 4\pi Q \ , \qquad (5\text{-}8)$$

în care permitivitatea ε este cuprinsă în inducția electrică D, teorema lui Gauss poate fi aplicată oricărui mediu, omogen sau neomogen.

5-4. Aplicații teoretice ale teoremei lui Gauss

a) Intensitatea cîmpului electric în vecinătatea suprafeței unui conductor încărcat

Ne propunem să determinăm valoarea intensității cîmpului electric creat de un conductor încărcat cu o sarcină Q, într-un punct infinit vecin cu conductorul.

În general, sarcina Q se repartizează neuniform pe suprafața unui conductor. Fie ΔQ sarcina pe un element ΔS din acea suprafață, situat în jurul unui punct oarecare al acesteia. Limita raportului dintre ΔQ și ΔS, cînd ΔS tinde către zero, se numește *densitatea superficială a sarcinii electrice* sau, mai pe scurt, densitatea sarcinii în punctul considerat. Notînd această densitate cu σ, avem

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} \ . \qquad (5\text{-}9)$$

Rezultă că elementul de suprafață $\mathrm{d}S$ este încărcat cu sarcina elementară

$$\mathrm{d}Q = \sigma \, \mathrm{d}S \ .$$

Să trasăm prin conturul elementului $\mathrm{d}S$ tubul de forță respectiv, pe care să-l limităm la două suprafețe $\mathrm{d}S_1$ și $\mathrm{d}S_2$ infinit apropiate de elementul $\mathrm{d}S$ (fig. 5-4). Dacă aplicăm teorema lui Gauss suprafeței închise, formată din suprafața laterală a tubului de forță și suprafețele $\mathrm{d}S_1$ și $\mathrm{d}S_2$, avem

$$\mathrm{d}\psi = 4\pi \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon} = 4\pi \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathrm{d}S \ .$$

Ținînd seama că fluxul care trece prin suprafața laterală a tubului de forță este nul și că, de asemenea, este nul și fluxul care trece prin su-

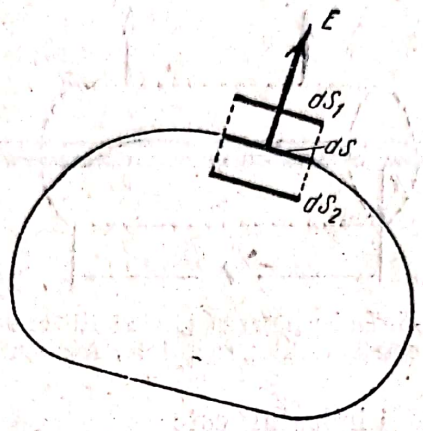


Fig. 5-4. Determinarea intensității cîmpului electric în vecinătatea conductorului electrizat

prafața dS_2 din interiorul conductorului electrizat, rezultă că

$$d\psi = 4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon}dS = E_1 dS_1 .$$

La limită, $dS_1 = dS$ și $E_1 = E$. Prin urmare

$$E = 4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon} \quad . \tag{5-10}$$

Rezultă, așadar, că intensitatea cîmpului electric creat de un conductor încărcat, într-un punct infinit vecin conductorului și pe suprafața sa, este proporțională, într-un mediu omogen, cu densitatea superficială a sarcinii.

Ținînd seama de relația (5-7), formula precedentă ia forma

$$D = 4\pi\sigma \quad . \tag{5-11}$$

Prin urmare, inducția electrică are dimensiunea densității superficiale. În sistemul raționalizat, relația (5-9) devine

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon'} \tag{5-10a}$$

iar relația (5-11)

$$D = \sigma \quad . \tag{5-11a}$$

b) Intensitatea cîmpului electric în jurul unui conductor rectiliniu, foarte lung, încărcat cu o sarcină electrică

Să presupunem că conductorul este încărcat cu q coulombi pe metru liniar. Se înconjoară conductorul (fig. 5-5) cu un cilindru de rază R și de lungime l. Cîmpul va avea o direcție radială, adică în fiecare

punct al cilindrului va fi perpendicular pe suprafața acestuia. Fluxul

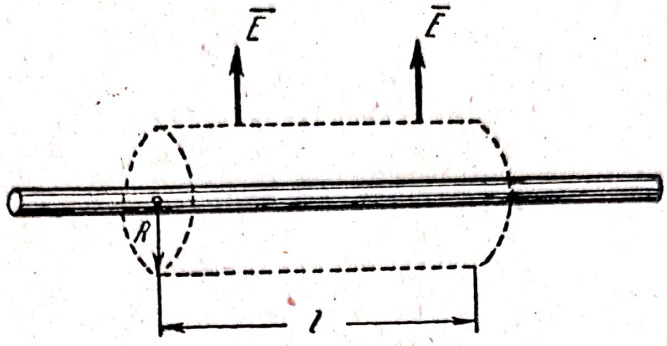


Fig. 5-5. Determinarea intensității cîmpului conductorului rectiliniu, încărcat

care străbate suprafața cilindrului este

$$\psi = E\,S = E \cdot 2\pi R\,l \cdot$$

Același flux, conform teoremei lui Gauss, este dat de relația

$$\psi = 4\pi \frac{Q}{\varepsilon} = 4\pi \frac{q\,l}{\varepsilon} \quad .$$

Rezultă că valoarea intensității cîmpului, la o distanță R de la axul conductorului, este

$$E = \frac{2\,q}{\varepsilon R} = \frac{2\,Q}{\varepsilon\,R\,l} \quad . \qquad (5\text{-}12)$$

c) Intensitatea cîmpului și potențialul electric al unui conductor sferic

Să presupunem un conductor sferic S de rază r (fig. 5-6), încărcat

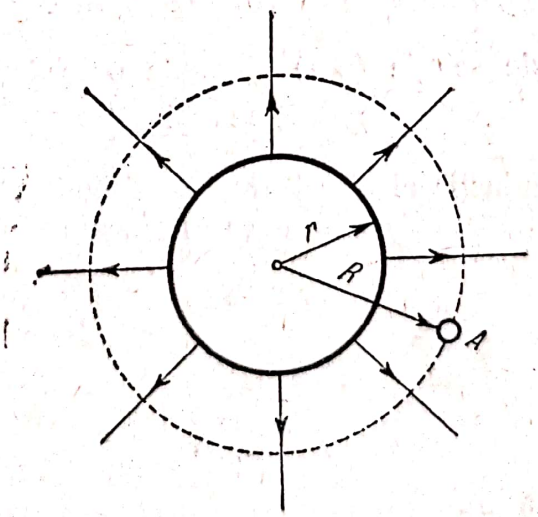


Fig. 5-6. Determinarea intensității cîmpului conductorului sferic

cu o sarcină Q. Datorită formei perfect simetrice, sarcina se distribuie uniform pe suprafața conductorului, deci densitatea superficială este constantă.

Cîmpul produs în exteriorul unui conductor sferic este același ca și cînd sarcina ar fi concentrată în centrul sferei. Într-adevăr, să calculăm cîmpul într-un punct A, așezat la distanța R de centrul sferei ($R > r$) și fie E_A acest cîmp. În acest scop, să trasăm prin punctul A o sferă de rază R, concentrică cu sfera S. În oricare punct al sferei trasate, cîmpul electric va fi constant ca intensitate și radial ca direcție.

Fluxul care străbate suprafața sferei de rază R este dat de relația

$$\psi = E_A \cdot 4\pi R^2 .$$

Conform teoremei lui Gauss, acest flux are ca valoare

$$\psi = 4\pi \frac{Q}{\varepsilon} .$$

Din egalizarea acestor două relații rezultă că

$$E_A = \frac{Q}{\varepsilon R^2} .$$

Generalizînd, putem spune că în orice punct exterior al unei sfere conducătoare încărcate cîmpul electric are aceeași valoare ca și cum sarcina ar fi concentrată în centrul sferei.

Ținînd seama de relația (1-16), același lucru se poate afirma și de potențialul creat de sfera conducătoare în exteriorul său.

Intensitatea cîmpului pe suprafața sferei încărcate este

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2} , \qquad (5\text{-}13)$$

iar potențialul

$$V = \frac{Q}{\varepsilon r} , \qquad (5\text{-}14)$$

r fiind raza sferei.

5-5. Distribuția sarcinii pe corpurile conducătoare

Am arătat că, în cazul sferei încărcate, densitatea superficială este uniformă pe toată suprafața corpului. Dacă corpul are o formă oarecare, densitatea sarcinii este cu atît mai mare, cu cît raza de curbură din jurul punctului respectiv este mai mică.

Într-adevăr, fie două sfere conducătoare electrizate, legate printr-un conductor subțire (fig. 5-7). În cele două sfere se va produce un echilibru electric și ele vor atinge același potențial V, deci sferele pot fi considerate ca un conductor unic. Dacă notăm cu Q cantitatea de electricitate de pe sfera de rază r și cu Q' cea de pe sfera de rază r', conform relației (5-14) vom avea

$$V = \frac{Q}{\varepsilon r} = \frac{Q'}{\varepsilon' r'} .$$

Scanned with OKEN Scanner

Suprafețele sferelor fiind egale, respectiv, cu $4\pi r^2$ și cu $4\pi r'^2$, densitatea superficială a sarcinii electrice va fi, pentru fiecare din ele,

Prin urmare, densitățile superficiale ale sarcinii sînt invers proporționale cu razele de curbură, densitatea fiind maximă acolo unde raza de curbură este minimă. În vîrfurile unui conductor electrizat, densitatea este deci cu atît mai mare, cu cît vîrful este mai ascuțit.

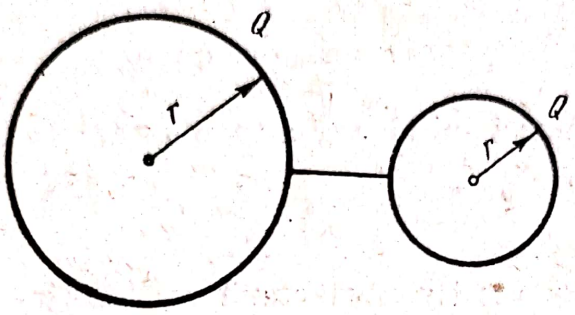


Fig. 5-7. Legătura între densitățile superficiale și razele de curbură ale conductoarelor încărcate

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{V}{4\pi r} \quad \text{și} \quad \sigma' = \frac{Q'}{4\pi r'^2} = \frac{V}{4\pi r'} \ .$$

Așadar,

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{r'}{r} \ . \qquad (5\text{-}15)$$

Cîmpul electric pe suprafața unui conductor încărcat este, conform relației (5-10), proporțional cu densitatea sarcinii electrice în punctul considerat. Prin urmare, acest cîmp este foarte intens în dreptul vîrfurilor corpului electrizat. Sub influența lui, sarcinile electrice de pe conductor sînt expulzate în mediul înconjurător. Se produce astfel o descărcare continuă a sarcinii, care reprezintă o pierdere prin efluvii a energiei electrice. Această descărcare este cu atît mai accentuată, cu cît sarcina corpului este mai mare, adică, după cum vom arăta în par. 5-6, cu cît potențialul corpului este mai ridicat. De aceea, toate piesele metalice ale aparatelor electrice, care urmează a fi încărcate la potențiale ridicate, se execută în formă rotundă și cu suprafețele netede.

5-6. Capacitate electrică și condensator electric

Relația (5-14) stabilită în par. 5-4 în cazul conductorului sferic poate fi pusă sub forma

$$Q = \varepsilon r V \ .$$

Pentru o sferă dată r fiind constant, iar ε fiind legat de mediul care înconjură conductorul, pe care îl presupunem omogen, relația precedentă devine

$$Q = C V \ , \qquad (5\text{-}16)$$

în care C este o constantă.

Experiența arată că relația (5-16) este generală și se aplică tuturor corpurilor conducătoare, indiferent de forma acestora. De aci scoatem următoarea regulă: *Cantitatea de electricitate cu care se încarcă un corp conducător este proporțională cu potențialul acelui corp.*

Factorul de proporționalitate C, care depinde de forma și dimensiunile corpului și de permitivitatea mediului în care se găsește corpul, se numește *capacitatea electrică* sau, pe scurt, *capacitatea corpului* respectiv.

Capacitatea conductoarelor electrice poate fi comparată cu aceea a recipientelor pentru gaze. Cantitatea de electricitate pe suprafața unui conductor este proporțională cu potențialul acestuia, așa cum cantitatea de gaz conținută într-un recipient este proporțională cu presiunea la care este supus gazul.

Din relația (5-16), pusă sub forma

$$V = \frac{Q}{C} \,, \tag{5-17}$$

rezultă că potențialul unui corp conducător variază, la rîndul său, proporțional cu cantitatea de electricitate cu care este încărcat corpul, factorul de proporționalitate fiind egal cu inversul capacității acestuia.

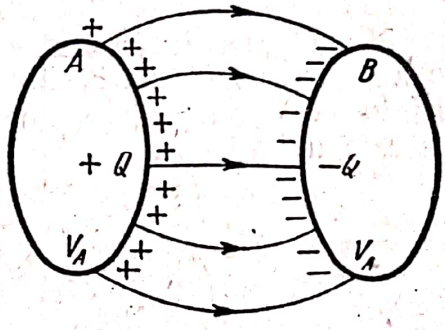


Fig. 5-8. Condensator electric

Fie două conductoare A și B, de forme diferite, separate printr-un izolant, de pildă aerul. Să presupunem că conductorul A este încărcat cu sarcina $+Q$, iar conductorul B, cu sarcina, egală și de sens contrar, $-Q$. Potențialele V_A și V_B corespunzătoare celor două conductoare, determinate cu relația (5-17), fiind diferite, între ele va exista o diferență de potențial $U = V_A - V_B$ și, în spațiul dintre conductoare, va apare un cîmp electric (fig. 5-8).

Un astfel de sistem, format din două corpuri conducătoare separate printr-un izolant, se numește *condensator electric*.

Suprafețele celor două conductoare pe care se găsesc concentrate sarcinile electrice se numesc *armăturile condensatorului*, iar mediul dintre armături, *dielectricul* său.

Dacă se variază diferența de potențial dintre armăturile unui condensator, se constată că proporțional cu ea variază și cantitățile de electricitate, egale și de semn contrar, de pe cele două armături. Se poate scrie

$$Q = CU \,. \tag{5-18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Factorul C, care reprezintă raportul dintre cantitatea de electricitate care încarcă condensatorul și diferența de potențial între armături, se numește *capacitatea* condensatorului. Prin urmare, ecuația de definiție a capacității condensatorului este

$$C = \frac{Q}{U} \cdot \qquad (5\text{-}18a)$$

Capacitatea unui condensator depinde de forma armăturilor sale, de poziția relativă a acestora și de natura mediului care le izolează, caracterizat prin permitivitate. Deci capacitatea este o mărime fizică și se poate măsura în raport cu o anumită capacitate pe care o luăm ca unitate de măsură.

Conform STAS 862-49, unitatea de capacitate reprezintă capacitatea unui condensator care, potrivit formulei (5-18a), fiind încărcat cu o sarcină de un coulomb, determină între armăturile sale o diferență de potențial de un volt. Această unitate poartă numele de *farad* (simbolul F). Faradul face parte din sistemul practic de unități MKSA, ca și coulombul și voltul.

Putem găsi ușor legătura dintre fard și unitatea *CGSe.m.* de capacitate:

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}} = \frac{0^{-1} \text{ uCGSe.m.}}{10^{8} \text{ uCGSe.m.}} = 10^{-9} \text{ uCGSe.m.}$$

Pentru nevoile curente ale practicii, faradul este o unitate prea mare. De aceea se obișnuiește a se exprima capacitățile condensatoarelor industriale printr-un submultiplu al faradului și anume *microfaradul* (simbol μ F). Legătura dintre aceste unități este

$$1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$$

și

$$1\,\text{F} = 10^{6}\,\mu\text{F} \cdot$$

5-7. Condensatorul plan

Să considerăm un condensator ale cărui armături sînt două suprafețe plane paralele, egale, situate la o distanță d, mică în raport cu dimensiunile armăturilor, și separate printr-un izolant de permeativitate ε (fig. 5-9 a și b). Avem ceea ce se numește un *condensator plan*. Suprafețele armăturilor fiind egale și avînd sarcini egale și opuse, rezultă că au numeric aceeași densitate a sarcinii electrice. Dacă se neglijează regiunea de la marginile armăturilor, în întreg spațiul dintre armături liniile de forță ale cîmpului electric sînt drepte paralele, perpendiculare pe suprafețele armăturilor, care constituie suprafețe echipotențiale. Cîmpul este omogen și are ca valoare, conform relației (5-10),

$$E = 4\pi\frac{\sigma}{\varepsilon} = 4\pi\frac{Q}{\varepsilon S} \,,$$

în care S este suprafața armăturilor. Pe de altă parte, conform relației (1-16),

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{U}{d} \,,$$

deci

$$4\pi\frac{Q}{\varepsilon S}=\frac{U}{d}\ .$$

Rezultă

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon S}{4\pi d}\ . \qquad (5\text{-}19)$$

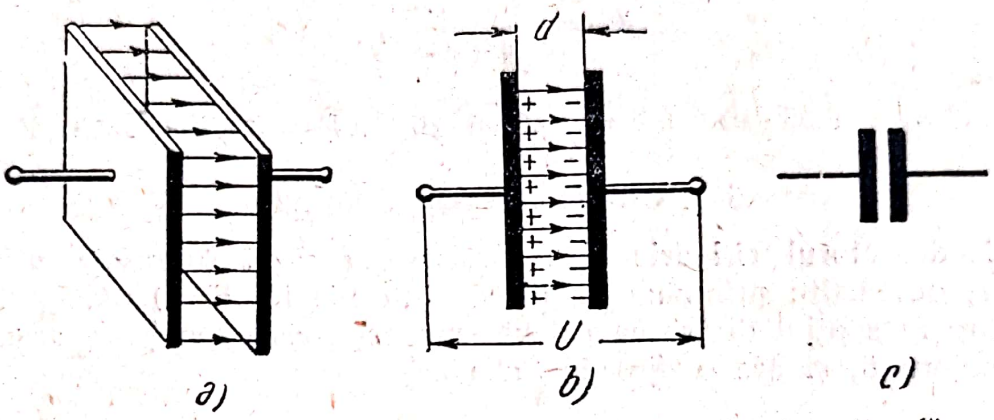


Fig. 5-9. *a*) şi *b*) condensator plan ; *c*) reprezentare convenţională

În sistemul raţionalizat, relaţia precedentă devine

$$C=\frac{\varepsilon' S}{d}\ . \qquad (5\text{-}19\,a)$$

Această formulă a capacităţii condensatorului plan poate fi aplicată şi în cazul condensatoarelor de altă formă, care îndeplinesc condiţia ca distanţa d dintre armături să fie constantă şi suficient de mică faţă de raza de curbură a armăturilor, pentru a se putea considera cîmpul între armături ca omogen.

Ţinînd seama că $\varepsilon=\varepsilon_r\,\varepsilon_0$, rezultă că capacitatea unui condensator este proporţională cu permitivitatea relativă a dielectricului dintre armăturile sale, deci relaţia (5-19) poate fi pusă şi sub forma

$$C=\varepsilon_r\,C_0, \qquad (5\text{-}19b)$$

în care $C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{4\pi d}$ reprezintă capacitatea, constantă, a aceluiaşi condensator în cazul cînd ar avea ca dielectric, între armături, vidul (practic aerul).

Oricare ar fi forma condensatorului, el se reprezintă simbolic aşa cum este arătat în fig. 5-9 c.

Exemplul 5-1. Un condensator plan este format din două plăci metalice circulare cu raza de 10 cm, aşezate la 0,4 cm una de alta. Se cere: a) capacitatea acestui condensator în microfarazi şi b) capacitatea condensatorului, cînd se introduce între armături o lamă de sticlă de 0,4 cm grosime, cunoscînd că constanta dielectrică relativă a sticlei este $\varepsilon_r=5$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția: a) Capacitatea condensatorului cu aer este

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi d},$$

deci

$$C = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 6{,}95 \cdot 10^{-5}\ \mu\text{F}.$$

b) Introducînd lama de sticlă, capacitatea condensatorului devine

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{4\pi d},$$

deci

$$C = \varepsilon_r \cdot 6{,}95 \cdot 10^{-5}\ \mu\text{F} = 5 \cdot 6{,}95 \cdot 10^{-5}\ \mu\text{F} = 34{,}75 \cdot 10^{-5} \cdot \mu\text{F}.$$

5-8. Condensatorul cilindric

Condensatorul cilindric este format din două suprafețe cilindrice, coaxiale, despărțite printr-un spațiu dielectric (fig. 5-10). Cîmpul electric apare în spațiul dintre cele două suprafețe, care constituie armăturile condensatorului, și are o direcție radială.

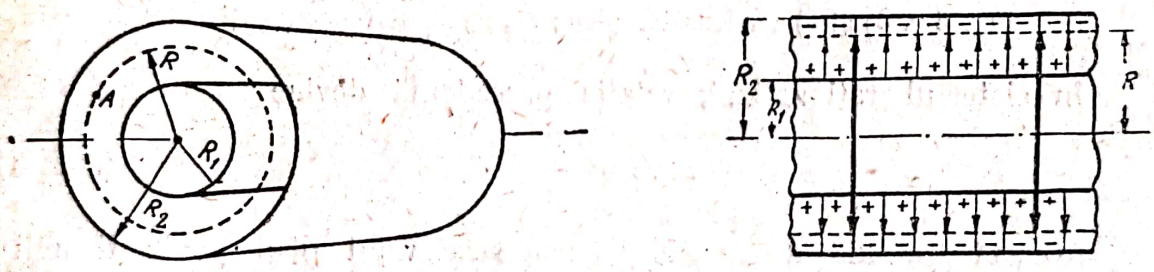


Fig. 5-10. Condensator cilindric

Condensator cilindric este, de exemplu, cablul electric cu un singur conductor, folosit pentru transportul energiei electrice (fig. 5-11). Un asemenea cablu se așază, de regulă, în pămînt sau sub apă. Conductorul de cupru (vîna cablului) prin care trece curentul corespunde cilindrului interior al condensatorului cilindric, armătura de plumb, care protejează vîna cablului împotriva umidității, corespunde cilindrului exterior al condensatorului cilindric, iar izolația conductorului de cupru, dielectricului acestui condensator.

Ne propunem să determinăm capacitatea condensatorului cilindric. Pentru aceasta, vom determina intensitatea cîmpului electric în punctul A, de pe o suprafață echipotențială de rază R.

Fluxul care străbate această suprafață echipotențială este

$$\psi = E S = E \cdot 2\pi R l.$$

Pe de altă parte, conform teoremei lui Gauss, avem

$$\psi = 4\pi \frac{Q}{\varepsilon};$$

de unde

$$E = \frac{2 \cdot Q}{\varepsilon R l} .$$

Intensitatea cîmpului este invers proporţională cu raza suprafeţei echipotenţiale. Rezultă că intensitatea maximă a cîmpului va fi pe suprafaţa cilindrului interior, iar intensitatea minimă, pe suprafaţa cilindrului exterior.

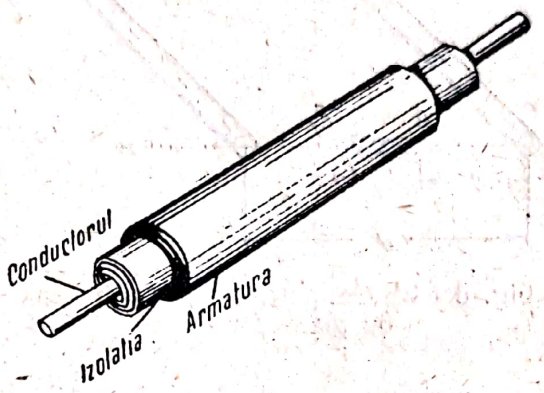


Fig. 5-11. Cablu electric cu o singură vînă.

Rezultă, ca expresie a capacităţii condensatorului cilindric,

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot \mathrm{d}R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2Q}{\varepsilon R l} \mathrm{d}R = \frac{2Q}{\varepsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{2Q}{\varepsilon l} (ln R_2 - ln R_1) =$$

$$= \frac{2Q}{\varepsilon \cdot l} ln \frac{R_2}{R_1} .$$

Rezultă, ca expresie a capacităţii condensatorului cilindric,

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon l}{2 ln \frac{R_2}{R_1}} . \qquad (5\text{-}20)$$

În sistemul raţionalizat, relaţia precedentă devine

$$C = \frac{2 \pi \varepsilon' l}{ln \frac{R_2}{R_1}} . \qquad (5\text{-}20\,a)$$

5-9. Capacitatea liniilor bifilare

Un interes deosebit în practică îl prezintă capacitatea unei linii bifilare şi intensitatea maximă a cîmpului electric care apare între fire.

Să însemnăm prin a distanţa între axele a două conductoare paralele (fig. 5-12) şi să ne propunem să determinăm intensitatea cîmpului electric într-un punct A, aşezat în acelaşi plan cu axele conductoarelor şi

situat la o distanță x de axul primului conductor. Vom presupune că distanța a dintre conductoare este cu mult mai mare decît raza secțiunii acestora. În acest caz, se poate considera că sarcina primului conductor este

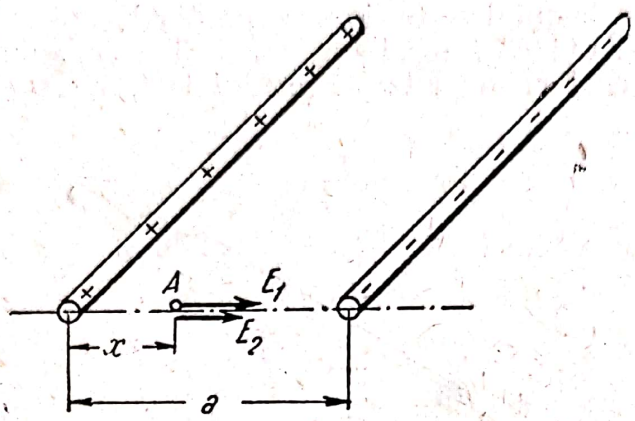


Fig. 5 - 12. Cîmpul electric între conductoare paralele

uniform repartizată pe suprafața sa, deci că intensitatea cîmpului electric, datorit acestui conductor, pe o suprafață cilindrică de rază x, este dată de relația

$$E_1 = \frac{2Q}{\varepsilon \cdot x \cdot l} .$$

Față de cel de al doilea conductor, punctul A se găsește la o distanță $a-x$. Intensitatea cîmpului produsă în punctul A de sarcina celui de al doilea conductor este

$$E_2 = \frac{2Q}{\varepsilon (a-x) l} .$$

Cei doi vectori E_1 și E_2 sînt paraleli și au același sens; prin urmare, rezultanta intensității cîmpului în punctul A este

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2Q}{\varepsilon l}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right) .$$

Tensiunea între conductoare este dată de relația

$$U = \int_{x=r}^{x=a-r} E \, dx .$$

Înlocuind pe E cu valoarea lui de mai sus, se obține

$$U = \frac{2Q}{\varepsilon l}\left[\int_r^{a-r} \frac{1}{x} dx + \int_r^{a-r} \frac{1}{a-x} dx\right] = \frac{2Q}{\varepsilon l}\Big[\ln (a-r) -$$

$$- \ln r + \ln (a-r) - \ln r \Big] = \frac{2Q}{\varepsilon l} 2 \ln \frac{a-r}{r} \approx \frac{4Q}{\varepsilon l} \ln \frac{a}{r} ,$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă se neglijează valoarea lui r față de a. Din această relație rezultă că

$$Q \approx U \frac{\varepsilon l}{4 \ln \frac{a}{r}} .$$

Deci, capacitatea unei linii bifilare este

$$C = \frac{Q}{U} \approx \frac{\varepsilon l}{4 \ln \frac{a}{r}} \qquad (5\text{-}21)$$

sau, sub formă rațională,

$$C \approx \frac{\pi \varepsilon' l}{\ln \frac{a}{r}} . \qquad (5\text{-}21\,a)$$

Intensitatea cîmpului atinge valoarea sa maximă pe suprafața conductorului, cînd $x = r$ și

$$E = \frac{2Q}{\varepsilon l r} = \frac{U}{2 r \ln \frac{a}{r}} . \qquad (5\text{-}22)$$

5-10. Descărcări disruptive și rigiditate dielectrică

Cînd tensiunea U aplicată între cele două armături ale unui condensator se mărește, cantitatea de electricitate cu care se încarcă condensatorul crește, conform relației (5-18), proporțional cu această tensiune, și, în aceeași măsură, crește și cîmpul electric din dielectricul condensatorului. Dacă însă tensiunea aplicată condensatorului, deci cîmpul său electric, depășește o anumită limită, se constată că izolantul cedează brusc, fiind străpuns printr-un arc electric, care produce descărcarea directă a sarcinilor electrice de pe cele două armături. Asemenea descărcări se numesc *descărcări disruptive*.

În electricitatea atmosferică, fulgerele constituie descărcări disruptive între sarcinile electrice cu care sînt încărcați norii, iar trăsnetele, descărcări disruptive între nori și pămînt.

Valoarea maximă a diferenței de potențial care poate fi suportată de un dielectric, pe mm de grosime, poartă numele de *rigiditate dielectrică* și se exprimă în kV/mm. Rigiditatea dielectrică nu este o mărime constantă pentru dielectricul respectiv. Ea depinde, între altele, de grosimea stratului de dielectric și de forma acestuia. Rigiditatea dielectrică se determină experimental. În acest scop, dielectricul respectiv se așază între două plăci metalice (sau între două sfere de un anumit diametru cînd dielectricul este lichid), între care se mărește treptat tensiunea, pînă cînd se produce străpungerea. Distanța între plăci (sau între sfere) este fixată prin norme. Orice dielectric, folosit ca material izolant, trebuie să aibă o rigiditate dielectrică care să depășească tensiunea pentru care este

Scanned with OKEN Scanner

destinat materialul. În tabela 5-1 se dă rigiditatea dielectrică a unor corpuri izolante mai des utilizate.

Tabela 5-1

Rigiditatea dielectrică a diferite corpuri

Materialul	Rigiditatea dielectrică în kV/mm	La grosimea în mm
Hîrtie parafinată	10,0 — 25,0	0,15
Aer	3,0	—
Ulei mineral	5,0 — 15,0	25
Marmură	3,0 — 4,0	10
Mică	80,0 — 200,0	0,05
Ardezie	11,5 — 3,0	10
Sticlă	10,0 — 40,0	—
Micanită	5,0 — 20,0	3
Carton electrotehnic (preșpan)	9,0 — 14,0	1
Porțelan	6,0 — 15,0	20

Exemplul 5-2. Dielectricul unui condensator plan, făcut din hîrtie parafinată, are o grosime de 0,2 mm. Să se determine tensiunea nominală a condensatorului, cunoscînd că această tensiune trebuie să fie jumătate din tensiunea de străpungere.

Soluția: Luînd din tabela 5-1 rigiditatea minimă a hîrtiei parafinate, tensiunea de străpungere este

$$U_{st} = 10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 = 2\,000 \text{ V} \cdot$$

De aici rezultă tensiunea nominală,

$$U_n = \frac{U_{st}}{2} = 1\,000 \text{ V} \cdot$$

5-11. Energia înmagazinată în cîmpul electric

Pentru a încărca un condensator trebuie efectuat un lucru mecanic, necesar ridicării potențialului cantității de electricitate cu care se încarcă condensatorul.

Să însemnăm cu Q cantitatea de electricitate la un moment dat a condensatorului și cu U tensiunea respectivă între armături. Pentru a mări sarcina pozitivă Q cu cantitatea $\mathrm{d}Q$, pe care presupunem că o sustragem de pe armătura negativă și, trecînd-o prin dielectric, o depunem pe armătura pozitivă, va trebui efectuat, conform relației (1-18), un lucru mecanic

$$\mathrm{d}A = U\,\mathrm{d}Q = U\,C\,\mathrm{d}U = \mathrm{d}W \cdot$$

Cînd se încarcă un condensator, odată cu sarcina tensiunea lui se ridică de la 0 la U. Urmează că energia consumată pentru încărcare este

$$W = C\int_0^U U\,\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\,C\,U^2 = \frac{1}{2}\,Q\,U = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} \cdot \qquad (5\text{-}23)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această energie se găseşte, sub formă potenţială, în cîmpul electrostatic stabilit între armăturile condensatorului, şi ea poate fi recuperată în momentul descărcării lui.

Ţinînd seama că într-un condensator plan $Q = \sigma S = \frac{\varepsilon E}{4\pi} S$ şi $C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, relaţia (5-23) ia forma

$$W = \frac{Sd E^2 \varepsilon}{8\pi} = \frac{V E^2 \varepsilon}{8\pi}, \qquad (5\text{-}24)$$

în care V reprezintă volumul, dintre armături, al dielectricului în care apare cîmpul electric. Energia pe unitate de volum a cîmpului electric (densitatea de energie a cîmpului electric) este deci

$$W_0 = \frac{E^2 \varepsilon}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi}. \qquad (5\text{-}25)$$

În sistemul raţionalizat, relaţiile (5-24) şi (5-25) iau forma următoare

$$W = \frac{V E^2 \varepsilon'}{2} \quad \text{şi} \quad W_0 = \frac{E^2 \varepsilon'}{2} = \frac{ED}{2}.$$

Exemplul 5-3. Un condensator de 1 μF este supus unei tensiuni de 5000 V. Cu cîtă energie se încarcă condensatorul?

Soluţia: Conform ecuaţiei (5-23) avem

$$W = \frac{1}{2} C U^2.$$

Deci

$$W = \frac{1}{2} 1 \cdot 10^{-6} \cdot 5000^2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 5^2 = 12{,}5 \text{ J}.$$

5-12. Legarea condensatoarelor

Un grup de mai multe condensatoare constituie ceea ce numim o *baterie* de condensatoare. Un asemenea grup poate fi legat, ca şi rezistenţele şi pilele electrice, în serie, în paralel şi în serie-paralel.

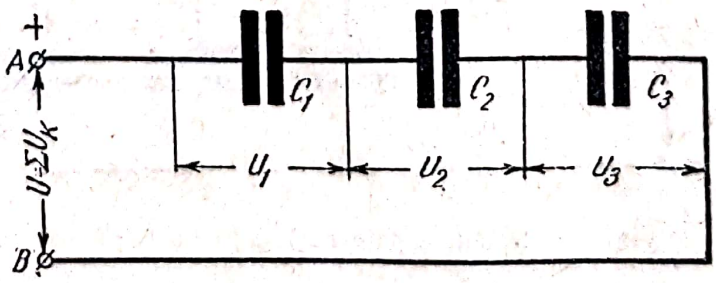


Fig. 5-13. Condensatoare legate în serie

a) **Legarea în serie.** Fie condensatoarele C_1, C_2, C_3, montate în serie pe tensiunea totală U (fig. 5-13). Sarcina electrică cu care se

încarcă fiecare condensator are aceeași valoare Q. Într-adevăr, sarcina $+Q$ de pe armătura pozitivă a condensatorului C_1 implică apariția sarcinii $-Q$ pe armătura negativă a aceluiași condensator. Această din urmă sarcină nu poate apare decît simultan cu o sarcină $+Q$ pe armătura pozitivă a condensatorului C_2 și așa mai departe.

Tensiunile sau diferențele de potențial ale fiecărui condensator se stabilesc aplicînd formula (5-18)

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

Tensiunea totală a bateriei fiind egală cu tensiunile parțiale ale condensatoarelor care o cumpun, vom avea

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q}{C}.$$

Rezultă că cele trei condensatoare legate în serie sînt echivalente cu un condensator unic, avînd o capacitate C dată de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Concluzia poate fi generalizată la n condensatoare legate în serie, capacitatea echivalentă fiind în acest caz dată de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i}. \qquad (5\text{-}26)$$

Sarcina electrică cu care se încarcă fiecare condensator în parte este egală cu aceea cu care s-ar încărca condensatorul echivalent, adică $Q = CU$.

b) **Legarea în paralel.** În acest caz, cele trei condensatoare găsindu-se sub aceeași tensiune U (fig. 5-14), se vor încărca cu sarcini diferite, date de relațiile

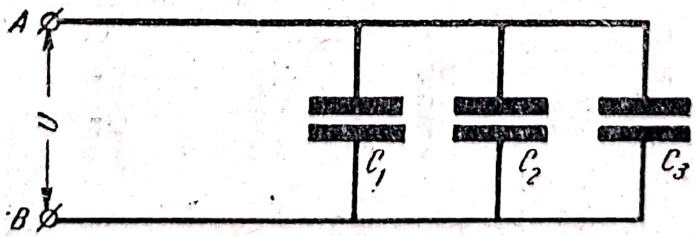


Fig. 5 - 14. Condensatoare legate în paralel

$$Q_1 = C_1 U; \quad Q_2 = C_2 U; \quad Q_3 = C_3 U.$$

Deci sarcina totală a bateriei este

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U(C_1 + C_2 + C_3) \cdot$$

Capacitatea condensatorului echivalent bateriei celor trei condensatoare legate în serie este

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \cdot$$

În cazul a n condensatoare legate în serie, condensatorul echivalent va avea o capacitate dată de relația

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \qquad (5\text{-}27)$$

și o sarcină dată de

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \cdot \qquad (5\text{-}28)$$

c) **Legarea în serie-paralel (montaj mixt).** Problemele de acest fel se rezolvă aplicînd proprietățile montajelor în serie și în paralel.

Astfel, în cazul celor 6 condensatoare legate ca în fig. 5-15, con-

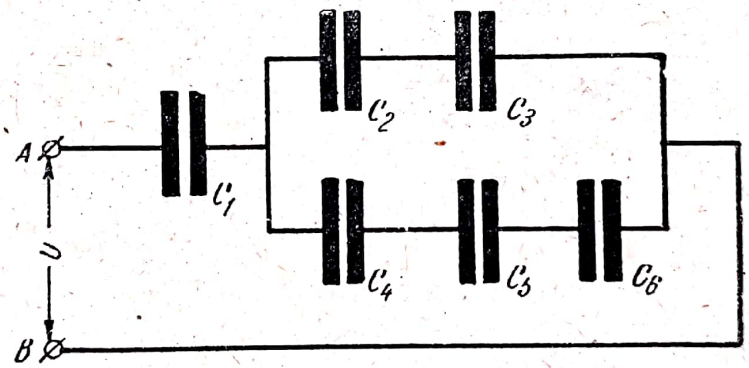


Fig. 5-15. Condensatoare legate în serie-paralel

densatoarele C_2 și C_3 legate în serie corespund condensatorului echivalent dat de relația

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

iar condensatoarele C_4, C_5 și C_6, condensatorului echivalent

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6} \cdot$$

Condensatoarele echivalente C' și C'' fiind în paralel, corespund unui nou condensator echivalent $C''' = C' + C''$. În sfîrșit, condensatorul echivalent total C este dat de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'''} \cdot$$

Exemplul 5-4. Se dă sistemul complex din fig. 5-15 în care $C_1 = 1{,}5\ \mu F$; $C_2 = 1\ \mu F$ şi $C_3 = 2{,}5\ \mu F$. Tensiunea totală U aplicată la capetele sistemului este de 10 000 V. Se cer sarcinile şi tensiunile fiecărui condensator elementar.

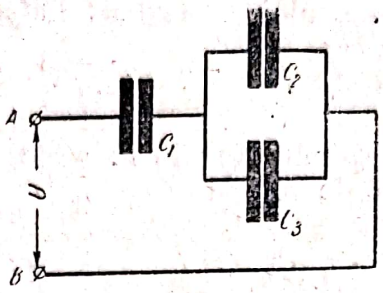


Fig. 5-16. Schema la exemplul 5-4

Soluţia: $C_{23} = C_2 + C_3 = 1 + 2{,}5 = 3{,}5\ \mu F$. Capacitatea totală echivalentă

$$C = \frac{C_1 \cdot C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{1{,}5 \cdot 3{,}5}{1{,}5 + 3{,}5} = \frac{5{,}25}{5} = 1{,}05\ \mu F\ .$$

Sarcina electrică

$$Q = Q_1 = Q_{23} = 1{,}05 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10\,000\ V = 1{,}05 \cdot 10^{-2}\ C\ .$$

Dar

$$C_1 U_1 = C\,(U_1 + U_2),$$

deci

$$\frac{U_1}{U_1 + U_2} = \frac{C_{23}}{C_1 + C_{23}},$$

de unde

$$U_1 = \frac{3{,}5}{5} \cdot 10\,000 = 7\,000\ V\ .$$

Rezultă

$$U_2 = U - U_1 = 10\,000 - 7\,000 = 3\,000\ V\ .$$

Sarcinile condensatorului C_2 şi C_3 sînt

$$Q_2 = 3\,000 \cdot 1 \cdot 10^{-6} + 0{,}3 \cdot 10^{-2}\ C,$$

$$Q_3 = 3\,000 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 0 \cdot 75 \cdot 10^{-2}\ C.$$

Verificare

$$Q_3 + Q_2 = Q = 1{,}05 \cdot 10^{-2}\ C.$$

5-13. Capacitatea condensatorului cu dielectric mixt

Să presupunem un condensator plan între plăcile căruia există doi dielectrici diferiţi, a căror suprafaţă de separaţie constituie o suprafaţă echipotenţială (fig. 5-17).

Pentru a determina capacitatea unui asemenea condensator și intensitatea cîmpului electric din fiecare dielectric, vom presupune că suprafața de separație reprezintă o suprafață infinit de subțire de conductor. Condensatorul cu dielectric mixt se poate considera, în acest caz, ca format din două condensatoare legate în serie, ale căror capacități, date de relația (5-19), sînt respectiv

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{4\pi d_1} \text{ și } C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{4\pi d_2},$$

în care ε_1 și ε_2 reprezintă permitivitățile, iar d_1 și d_2, grosimile dielectricilor.

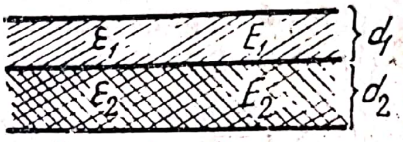


Fig. 5-17. Condensator cu doi dielectrici

Conform relației (5-26), capacitatea condensatoarelor este

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ținînd seama că

$$Q = CU = C_1 U_1 = C_2 U_2,$$

rezultă că

$$U_1 = U\frac{C}{C_1} = U\frac{C_2}{C_1 + C_2} = U\frac{\frac{\varepsilon_2 S}{4\pi d_2}}{\frac{\varepsilon_1 S}{4\pi d_1} + \frac{\varepsilon_2 S}{4\pi d_2}} = U\frac{\varepsilon_{r2} d_1}{\varepsilon_{r1} d_2 + \varepsilon_{r2} d_1} \quad (5\text{-}29)$$

și

$$U_2 = U\frac{\varepsilon_{r1} d_2}{\varepsilon_{r1} d_2 + \varepsilon_{r2} d_1}. \quad (5\text{-}30)$$

Intensitatea cîmpului electric în cei doi dielectrici este, respectiv,

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = U\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} d_2 + \varepsilon_{r2} d_1} \quad (5\text{-}31)$$

și

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = U\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1} d_2 + \varepsilon_{r2} d_1}. \quad (5\text{-}32)$$

Din ultimile două relații rezultă că

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}, \quad (5\text{-}33)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică, *intensităţile cîmpului electric, în diferitele straturi ale dielectricului mixt, sînt invers proporţionale cu permitivităţile relative ale dielectricilor respectivi.*

Exemplul 5-5. Se dă un condensator plan, ale cărui armături, aşezate la o distanţă de 3 cm una de alta, sînt supuse unei tensiuni de 45 000 V. Se cere să se determine cîmpul electric în condensator, în următoarele ipoteze: *a*) dielectricul este aerul, *b*) dielectricul este compus dintr-un strat de mică de 2 cm, strat a cărui constantă dielectrică relativă $\varepsilon_r = 5{,}2$ şi un strat de aer de 1 cm.

Soluţia: a) în cazul dielectricului format numai din aer

$$E = \frac{U}{d} = \frac{45\,000}{3} = 15\,000 \text{ V/cm}.$$

b) în cazul dielectricului mixt, intensitatea cîmpului în stratul de aer este, conform relaţiei (5-31), dacă ţinem seama că $\varepsilon_{r1} = 1$ şi $\varepsilon_{r2} = 5{,}2$,

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + d_2 \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{45\,000}{1 + 2\frac{1}{5{,}2}} = 32\,500 \text{ V/cm}.$$

Intensitatea cîmpului în stratul de mică, conform relaţiei (5-33), este

$$E_2 = E_1 \cdot \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = 32\,500 \frac{1}{5{,}2} = 6\,250 \text{ V/cm}.$$

Din exemplul examinat rezultă că într-un strat de aer, aflat împreună cu un dielectric de permitivitate relativ mare sub o diferenţă de potenţial ridicată, pot apare intensităţi ridicate ale cîmpului electric care pot da naştere, în acest strat, unei descărcări disruptive. Descărcarea în aer este însoţită de apariţia unor soluţii de acid azotic, care cu timpul pot provoca distrugerea izolaţiei unei întregi instalaţii. Din această cauză, înfăşurările maşinilor şi transformatoarelor electrice sînt supuse unei impregnări cu lac izolant, executată în vid, în scopul îndepărtării aerului din izolaţie.

5-14. Tipuri industriale de condensatoare

Condensatoarele se întrebuinţează în special în curent alternativ şi se execută în următoarele tipuri constructive: condensatoare pentru curenţi tari şi condensatoare pentru curenţi slabi.

Condensatoarele pentru curenţi tari se construiesc, de obicei, sub formă plană, din foiţe de staniol sau de aluminiu, între care se intercalează hîrtie parafinată sau mică. Foiţele fără soţ, legate împreună, constituie una din armăturile condensatorului, iar cele cu soţ, cealaltă armătură (fig. 5-18). Se obţin, în modul acesta, elemente de condensatoare cu capacităţi de ordinul sutelor de microfarazi, putînd rezista la sute de volţi.

Condensatoarele de înaltă tensiune se obţin prin legarea în serie a unor asemenea elemente de condensatoare. Ele sînt aşezate în vase pline cu ulei şi închise ermetic.

Scanned with OKEN Scanner

Condensatoarele pentru curenți tari funcționează obișnuit sub frecvența industrială de 50 Hz a curentului alternativ (vezi par. 8-2) și servesc, în special, pentru ameliorarea factorului de putere al rețelelor (vezi par. 9-14).

Condensatoarele pentru curenți slabi sînt utilizate în telecomunicații (radio, televiziune, telegrafie și telefonie fără fir etc.), în semnalizări

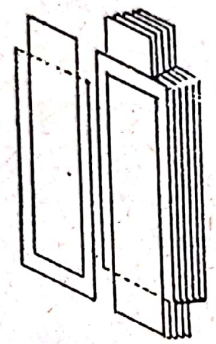


Fig. 5-18. Condensator plan din foițe de metal și hîrtie parafinată

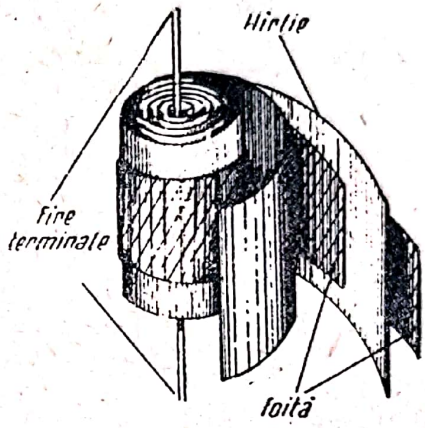


Fig. 5-19. Condensator cu hîrtie pentru curenți slabi (modul de înfășurare)

și în telecomenzi și funcționează, de regulă, sub frecvențe înalte și foarte înalte.

După rolul pe care îl îndeplinesc în circuite, condensatoarele pentru curenți slabi se construiesc după principii diferite. Se întîlnesc, mai des, următoarele tipuri de asemenea condensatoare:

a) **Condensatoare cu hîrtie.** Se fabrică, de obicei, prin înfășurarea în rulou a două benzi de foițe de aluminiu, avînd între ele un strat de hîrtie parafinată (fig. 5-19). Benzile de aluminiu constituie armăturile condensatorului și de ele se leagă firele terminale sau bornele acestuia.

După înfășurare, ruloul este impregnat cu ulei, cu vaselină sau cu alt dielectric și este închis, ermetic, într-o cutie metalică.

b) **Condensatoare electrolitice.** Aceste condensatoare sînt formate din doi electrozi de aluminiu și nu sînt utilizate decît în circuite cu polaritate constantă.

Electrodul pozitiv (anodul), care constituie una din armăturile condensatorului, este acoperit, printr-un anumit procedeu chimic, cu o peliculă foarte subțire de oxid de aluminiu. Electrodul negativ (catodul) are forma unui pahar (fig. 5-20), care conține electrolitul împreună cu electrodul pozitiv, și servește numai pentru a creea contactul cu electrolitul. Rolul de dielectric îl îndeplinește pelicula de oxid de aluminiu, iar acela de a doua armătură, suprafața electrolitului în contact cu această peliculă.

Electrolitul este format dintr-o soluție de acid boric în apă, la care se adaogă amoniac sau borax.

Datorită rigidității dielectrice ridicate a peliculei de oxid de aluminiu, condensatoarele electrolitice au o capacitate specifică (capacitate pe unitate de volum) foarte mare. Ele se construiesc pentru capacități de la ordinul zecilor pînă la acela al miilor de microfarazi.

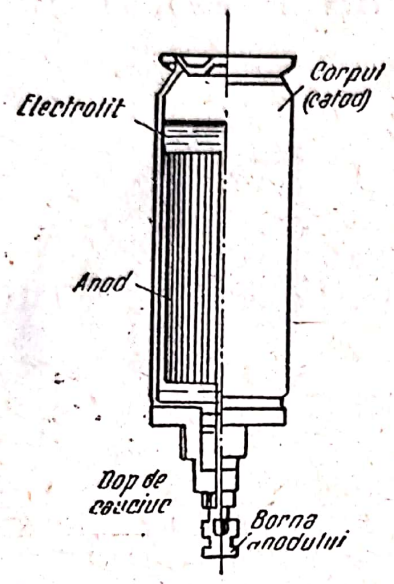


Fig. 5-20. Condensator electrolitic

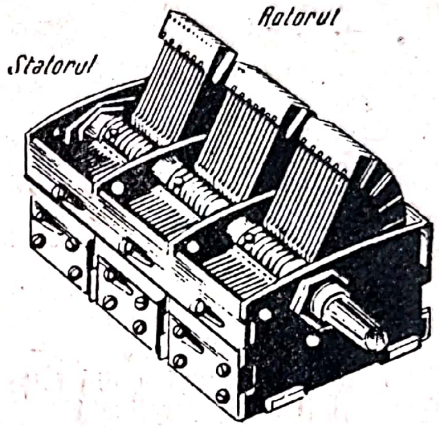


Fig. 5-21. Condensator variabil triplu

Deoarece rigiditatea ridicată a peliculei dielectrice nu este asigurată decît atunci cînd pe anod se aplică un potențial pozitiv, iar pe catodul în formă de pahar un potențial negativ, condensatoarele electrolitice nu pot fi întrebuințate decît atunci cînd tensiunea nu-și schimbă semnul.

c) **Condensatoare variabile.** Aceste condensatoare se fac, de obicei, cu armăturile plane și ca dielectric folosesc aerul.

Un condensator variabil (fig. 5-21) se compune dintr-o parte fixă (statorul), formată dintr-un grup de plăci metalice plane și paralele, care constituie una din armături, și dintr-o parte mobilă (rotorul), formată dintr-un alt grup de plăci plane și paralele, care se pot deplasa între plăcile statorului și care constituie cealaltă armătură. Prin rotirea plăcilor mobile, ele pătrund mai mult sau mai puțin profund între plăcile fixe variindu-se astfel capacitatea condensatorului.

5-15. Încărcarea condensatorului

Fenomenele care însoțesc trecerea curentului printr-un circuit se numesc fenomene permanente și regimul, *regim permanent*, atunci cînd curentul rămîne invariabil pe o perioadă de timp mai mult sau mai puțin îndelungată.

La închiderea unui circuit, curentul nu atinge niciodată instantaneu valoarea sa finală, numită *valoare permanentă,* ci îi trebuie, pentru aceasta, un anumit timp, de regulă foarte scurt. De asemenea, la deschiderea unui circuit parcurs de curent, acesta nu scade instantaneu la zero, ci într-un interval de timp, de regulă foarte scurt. Prin urmare, atunci cînd un circuit este închis sau deschis apare un regim de funcționare numit *regim tranzitoriu*. Orice regim permanent este precedat, la stabilire, și urmat, la întrerupere, de un regim tranzitoriu.

Ne propunem să stabilim legea după care se încarcă un condensator atunci cînd este supus unei tensiuni electrice, prin închiderea circuitului său de alimentare, adică să stabilim regimul tranzitoriu de încărcare al condensatorului.

Să presupunem că legăm, cu ajutorul întreruptorului 1, condensatorul descărcat C, la bornele sursei E (fig. 5-22). În circuit este legată și rezistența R. Considerăm rezistența sursei neglijabilă, deci tensiunea U la bornele sursei independentă de sarcină.

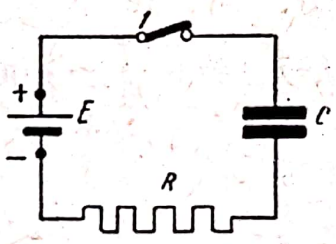


Fig. 5-22. Circuitul de încărcare al condensatorului

Dacă notăm cu i valoarea curentului de încărcare al condensatorului și cu u_c tensiunea, între armăturile condensatorului, la un moment dat, vom avea, aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff,

$$U - u_c = i R \,. \tag{5-34}$$

Pe de altă parte, notînd cu q sarcina variabilă a condensatorului la încărcare, vom avea, conform relației (5-18),

$$q = C u_c$$

și curentul de încărcare i al condensatorului va fi dat de relația

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} \,.$$

Din relația (5-34) obținem

$$i = \frac{U - u_c}{R} \,. \tag{5-35}$$

Prin urmare, din ultimile egalități scoatem relația

$$U - u_c = RC\frac{du_c}{dt},$$

care poate fi pusă sub forma

$$\frac{du_c}{U-u_c} = \frac{dt}{RC}. \qquad (5\text{-}36)$$

Diferențiind numitorul membrului întîi al relației (5-36), obținem

$$d(U-u_c) = -du_c.$$

Prin urmare

$$\frac{d(U-u_c)}{U-u_c} = -\frac{dt}{RC}.$$

Integrînd această ecuație diferențială, obținem

$$\ln(U-u_c) = -\frac{t}{RC} + \ln K,$$

de unde

$$U - u_c = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

sau

$$u_c = U - Ke^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (5\text{-}37)$$

Constanta de integrare K se determină observînd că în primul moment al închiderii circuitului, cînd $t = 0$, $u_c = 0$, deci

$$K = U$$

și expresia (5-37) devine

$$u_c = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \qquad (5\text{-}38)$$

Prin urmare, tensiunea între armăturile condensatorului nu atinge instantaneu valoarea finală U, ci crește după curba exponențială *1* din fig. 5-23.

Din relațiile (5-35) și (5-38) rezultă că

$$i = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (5\text{-}39)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, curentul de încărcare al condensatorului descreşte treptat, după curba exponenţială 2 din fig. 5-23. Curentul atinge valoarea maximă în momentul conectării, cînd

$$I_{max} = \frac{U}{R},$$

şi apoi descreşte treptat către zero.

Produsul RC determină viteza de creştere a diferenţei de potenţial u_0 între armăturile condensatorului [relaţia (5-38)] sau viteza de scădere a

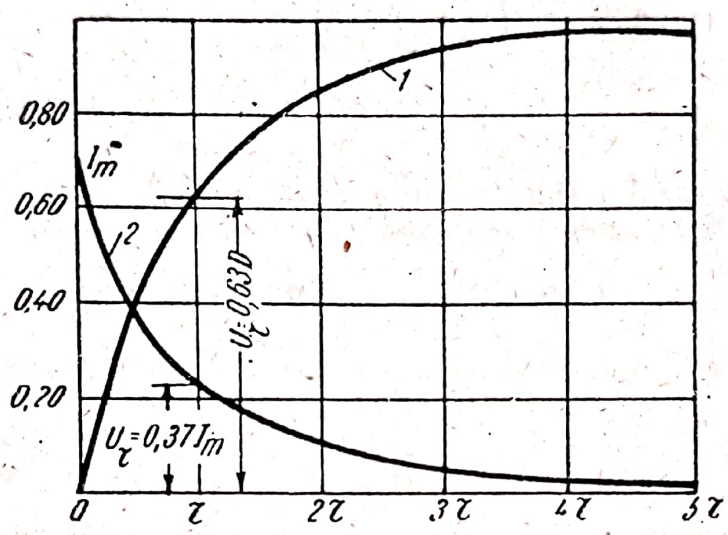


Fig. 5-23. Diagrama de variaţie a tensiunii şi a curentului, în timpul încărcării condensatorului.

curentului de încărcare [relaţia (5-39)]. El poartă numele de *constantă de timp* a circuitului şi se notează cu τ. Deci

$$\tau = RC.$$

Constanta de timp se măsoară în secunde, după cum rezultă din următoarea ecuaţie de dimensiuni

$$[\tau] = [R \cdot C] = \left[\frac{coulomb}{V} \cdot \Omega\right] = \left[\frac{A \cdot s \cdot \Omega}{V}\right] = s.$$

În timpul $t = \tau$, tensiunea la bornele condensatorului creşte de la zero, la 0,63 U, conform relaţiei

$$u_c\tau = U\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0{,}63\,U,$$

în vreme ce curentul de încărcare se micşorează de $e \approx 2{,}72$ ori, conform relaţiei

$$i_\tau = \frac{U}{Re} \approx \frac{I_m}{2{,}72} = 0{,}37\,I_m.$$

5-16. Descărcarea condensatorului

Să presupunem că legăm armăturile unui condensator încărcat, avînd o tensiune U între armături, într-un circuit în care se găsește și o rezistență R (fig. 5-24). Condensatorul se va descărca pe rezistența R.

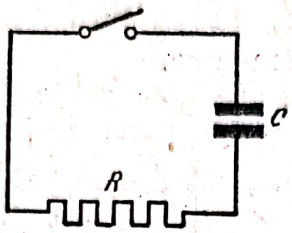


Fig. 5-24. Circuitul de descărcare al condensatorului

Deosebirea de cazul tratat în par. precedent constă în faptul că nu mai există în circuit tensiunea U a sursei. Prin urmare, ecuația (5-37) devine

$$u_c = -Ke^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (5\text{-}40)$$

Constanta K o determinăm ținînd seama de noile condiții inițiale. La descărcare, cînd $t = 0$, $u_c = U_o$, deci $-K = U_o$ și

$$u_c = U_o e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (5\text{-}41)$$

Așadar, tensiunea dintre armăturile condensatorului scade după curba exponențială I din fig. 5-25.

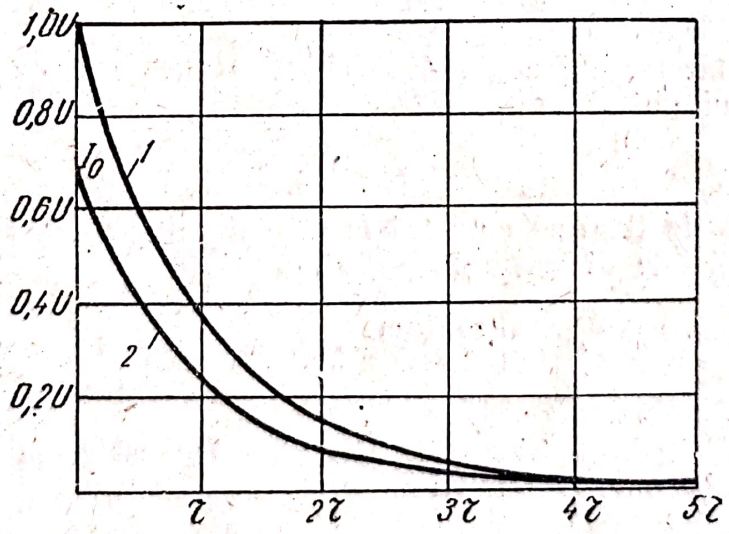


Fig. 5-25. Diagrama de variație a tensiunii și a curentului, în timpul descărcării condensatorului

Curentul de descărcare este dat de relația

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (5\text{-}42)$$

Prin urmare, curentul variază proporțional cu tensiunea dintre armături (curba 2 din fig. 5-25). Valoarea maximă a curentului are loc în momentul inițial, cînd $u_c = U_0$,

$$I_{max} = \frac{U_0}{R} = I_0 .$$

Energia electrică acumulată în cîmpul electric al condensatorului se consumă la descărcare, sub formă de căldură, în rezistența circuitului.

Un condensator electric se poate descărca și spontan, prin dielectric, deoarece orice dielectric posedă totdeauna o conductanță care, deși se neglijează practic, totuși nu este nulă. Descărcarea condensatorului prin dielectricul său se numește *autodescărcare* sau *descărcare spontană.*

Dacă notăm cu R_d rezistența dată a dielectricului, constanta de timp a descărcării prin dielectric, care este dată de relația

$$\tau_d = R_d C ,$$

nu depinde nici de forma armăturilor, nici de distanța dintre ele, ci numai de valoarea capacității C.

De pildă, într-un condensator plan, la care

$$C = \frac{\varepsilon S}{4 \pi d}$$

și

$$R_d = \frac{d}{\gamma S} ,$$

constanta de timp este

$$\tau_d = R_d C = \frac{d}{\gamma S} \cdot \frac{\varepsilon S}{4 \pi d} = \frac{\varepsilon}{4 \pi \gamma} = \frac{\varepsilon \varrho}{4 \pi} .$$

În consecință, constanta de timp a descărcării spontane a condensatorului depinde numai de proprietățile fizice ale dielectricului dintre armături, adică de produsul factorilor ε și ϱ.

De exemplu, în cazul unui condensator cu dielectricul constituit din plăci de mică, cu $\varepsilon_r = 5$ și cu $\varrho = 10^{14}\ \Omega\,m$, constanta de timp a descărcării spontane este

$$\tau_d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \varrho}{4 \pi} = \frac{1}{4 \pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{C}{V \cdot m} \cdot 5 \cdot 10^{12}\ \Omega \cdot m \approx 50\ s.$$

CAPITOLUL VI

ELECTROMAGNETISM

6-1. Cîmpul magnetic

Dacă apropiem un ac magnetic de un conductor parcurs de curent, se constată că acul se deplasează din poziția sa de echilibru, cu atît mai accentuat, cu cît distanța față de conductor este mai mică și cu cît intensitatea curentului din conductor este mai mare. Dacă se întrerupe curentul în conductor, acul magnetic revine în poziția sa inițială de echilibru, adică în direcția meridianului magnetic. Prin urmare, acul magnetic este supus acțiunii unor forțe variabile în spațiu, care durează atîta timp cît durează curentul. Aceste forțe poartă numele de *forțe magnetice* și spațiul în care ele iau naștere, împreună cu forțele respective, de *cîmp magnetic*.

Experiența dovedește că nu poate exista curent electric fără să existe, simultan, cîmp magnetic, și invers. Deoarece constatăm prezența unui cîmp magnetic și în jurul magneților permanenți, acest din urmă cîmp, după cum vom arăta mai tîrziu (par. 6-9), este produs de curenții moleculari care iau naștere prin orientarea mișcării electronilor, pe orbitele atomilor, în planuri perpendiculare pe axul magnetului.

Cîmpul magnetic este una din formele de mișcare a materiei. Curentul electric și cîmpul magnetic pot fi considerate ca două aspecte diferite ale aceluiași fenomen, fenomenul electromagnetic, care însoțește orice deplasare de energie electrică de-a lungul unui conductor, și are loc, parte în interiorul conductorului, parte în mediul înconjurător.

Pentru a reprezenta grafic intensitatea și direcția unui cîmp magnetic, se utilizează *liniile de inducție magnetică* sau *liniile de forță magnetică*.

Se numesc linii de inducție sau de forță magnetică, liniile trasate într-un cîmp a căror direcție este dată, în fiecare punct, de direcția în care se așază acul magnetic plasat în acel punct.

Urmează că o linie de inducție magnetică se trasează în așa fel încît, în fiecare punct al spațiului, ea să fie tangentă la direcția forței magnetice din acel punct. S-a convenit a se lua ca sens pozitiv al cîmpului magnetic sensul în care se deplasează vîrful nord al acului magnetic aflat în cîmp.

În fig. 6-1 sînt reprezentate liniile de forță ale cîmpului produs de un magnet permanent.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate materializa aspectul liniilor de forță magnetică, de pildă din jurul unui conductor rectiliniu, de secțiune circulară, parcurs de curent, cu ajutorul piliturii de fier, presărate pe un carton străbătut de conductor

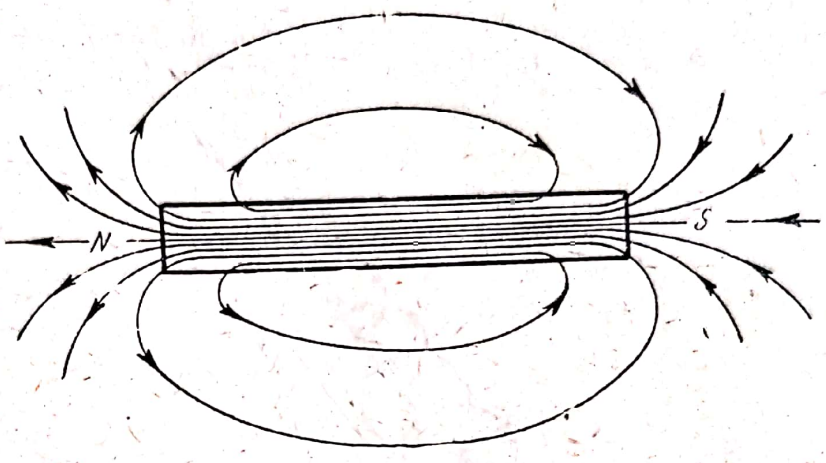


Fig. 6-1. Cîmpul magnetic produs de un magnet permanent

(fig. 6-2). Dacă poziția cartonului este orizontală și conductorul vertical, pilitura de fier se așază pe cercuri concentrice, cu centrul în punctul în care axul conductorului străbate planul cartonului. Deci de-a lungul con-

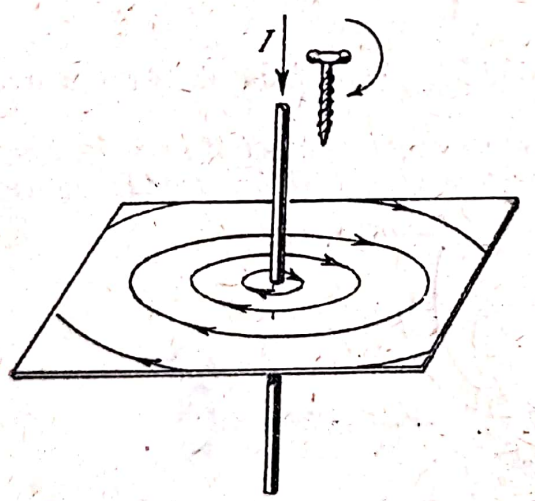


Fig. 6-2. Cîmpul magnetic plan al unui conductor rectiliniu parcurs de curent

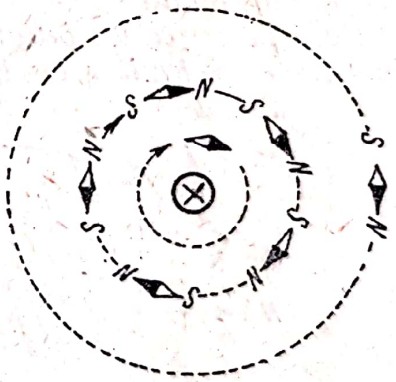


Fig. 6-3. Forma circulară a liniilor de forță magnetice din jurul conductorului rectiliu

ductorului rectiliniu, de secțiune circulară, liniile de forță ale cîmpului magnetic apar sub forma unor cercuri concentrice, cu centrul pe axul conductorului (fig. 6-2 și 6-3). Aceste cercuri sînt cu atît mai dese, cu cît raza lor este mai mică.

În fig. 6-4 sînt arătate liniile de forță de-a lungul conductorului liniar. Ele formează suprafețe cilindrice, coaxiale cu axul conductorului.

În fig. 6-5 sînt reprezentate liniile de forță magnetice ale unei bobine (solenoid) parcursă de curent. După cum rezultă din figurile de mai sus,

Scanned with OKEN Scanner

liniile de forță magnetice formează curbe închise, lipsite de început și sfîrșit, spre deosebire de liniile de forță electrice (par. 1-6) care nu alcătuiesc niciodată curbe închise, ci pornesc de la o sarcină pozitivă pentru a se termina la o sarcină negativă.

Experimental se dovedește că odată cu schimbarea sensului curentului prin conductor, se schimbă și sensul liniilor de inducție. Legătura dintre

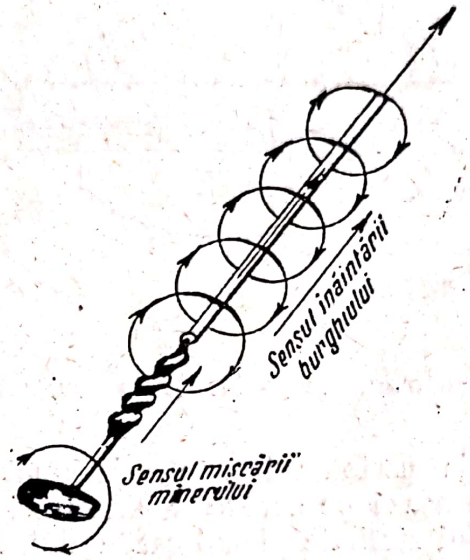


Fig. 6-4. Cîmpul magnetic de-a lungul unui conductor rectiliniu parcurs de curent

sensul curentului și sensul liniilor de inducție este dată de următoarea *regulă a burghiului:*

Dacă facem ca un burghiu să se deplaseze pe conductor în sensul curentului, sensul liniilor de inducție ale cîmpului magnetic, produs de curent, este dat de sensul mișcării de rotație pe care trebuie să o dăm mînerului burghiului.

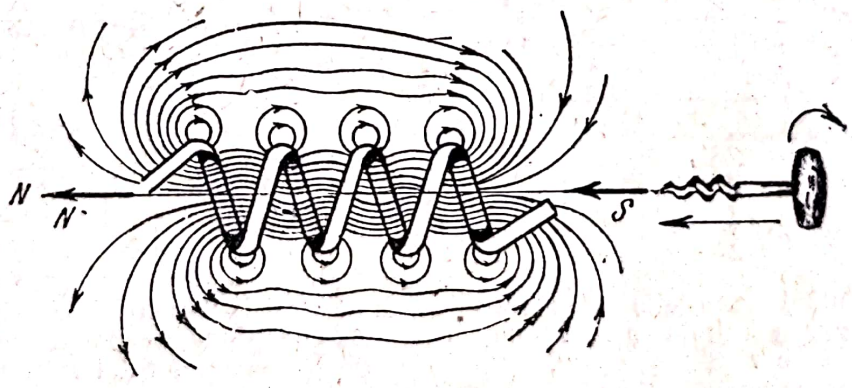


Fig. 6-5. Cîmpul magnetic al unui solenoid parcurs de curent

În cazul unui solenoid (fig. 6-5), regula burghiului se poate enunța astfel:

Sensul cîmpului este dat de sensul de înaintare al unui burghiu, al cărui mîner este rotit în sensul curentului din conductorul solenoidului.

Cunoscînd sensul cîmpului, regulile date mai sus se pot aplica și pentru determinarea sensului curentului în conductor.

6-4. Acțiunea cîmpului magnetic asupra conductorului parcurs de curent

Dacă un conductor mobil, așezat într-un cîmp magnetic omogen perpendicular pe direcția cîmpului, este parcurs de curent electric, conductorul este solicitat să se deplaseze paralel cu el însuși, deci perpendicular pe direcția liniilor de forță ale cîmpului. Sensul forței care solicită conductorul, deci sensul în care se deplasează conductorul este dat de următoarea regulă, numită *regula mîinii stîngi:*

Dacă se ține mîna stîngă astfel ca liniile de forță să intre în palmă și cele patru degete să fie îndreptate în sensul curentului, atunci degetul cel mare, desfăcut la 90°, ne indică sensul în care se deplasează conductorul.

În cazul arătat în fig. 6-6, conductorul tinde să se deplaseze în sensul săgeții F.

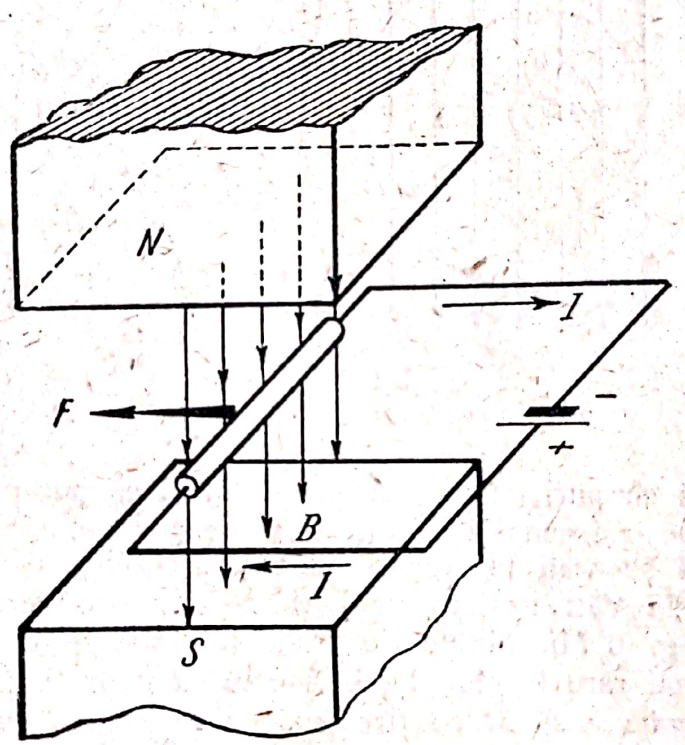


Fig. 6-6. Forța electromagnetică

Dacă se inversează sensul curentului în conductor sau sensul cîmpului magnetic exterior fix, regula mîinii stîngi ne arată că conductorul se va deplasa în sens opus săgeții F. Dacă se schimbă simultan atît sensul curentului cît și sensul cîmpului fix, sensul deplasării conductorului rămîne neschimbat.

Putem să găsim sensul forței care se exercită asupra conductorului și pe altă cale, anume dacă trasăm liniile de forță ale cîmpului rezultant compus prin suprapunerea cîmpului magnetic fix și a cîmpului conductorului mobil. În fig. 6-7 am reprezentat cîmpul magnetic fix paralel cu planul figurii, printr-o serie de linii paralele. Conductorul mobil, pe care, în cazul exemplului din figură, l-am presupus perpendicular pe cîmpul fix, deci pe planul figurii, va fi reprezentat printr-un cerculeț (secțiunea

conductorului). În cerculeț este marcată o cruciuliță, care reprezintă, convențional, sensul curentului în conductor și anume de la privitor spre figură; cruciulița dă imaginea cozii săgeții care indică sensul curentului. Dacă sensul curentului ar fi invers, din planul figurii către privitor, el ar fi reprezentat, convențional, printr-un punct plasat în mijlocul cerculețului, care ar indica vîrful săgeții.

Cîmpul magnetic propriu al curentului este reprezentat prin linii de forță circulare, al căror sens este dat de regula cunoscută a burghiului.

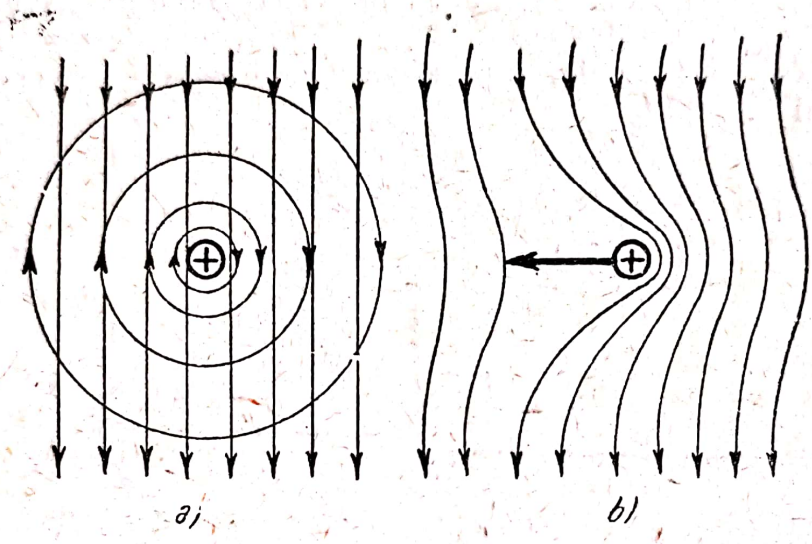


Fig. 6-7. Interacțiunea a două cîmpuri magnetice

Cele două cîmpuri, cîmpul magnetic fix și cîmpul propriu al curentului, sînt de același sens și se adună în dreapta conductorului și sînt de sens contrar și se scad în stînga conductorului (fig. 6-7 a). Prin suprapunerea lor, ele dau naștere unui cîmp magnetic rezultant, care are aspectul din fig. 6-7 b. Liniile de forță sînt mai dese în dreapta conductorului și mai rare în stînga lui. Asemenea unor linii elastice întinse, ele solicită conductorul să se deplaseze spre stînga, în sensul săgeții.

Această metodă simplă și sugestivă de a determina orientarea forței cu care cîmpul magnetic acționează asupra conductorului parcurs de curent, cunoscută sub numele de *regula lui Mitkevici*, se datorește Academicianului sovietic V. F. Mitkevici.

Forța la care este supus conductorul prin acțiunea combinată a cîmpului său propriu și a cîmpului exterior fix se numește *forță electromagnetică*.

Fenomenul analizat este general și se poate enunța următoarea regulă:

Orice element de circuit, aflat într-un cîmp magnetic și străbătut de curent, este supus unei forțe electromagnetice, a cărei direcție este perpendiculară atît pe direcția cîmpului cît și pe direcția conductorului.

S-a stabilit, pe cale experimentală, că forța electromagnetică, în cazul unui element de conductor drept, de lungime Δl, plasat într-un

cîmp magnetic, perpendicular pe acest cîmp, și parcurs de curentul I, este dată de expresia

$$\Delta F = B \cdot I \cdot \Delta l, \tag{6-1}$$

în care B este o mărime vectorială, legată de prezența cîmpului magnetic, care poartă numele de *inducție magnetică*.

Cînd conductorul are o lungime l și se găsește într-un cîmp magnetic omogen, perpendicular pe direcția cîmpului (fig. 6-6), forța care acționează asupra conductorului este dată, conform relației (6-1), de expresia

$$F = \sum \Delta F = \sum B I \Delta l = B I l \cdot \tag{6-2}$$

Dacă elementul de conductor Δl, în loc să fie perpendicular pe direcția vectorului inducției magnetice B, face cu acest vector un unghi α

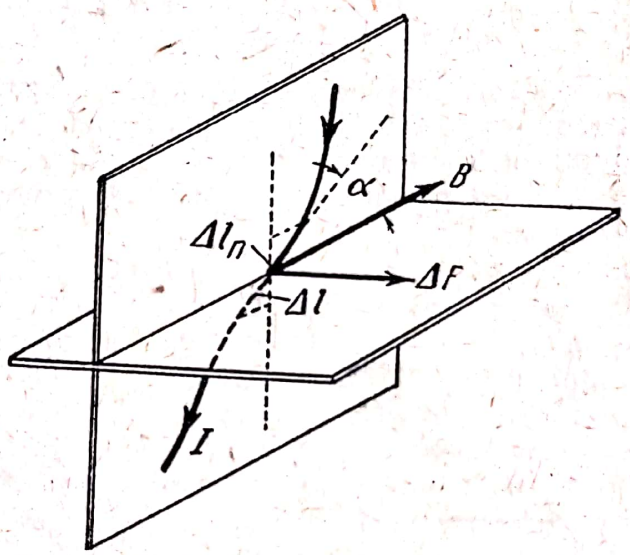


Fig. 6-8. Cazul elementului de conductor înclinat față de direcția cîmpului magnetic

(fig. 6-8), relația (6-1) devine

$$\Delta F = B I \Delta l \sin \alpha = B I \Delta l_n \ , \tag{6-3}$$

iar relația (6-2), a conductorului liniar de lungime l,

$$F = B I l \sin \alpha = B I l_n \ , \tag{6-4}$$

în care Δl_n și l_n reprezintă proiecția elementului de conductor, respectiv a conductorului întreg, pe normala la direcția vectorului inducției.

6-3. Acțiunea cîmpului magnetic asupra electronului aflat în mișcare în cîmp

Curentul electric dintr-un conductor fiind un flux de electroni, forța electromagnetică care acționează asupra conductorului parcurs de curent poate fi considerată ca fiind însumarea forțelor care acționează asupra fiecărui electron al curentului din conductor.

Potrivit relației (2-9), curentul din conductor poate fi exprimat sub forma

$$I = n e_0 S v \ ,$$

în care n este numărul de electroni liberi în unitatea de volum a conductorului;
e_0 — sarcina electronului;
S — secțiunea sa transversală;
v — viteza medie axială imprimată electronilor liberi.

În aceste condiții, expresia (6-2), care ne dă forța electromagnetică care acționează asupra conductorului rectiliniu, de lungime l, parcurs de curentul I și așezat perpendicular pe direcția liniilor de forță ale cîmpului magnetic de inducție B, devine

$$F = B \cdot l \cdot n e_0 S v ,$$

de unde rezultă că forța care acționează asupra electronului este

$$F_0 = \frac{F}{n S l} = B \frac{l n e_0 S v}{n S l} = B e_0 v \cdot \qquad (6\text{-}5)$$

Prin urmare, forța care acționează asupra unui electron, care se mișcă într-un cîmp magnetic cu o viteză v perpendicular pe direcția liniilor de forță ale cîmpului, este proporțională cu produsul dintre inducția B a cîmpului și viteza de deplasare v, factorul de proporționalitate fiind sarcina e_0 a electronului.

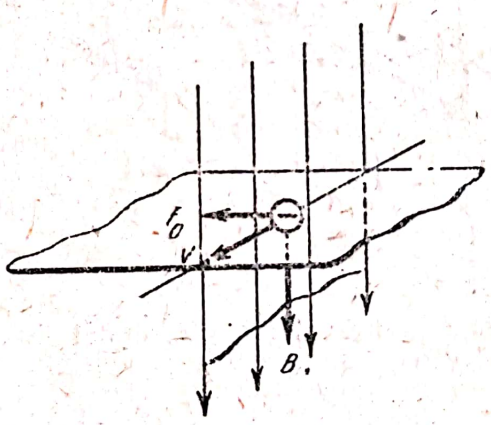


Fig. 6-9. Acțiunea cîmpului magnetic asupra electronului în mișcare

Sensul acestei forțe este dat de regula mîinii stîngi (fig. 6-9), cele patru degete grupate în mănunchi fiind îndreptate în sensul opus deplasării electronului.

6-4. Inducția magnetică

Am definit, în par. 6-2, inducția magnetică ca fiind o mărime vectorială legată de prezența cîmpului magnetic. Vectorul inducției magnetice caracterizează pe deplin un cîmp magnetic, în fiecare din punctele sale, atît ca intensitate cît și ca direcție și depinde, între altele, de natura fizică a mediului în care apare cîmpul. În orice punct al cîmpului, direcția vectorului inducției coincide cu direcția tangentei la linia de forță (sau de inducție) magnetică, care trece prin acel punct.

Din relația (6-4), rezultă că valoarea inducției magnetice este dată de expresia

$$B = \frac{F}{I l \sin \alpha} \cdot \qquad (6\text{-}6)$$

În consecință, ecuația de dimensiune a inducției magnetice este

$$[B] = \frac{N}{Am} = \frac{\frac{J}{m}}{Am} = \frac{\frac{VAs}{m}}{Am} = \frac{Vs}{m^2} \cdot$$

Rezultă că unitatea de măsură a inducției, în sistemul practic MKSA, este voltsecunda pe metru pătrat. Unitatea V s poartă numele de *weber* (Wb). Prin urmare, unitatea de măsură a inducției magnetice, în sistemul practic, este *weberul pe metru pătrat* (Wb/m²).

În sistemul de unități CGS e.m., unitatea de inducție este *gauss*-ul.

$$1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{Wb/m}^2 \cdot$$

Unitatea gauss își păstrează încă, în domeniul practic, o răspîndire destul de largă.

6-5. Fluxul magnetic

În studiul fenomenelor electromagnetice se utilizează mărimea fizică numită *fluxul vectorului inducției magnetice,* sau mai pe scurt *fluxul magnetic,* care se notează cu simbolul Φ.

Fluxul magnetic reprezintă produsul dintre inducția magnetică a unui cîmp și mărimea unei suprafețe perpendiculare pe direcția cîmpului.

În cazul particular, al unui cîmp de inducție omogen B și a unei suprafețe plane S, perpendiculare pe direcția cîmpului, fluxul este dat de relația

$$\Phi = BS \cdot \qquad (6\text{-}7)$$

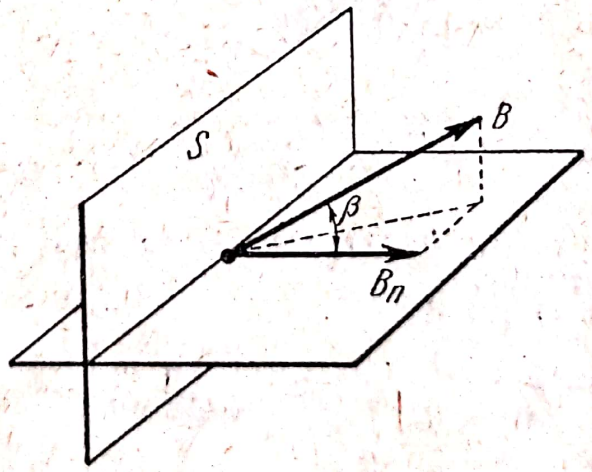


Fig. 6-10. Cazul cînd vectorul cîmpului de inducție nu este perpendicular pe suprafața S

Dacă direcția vectorului B nu este perpendiculară pe suprafața S (fig. 6-10), se proiectează vectorul pe direcția normalei la suprafață

în punctul respectiv. Notînd cu β unghiul pe care direcția normalei la planul suprafeței S îl face cu direcția vectorului inducției, relația (6-7) devine

$$\Phi = S B \cos \beta = S B_n \ , \tag{6-8}$$

adică *fluxul magnetic care străbate o suprafață este dat de produsul suprafeții cu componenta normală la acea suprafață a vectorului inducției magnetice.*

În cazul unui cîmp neomogen, trebuie considerat fluxul elementar $\Delta \Phi$, dat de produsul componentei normale a vectorului inducției magnetice pe suprafața elementară ΔS, aflată în jurul punctului considerat din cîmp, cu mărimea suprafeței ΔS, adică

$$\Delta \Phi = B_n \Delta S \ .$$

Fluxul magnetic prin întreaga suprafață S va fi dat, în acest caz, de relația

$$\Phi = \sum \Delta \Phi = \sum B_n \Delta S \ ,$$

care la limită devine

$$\Phi = \int_S B_n \, dS \ . \tag{6-9}$$

Dacă trasăm liniile de forță trecînd prin punctele unui contur închis oarecare aflat într-un cîmp magnetic, obținem *tubul de forță* cores-

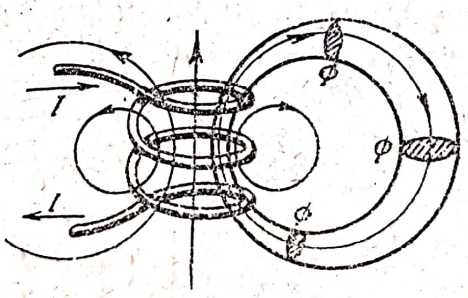


Fig. 6-11. Un tub de forță într-un cîmp magnetic

punzător acelui contur (fig. 6-11). De-a lungul unui tub de forță, fluxul magnetic este conservativ.

Din relația (6-7) rezultă

$$[\Phi] = [B S] = \frac{Wb}{m^2} m^2 = Wb \ .$$

Prin urmare, în sistemul practic MKSA unitatea de flux este *weber*-ul (Wb).

În sistemul de unități CGS e.m., fluxul se măsoară în *maxwell*,

$$1 \ maxwell = 10^{-8} \ \text{Wb} \ .$$

între maxwell și gauss există relația

$$1 \text{ maxwell} = 1 \text{ gauss} \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot$$

Exemplul 6-1. Să se determine forța care acționează asupra unui conductor drept, avînd o lungime de 30 cm, parcurs de un curent de 40 A și aflat într-un cîmp magnetic, de inducție 2,5 Wb/m^2, perpendicular pe direcția cîmpului.

Soluția: Conform relației generale (6-4), obținem

$$F = 2{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot 40 \sin 90^0 = 30 \text{ N}$$

sau

$$F = \frac{30}{9{,}81} = 3{,}06 \text{ kgf} \cdot$$

6-6. Legea lui Biot-Savart

Determinarea valorii inducției magnetice produsă, într-un punct oarecare al spațiului, de un conductor electric de o formă oarecare, parcurs de curent, se face însumînd vectorii elementari ΔB, produși, în acel punct, de fiecare element Δl al circuitului electric. Vectorul rezultant B, care reprezintă valoarea inducției magnetice în punctul respectiv al spațiului, este dat de relația

$$\overline{B} = \sum \overline{\Delta B} \cdot \qquad (6\text{-}10)$$

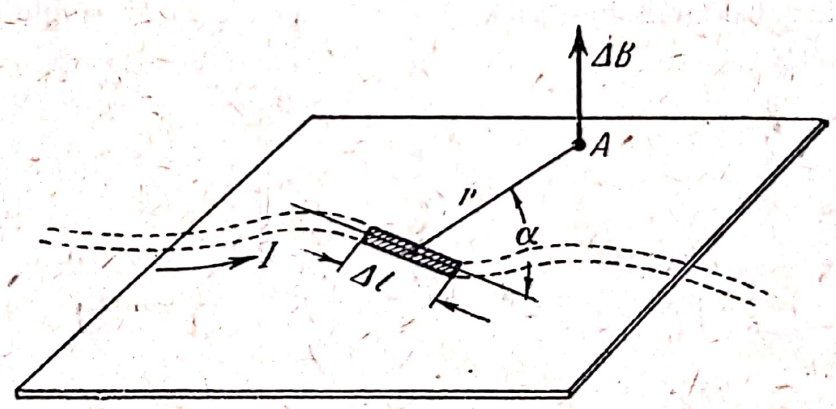


Fig. 9-12. Inducția unui element de conductor parcurs de curent

Valoarea și direcția vectorilor elementari ΔB, se determină cu ajutorul *legii lui Biot-Savart*, care se exprimă precum urmează:

Valoarea inducției elementare ΔB, produse de un element Δl al circuitului electric, parcurs de curentul I, într-un punct oarecare al spațiului (fig. 9-12), este dată de relația

$$\Delta B = \mu \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}, \qquad (6\text{-}11)$$

în care r este distanța de la elementul de circuit Δl pînă în punctul considerat, α este unghiul pe care-l formează raza vectoare r cu elementul Δl, iar μ este un factor, care depinde de natura fizică a mediului în care apare cîmpul magnetic și care se numește *permeabilitate magnetică*.

Direcția vectorului elementar ΔB este perpendiculară pe planul format de raza vectoare r și elementul de circuit Δl, iar sensul este sensul de rotație al unui burghiu care ar înainta în direcția curentului din elementul Δl.

Legea a fost stabilită experimental de *Biot* și *Savart*, în anul 1820, în cazul particular al unui conductor rectiliniu de lungime practic infinită, parcurs de curent electric. Ei au constatat că pentru același curent în conductor, intensitatea inducției este invers proporțională cu distanța de la punctul considerat la conductor. Matematicianul *Laplace* a reușit să dea legii lui Biot și Savart un caracter general, stabilind formula (6-11), cu ajutorul căreia se poate obține valoarea inducției magnetice produse de curentul care trece printr-un conductor de o formă oarecare. De aceea, legea Biot-Savart poartă uneori numele de *legea Biot-Savart-Laplace*.

În sistemul raționalizat, legea lui Biot-Savart se pune sub forma

$$\Delta B = \mu' \frac{I \Delta l \sin \alpha}{4 \pi r^2}, \qquad (6\text{-}11\,a)$$

în care $\mu' = 4 \pi \mu$.

Să aplicăm legea lui Biot-Savart pentru a determina vectorul inducției magnetice produsă de cîteva forme caracteristice ale circuitului electric.

a) **Cazul conductorului rectiliniu parcurs de curent.** Ne propunem să determinăm valoarea inducției B într-un punct A al cîmpului magne-

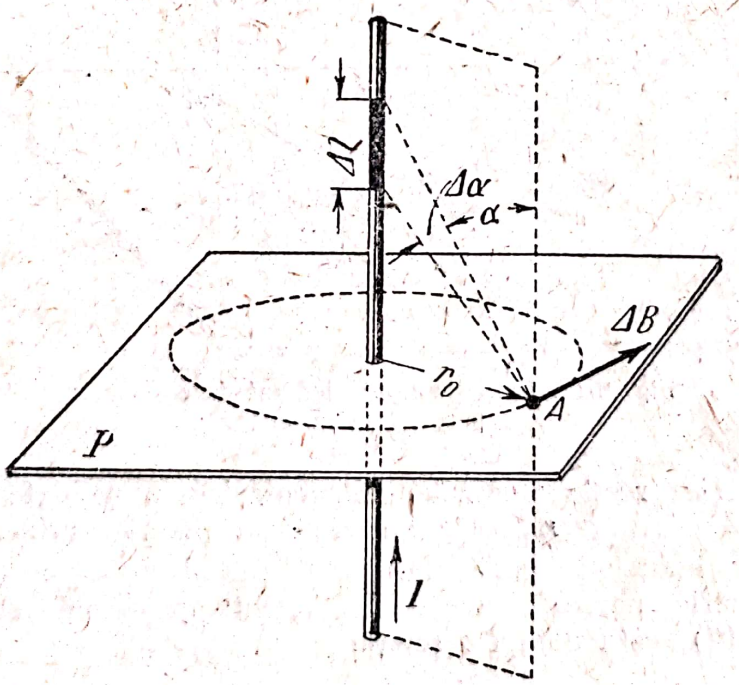


Fig. 6-13. Inducția în cazul conductorului rectiliniu parcurs de curent

tic, aflat la distanța r_0 de un conductor drept, foarte lung, parcurs de curentul I (fig. 6-13). Conform relației (6-10), va trebui să calculăm suma vectorială a inducțiilor elementare, produse în punctul A de fiecare element Δl al circuitului. Toate aceste inducții elementare reprezentate

prin vectori perpendiculari pe plan trecînd prin conductor și punctul A și avînd același sens, legat de sensul curentului. Prin urmare, suma vectorială (6-10) se înlocuiește cu suma aritmetică

$$B = \sum \mu \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2} .$$

Din fig. 6-13, avem

$$\Delta l = \frac{r \Delta \alpha}{\sin \alpha} ,$$

deci

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{r \Delta \alpha}{r^2 \sin \alpha} = \frac{\Delta \alpha}{r \sin \alpha} .$$

Ținînd seama că $r \sin \alpha = r_0$, avem

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r_0}$$

și relația care dă pe B devine

$$B = \frac{\mu I}{r_0} \sum \sin \alpha \Delta \alpha . \qquad (6\text{-}12)$$

Dacă considerăm elementele Δl infinit de mici, unghiul $\Delta \alpha$ devine $d\alpha$ și expresia (6-12) se înlocuiește cu integrala

$$B = \frac{\mu I}{r_0} \int \sin \alpha \, d\alpha .$$

În ipoteza unui conductor foarte lung, unghiul α va varia de la valoarea $\alpha = 0$, corespunzătoare elementelor dl cele mai de sus, pînă la valoarea $\alpha = \pi$, corespunzătoare elementelor dl cele de mai jos. Prin urmare,

$$B = \frac{\mu I}{r_0} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu I}{r_0} \left[-\cos \alpha \right]_0^{\pi} = \mu \frac{2I}{r_0} . \qquad (6\text{-}13)$$

În sistemul raționalizat, expresia precedentă devine

$$B = \mu' \frac{I}{2 \pi r_0} . \qquad (6\text{-}14)$$

b) **Cazul conductorului circular** Ne propunem să determinăm valoarea inducției magnetice pe axul unui conductor electric de formă circulară, parcurs de curent, înțelegînd prin axul conductorului circular dreapta care trece prin centrul cercului și este perpendiculară pe planul acestuia.

Fie conductorul, în formă de cerc de rază R, reprezentat în fig. 6-14, parcurs de curentul I, și fie un punct oarecare A, situat pe axul conductorului la o distanță d de planul cercului, punct în care vrem să calculăm inducția magnetică. Să notăm că r distanța de la elementele de

conductor Δl la punctul A și să determinăm inducțiile elementare ΔB_1 și ΔB_2, produse în A de două elemente Δl_1 și Δl_2 ale conturului, situate la capetele opuse ale unui diametru. Dacă ținem seama că unghiul α, dintre r și Δl, este egal cu $\pi/2$, vom obține, aplicînd relația (6-11),

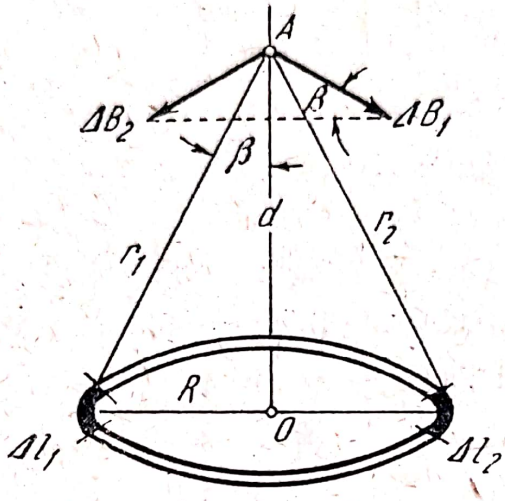


Fig. 6-14. Inducția magnetică pe axul conductorului circular parcurs de curent

$$\Delta B_1 = \mu \frac{I \Delta l_1}{r_1^2} \quad \text{și} \quad \Delta B_2 = \mu \frac{I \Delta l_2}{r_2^2} .$$

Luînd $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ și ținînd seama că $r_1 = r_2 = r$, rezultă

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = \mu \frac{I \Delta l}{r^2} . \qquad (6\text{-}15)$$

Prin urmare, numeric, inducțiile magnetice ΔB_1 și ΔB_2 sînt egale. Vectorii elementari respectivi au însă direcții diferite, și anume $\overline{\Delta B_1}$ este perpendicular pe r_1, iar $\overline{\Delta B_2}$ este perpendicular pe r_2. Suma lor geometrică $\overline{\Delta B} = \overline{\Delta B_1} + \overline{\Delta B_2}$ va avea ca direcție axul conductorului circular, iar ca valoare suma proiecțiilor pe ax a acestor vectori. Deci

$$\Delta B = \Delta B_1 \sin \beta + \Delta B_2 \sin \beta .$$

Dar dacă observăm, din fig. 6-14, că $\sin \beta = \frac{R}{r}$ și ținem seama de relația (6-15), obținem

$$\Delta B = \mu \frac{2 I \Delta l}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = \mu \frac{2 I \Delta l R}{r^3} . \qquad (6\text{-}16)$$

Conductorul circular poate fi împărțit într-un număr mare de perechi de elemente Δl ca cele de mai sus, fiecare pereche dîndu-ne cîte o inducție la fel ca aceea dată de relația (6-16). Rezultă că valoarea totală a inducției magnetice în punctul A este

$$B = \sum \Delta B = \mu I \frac{R}{r^3} 2 \sum \Delta l .$$

Scanned with OKEN Scanner

Suma tuturor elementelor $2\sum \Delta l$ fiind egală cu lungimea conductorului circular

$$2\sum \Delta l = 2\pi R,$$

rezultă că

$$B = \mu \frac{2\pi R^2 I}{r^3}.$$

Observînd, din fig. 6-12, că $r^2 = R^2 + d^2$, obținem

$$B = \mu \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}. \qquad (6\text{-}17)$$

Sensul pe ax al vectorilor B este dat de regula burghiului.

Dacă $d = 0$, punctul A se găsește în centrul cercului și relația (6-17) devine

$$B = \mu \frac{2\pi I}{R}. \qquad (6\text{-}18)$$

Prin urmare, valoarea inducției magnetice în centrul unei spire circulare, de rază R, parcursă de curentul I, este dată de relația (6-18).

În sistemul raționalizat, relațiile (6-17) și (6-18) devin, respectiv,

$$B = \mu' \frac{R^2 I}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \qquad (6\text{-}19)$$

și

$$B = \mu' \frac{I}{2R}. \qquad (6\text{-}20)$$

c) **Cazul solenoidului.** Un solenoid constă dintr-un conductor răsucit în spirală, formînd un număr de spire circulare, de aceeași rază, așezate unele lîngă altele și legate în serie, avînd un ax comun și putînd fi parcurse de același curent. Prin urmare, inducția cîmpului magnetic pe axul solenoidului rezultă din însumarea inducțiilor produse de spirele componente.

Să notăm cu n numărul spirelor solenoidului pe unitatea de lungime a axului și cu I, intensitatea curentului. Să presupunem că separăm o porțiune infinit mică dl din lungimea solenoidului. Această porțiune va conține ndl spire. Deoarece fiecare spiră este parcursă de același curent I, porțiunea dl a solenoidului poate fi privită ca un curent circular, de intensitate $Indl$. Inducția magnetică, într-un punct oarecare A de pe axul solenoidului (fig. 6-15), creată de curentul echivalent $Indl$, este, conform relației (6-17),

$$dB = \mu \frac{2\pi I R^2 n}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl, \qquad (6\text{-}21)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care l reprezintă proiecția pe ax a distanței dintre punctul A și porțiunea dl. Dacă notăm cu β unghiul pe care îl formează, cu axul

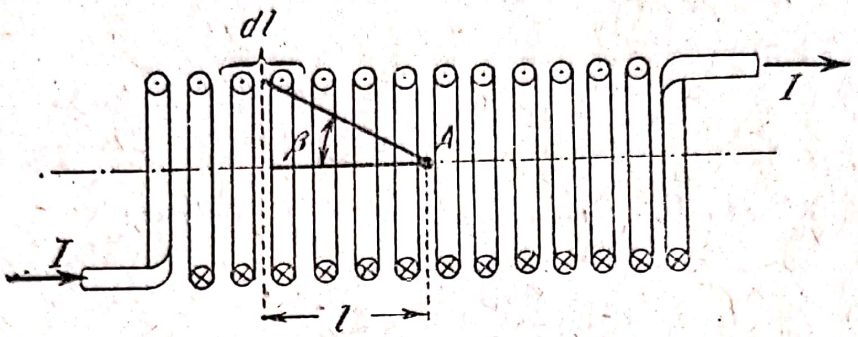


Fig. 6-15. Calculul inducției cîmpului magnetic în interiorul unui solenoid

solenoidului, raza vectoare dusă din punctul A pînă la porțiunea dl, avem

$$l = R \operatorname{ctg} \beta ,$$

de unde

$$dl = - R \frac{d\beta}{\sin^2 \beta} .$$

Pe de altă parte, din fig. 6-13 rezultă

$$R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \beta} .$$

Introducînd pe dl și $R^2 + l^2$, date de ultimile relații, în expresia (6-21), obținem

$$dB = - \mu 2 \pi n I \sin \beta \, d\beta . \qquad (6\text{-}22)$$

Inducțiile în punctul considerat, corespunzătoare tuturor elementelor dl, sînt îndreptate după axul solenoidului. Rezultă că valoarea B, a inducției totale, se obține integrînd expresia (6-22) pentru toate valorile unghiului β.

Dacă notăm cu β_1 și β_2, valorile unghiurilor corespunzătoare extremităților solenoidului, vom avea

$$B = - \mu 2 \pi n I \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \, d\beta = \mu 2 \pi n I (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) . \qquad (6\text{-}23)$$

Prin urmare, valoarea inducției B depinde de poziția punctului A și de lungimea solenoidului. Dacă avem de-a face cu un solenoid infinit de lung, $\beta_1 = 0$ și $\beta_2 = \pi$. În acest caz relația precedentă devine

$$B = \mu 4 \pi n I . \qquad (6\text{-}24)$$

Această din urmă relație se aplică practic și solenoizilor a căror lungime este mare față de diametru.

Scanned with OKEN Scanner

Sensul inducției B în interiorul solenoidului se obține prin regula burghiului, dată în par. 6-1.

Relația (6-24) este precisă cînd solenoidul nu are suprafețe terminale, adică cînd constituie ceea ce numim un solenoid de formă toroidală (inelară) [fig. 6-16]. În acest caz, liniile de forță se închid în interiorul spirelor.

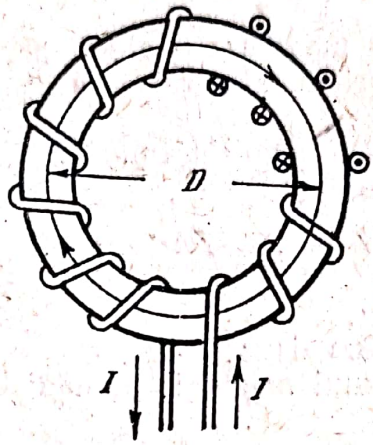


Fig. 6-16. Fluxul magnetic în interiorul unei bobine inelare (toroid)

Dacă diametrul mediu al toroidului (diametrul corespunzător axului) este mare în raport cu diametrul spirelor, inducția magnetică este practic omogenă. Notînd această inducție cu B și secțiunea transversală a toroidului cu S, fluxul în toroid este

$$\Phi = B S \ .$$

Ținînd seama de relația (6-24) și notînd cu l lungimea axială a toroidului ($l = \pi D$, în care D este diametrul mediu), avem

$$\Phi = \mu \frac{4 \pi w I}{l} S \ , \qquad (6\text{-}25)$$

în care w reprezintă numărul total de spire al solenoidului ($w = n l$)

Relațiile (6-24) și (6-25) devin, în sistemul raționalizat,

$$B = \mu' n I \ , \qquad (6\text{-}26)$$

respectiv

$$\Phi = \mu' \frac{w I}{l} S \ . \qquad (6\text{-}27)$$

6-7. Intensitatea cîmpului magnetic

Am arătat, în par. precedent, că inducția magnetică depinde, prin coeficientul de permeabilitate μ, de proprietățile fizice ale mediului în care apare cîmpul magnetic. Pentru a ușura calculele magnetice, este necesară introducerea unei mărimi auxiliare de calcul, independentă de proprietățile magnetice ale mediului, care să exprime influența pe care o are asupra cîmpului magnetic, în oricare punct al spațiului, forma conductoarelor

electrice și intensitatea curenților din aceste conductoare, care produc cîmpul. Această mărime de calcul se numește *intensitatea cîmpului magnetic,* sau mai pe scurt *cîmpul magnetic* și se notează cu simbolul *H*.

Intensitatea cîmpului magnetic este dată de relația

$$\overline{H} = \frac{\overline{B}}{\mu} \,. \tag{6-28}$$

Prin urmare, cîmpul magnetic poate fi privit, în orice punct al spațiului, ca o mărime vectorială, al cărei sens coincide cu vectorul inducției magnetice din acel punct.

Dacă împărțim prin μ ambii membri ai formulei (6-11), legea lui Biot-Savart-Laplace devine

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2} \tag{6-29}$$

și aplicațiile acestei legi ne dau:

a) intensitatea cîmpului magnetic al unui conductor rectiliniu infinit [relația (6-13)]

$$H = \frac{2I}{r_0} \,; \tag{6-30}$$

b) idem, în cazul conductorului în formă de cerc, pe axul conductorului [relația (6-17)]

$$H = \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \tag{6-31}$$

și în centrul conductorului [relația (6-18)]

$$H = \frac{2\pi I}{R} \,; \tag{6-32}$$

c) idem, în axul unui solenoid foarte lung în raport cu diametrul său [relația (6-24)]

$$H = 4\pi n I \,. \tag{6-33}$$

Împărțind ambii membri ai formulei (6-11 a) prin μ' se obține legea lui Biot-Savart-Laplace în sistemul raționalizat

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2} \,. \tag{6-29 a}$$

În acest caz, aplicațiile acestei legi [relațiile (6-14), (6-19), (6-20) și (6-26)] devin, respectiv,

$$H = \frac{I}{2\pi r_0} \,; \tag{6-34}$$

$$H = \frac{R^2 I}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \,; \tag{6-35}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$H = \frac{I}{2R} \quad ; \tag{6-36}$$

și

$$H = n\,I \quad . \tag{6-37}$$

În sistemul *MKSA* neraționalizat, unitatea de cîmp magnetic este *milioersted*-ul (mOe), definit, prin STAS-ul 862-42, ca fiind *cîmpul magnetic produs în jurul unui conductor liniar* [relația (6-30)] *de lungime practic infinită, la o distanță de doi metri de conductor, cînd conductorul este parcurs de un curent de un amper.*

În sistemul *MKSA* raționalizat, unitatea de cîmp magnetic este *amperspira pe metru* (A.sp/m), care reprezintă, conform aceluiași STAS, *cîmpul magnetic produs în centrul unei spire circulare* [relația (6-36)], *avînd un diametru de un metru, străbătută de un curent de un amper.*

Între mOe și A.sp/m există relația

$$1\ \text{mOe} = \frac{1}{4\pi}\ \text{A}\cdot\text{sp/m} \approx 0{,}08\,\text{A}\cdot\text{sp/m} \quad . \tag{6-38}$$

În calculul circuitelor magnetice se utilizează uneori și sistemul de unități CGS e.m. În acest sistem, neraționalizat, se folosește unitatea de cîmp magnetic numită *oersted* (Oe), care reprezintă *cîmpul magnetic produs în jurul unui conductor liniar infinit de lung, la o distanță de doi centimetri, cînd conductorul este parcurs de unitatea CGS e.m. de curent* ($=1.10^{-1}$ A).

Între Oe și unitățile *MKSA* de cîmp magnetic există următoarele relații

$$1\ \text{Oe} = 10^3\ \text{mOe} \quad . \tag{6-39}$$

și

$$1\ \text{Oe} = \frac{10^3}{4\pi}\ \text{A}\cdot\text{sp/m} \approx 80\ \text{A}\cdot\text{sp/m} \quad . \tag{6-39a}$$

În sistemul CGS e.m. raționalizat, unitatea de cîmp magnetic este *amperspira pe centimetru* (A.sp/cm), care se definește ca fiind *cîmpul magnetic produs în centrul unei spire circulare, de un centimetru diametru, parcursă de un curent electric a cărei intensitate este egală cu unitatea de curent în sistemul CGS e.m.* ($=1.10^{-1}$ A). Rezultă că

$$1\ \text{A}\cdot\text{sp/cm} = 1{,}25\ \text{Oe} = 1{,}25\cdot 10^3\ \text{mOe} \quad . \tag{6-40}$$

Între A·s/pcm și A·sp/m există relația

$$1\ \text{A}\cdot\text{sp/cm} = 10^2\ \text{A}\cdot\text{sp/m} \quad . \tag{6-41}$$

6-8. Permeabilitatea magnetică

Coeficientul μ al permeabilității magnetice, definit în par. 6-6, variază după natura mediului respectiv.

Putem să ne dăm seama de particularitățile magnetice ale unui mediu oarecare dacă comparăm inducția produsă în acel mediu și determinată cu una din relațiile stabilite în par. 6-6 și inducția produsă, în aceleași condiții,

Scanned with OKEN Scanner

în vid. Se constată, pe această cale, că în unele medii inducția magnetică este mai puternică decît în vid iar în altele, mai slabă. Mediile în care obținem o inducție magnetică mai puternică decît cea din vid se numesc medii (sau materiale) *paramagnetice,* iar cele în care obținem inducții mai mici decît în vid, medii (sau materiale) *diamagnetice.*

Unitatea de măsură a permeabilității magnetice, în sistemul *MKSA* neraționalizat, rezultă din relația

$$[\mu]=\left[\frac{B}{H}\right]=\frac{\mathrm{Wb/m^2}}{\mathrm{mOe}} \cdot \qquad (6\text{-}42)$$

În același sistem de unități, permeabilitatea magnetică a vidului, determinată experimental, are ca valoare

$$\mu_0 = 10^{-7}\left(\frac{\mathrm{Wb/m^2}}{\mathrm{mOe}}\right) \cdot \qquad (6\text{-}43)$$

În sistemul *MKSA* raționalizat, unitatea de măsură a permeabilității magnetice este

$$[\mu']=\left[\frac{B}{H}\right]=\frac{\mathrm{Wb/m^2}}{\mathrm{A\cdot sp/m}} \cdot \qquad (6\text{-}44)$$

În același sistem de unități, permeabilitatea vidului are ca valoare

$$\mu_0' = 4\pi\cdot 10^{-7}\left(\frac{\mathrm{Wb/m^2}}{\mathrm{A\cdot sp/m}}\right) \cdot \qquad (6\text{-}45)$$

În sistemul de unități CGS e.m. neraționalizat, valoarea permeabilității vidului este

$$\mu_0 = 1\left(\frac{\mathrm{gauss}}{\mathrm{Oe}}\right), \qquad (6\text{-}46)$$

iar în cel raționalizat

$$\mu_0' = 4\pi\left(\frac{\mathrm{gauss}}{\mathrm{A\,sp/cm}}\right) \cdot \qquad (6\text{-}47)$$

Ținînd seama că amperspira are dimensiunea amperului, relația (6-44) mai poate fi pusă și sub forma

$$[\mu']=\frac{Wb/m^2}{A/m}=\frac{Wb}{A\,m}=\frac{Vs}{A\,m}=\frac{\Omega\,s}{m} \cdot$$

Produsul Ωs reprezintă unitatea numită *henry* (H), folosită ca unitate de măsură *MKSA* a mărimii fizice numită *inductanță,* pe care o vom studia în par. 7-7. În acest caz, unitatea de măsură a permeabilității, în sistemul *MKSA* raționalizat, este *henry*-ul *pe metru,* adică

$$[\mu']=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \cdot \qquad (6\text{-}44a)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, în ambele sisteme de unități, permiabilitatea vidului reprezintă o mărime fizică constantă.

Raportul dintre permeabilitatea magnetică a unui material oarecare și permeabilitatea magnetică a vidului se numește *permeabilitate magnetică relativă* (μ_r) a acelui material. Deci

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\mu'}{\mu'_0} \cdot \qquad (6\text{-}48)$$

Urmează că permeabilitatea magnetică relativă reprezintă un număr abstract, fără dimensiune.

Conform celor spuse mai sus, pentru materialele paramagnetice coeficientul $\mu_r > 1$, iar pentru cele diamagnetice, $\mu_r < 1$.

Cele mai multe materiale sînt paramagnetice. Printre cele diamagnetice menționăm cuprul, sarea gemă și bismutul, acesta din urmă prezentînd diamagnetismul cel mai accentuat.

O grupă aparte de corpuri paramagnetice o constituie materialele *feromagnetice,* care dispun de o permeabilitate relativă foarte ridicată, de ordinul miilor de unități. Aceste materiale joacă un rol important în construcția mașinilor și aparatelor electrice.

Dacă facem abstracție de materialele feromagnetice, restul materialelor, atît cele paramagnetice cît și cele diamagnetice, au un coeficient de permeabilitate relativă μ_r foarte apropiat de unitate, între 1,01 și 1 cele paramagnetice și între 0,99 și 1 cele diamagnetice. De pildă, pentru aer, material paramagnetic, $\mu_r = 1{,}000\,003$, iar pentru cupru, material diamagnetic, $\mu_r = 0{,}999\,995$. Din această cauză, în practică se consideră coeficientul de permeabilitate relativă a materialelor, altele decît cele feromagnetice, egal cu unitatea.

6-9. Legea circuitului magnetic

Sînt cazuri în care determinarea cîmpului magnetic cu ajutorul legii lui Biot-Savart-Laplace este mai dificilă. În asemenea cazuri, se poate aplica o altă lege, care derivă din legea lui Biot-Savart-Laplace și care poartă numele de *legea circuitului magnetic* sau *legea curentului total.*

Să presupunem un număr oarecare de conductoare parcurse de curent, de pildă trei conductoare (fig. 6-17), parcurse de curenții I_1, I_2 și I_3, în sensurile arătate în figură, și să considerăm că aceste conductoare se găsesc în interiorul unui contur închis oarecare, arătat în perspectivă în fig. 6-17a și în proiecție în fig. 6-17b. Fiecare din cele trei conductoare va produce în spațiul înconjurător cîte un cîmp magnetic. Cele trei cîmpuri se compun într-un cîmp rezultant și acesta din urmă, după cum știm, variază ca intensitate, direcție și sens de la un punct al spațiului la altul.

Numim *curent total* suma algebrică a curenților care străbat suprafața mărginită de contur. Semnul curenților se fixează în legătură cu sensul de parcurgere al conturului. Se ia un anumit sens de parcurgere al conturului ca sens pozitiv și se consideră curenții care străbat conturul ca pozitivi, atunci cînd sensul lor coincide sensului de mișcare al mînerului unui burghiu, care ar avansa de-a lungul conturului în sensul ales ca pozitiv, și ca negativi, în caz contrar. Dacă pentru conturul din fig. 6-17 alegem

Scanned with OKEN Scanner

ca sens pozitiv de parcurgere sensul orar, curenții I_1 și I_3 sînt pozitivi, iar curentul I_2 este negativ.

Cu aceste precizări, ne propunem să calculăm cîmpul rezultant H de-a lungul conturului. Pentru aceasta, separăm pe contur un element de

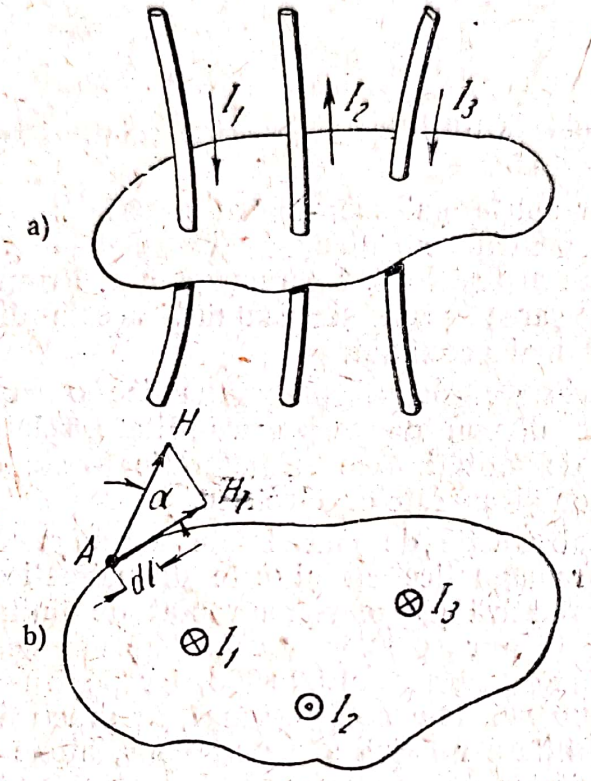


Fig. 6-17. La legea circuitului magnetic

lungime dl, situat în punctul A, în care vectorul intensității cîmpului H face cu direcția elementului dl un unghi α. Componenta tangențială H_l la contur, în punctul A, a vectorului intensității cîmpului H, este dată de expresia

$$H_l = H \cos \alpha \ .$$

Conform legii circuitului magnetic, *suma algebrică a produselor* $dl\ H_l$, *dintre elementele de lungime ale unui contur arbitrar și componentele tangențiale respective ale vectorului intensității cîmpului, este egală cu* 4π *ori curentul total corespunzător acelui contur închis*. Avem, așadar

$$\oint H_l \, dl = 4\pi \sum I \ . \qquad (6\text{-}49)$$

Produsul $H_l \ dl$ de sub semnul integralei este pozitiv cînd vectorul H_l are același sens cu sensul de parcurgere al conturului, și este negativ în caz contrar.

Dacă conturul coincide cu o linie de forță a cîmpului magnetic, atunci

$$H_l = H$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\oint H\,\mathrm{d}l = 4\pi \sum I \cdot$$

Dacă, în plus, intensitatea cîmpului magnetic este aceeași în toate punctele conturului, expresia precedentă devine

$$H \oint \mathrm{d}l = 4\pi \sum I \cdot$$

Ținînd seama că integrala $\oint \mathrm{d}l$ reprezintă lungimea l a conturului, obținem

$$Hl = 4\pi \sum I \qquad (6\text{-}50)$$

sau

$$H = \frac{4\pi \sum I}{l} \cdot \qquad (6\text{-}51)$$

În sistemul raționalizat, relațiile (6-49), (6-50) și (6-51) devin, respectiv,

$$\oint H_l\,\mathrm{d}l = \sum I\,, \qquad (6\text{-}52)$$

$$\oint H\,\mathrm{d}l = \sum I\,, \qquad (6\text{-}53)$$

$$H = \frac{\sum I}{l} \cdot \qquad (6\text{-}54)$$

Să determinăm din nou, aplicînd de data aceasta legea circuitului magnetic, cîmpul magnetic din jurul unui conductor rectiliniu într-un punct situat la o distanță de axul conductorului $r_0 > R$, R fiind raza secțiunii conductorului. Am arătat că linia de forță, care trece printr-un punct oarecare al cîmpului magnetic din jurul unui conductor rectiliniu, constituie un cerc, al cărui centru se găsește pe axul conductorului. Din cauza simetriei, cîmpul magnetic de-a lungul unei linii de forță, în formă de cerc, este constant. Parcurgînd linia de forță care trece prin punctul considerat, avem, aplicînd relația (6-50),

$$Hl = 4\pi \sum I$$

sau, ținînd seama că $l = 2\pi r_0$ și $\sum I = I$,

$$H = \frac{4\pi I}{2\pi r_0} = \frac{2I}{r_0} \cdot$$

Am obținut, aplicînd legea circuitului magnetic, aceeași relație (6-30) obținută în par. 6-7 aplicînd legea lui Biot-Savart-Laplace.

Cu ajutorul legii circuitului magnetic, să determinăm acum cîmpul în interiorul unui conductor rectiliniu, parcurs de un curent I,

Scanned with OKEN Scanner

într-un punct aşezat la o distanţă $r_0 < R$, de axul conductorului (fig. 6-18), R fiind raza secţiunii conductorului.

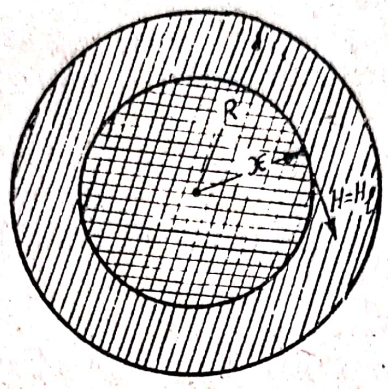


Fig. 6-18. Cîmpul magnetic în interiorul unui conductor rectiliniu, parcurs de curent

Densitatea curentului, omogenă pe întreaga secţiune transversală a conductorului, este dată de relaţia

$$\delta = \frac{I}{\pi R^2} .$$

Aplicînd legea circuitului magnetic conturului de cerc cu raza r_0 şi ţinînd seama că totalul curentului prin acest contur, a cărei suprafaţă este $S_x = \pi r_0^2$, este dat de relaţia $\delta S_x = \delta \pi r_0^2$, obţinem

$$H = \frac{4\pi \sum I}{l} = \frac{4\pi \delta \pi r_0^2}{2\pi r_0},$$

sau

$$H = \frac{2I}{R^2} r_0 . \qquad (6\text{-}55)$$

În sistemul raţionalizat, formula precedentă devine

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r_0 . \qquad (6\text{-}56)$$

Prin urmare, intensitatea cîmpului în interiorul conductorului rectiliniu parcurs de curent este proporţională cu distanţa punctului considerat faţă de axul conductorului, deci creşte după o linie dreaptă (fig. 6-19). Pe ax, distanţa $r_0 = 0$, şi $H = 0$; pe suprafaţa conductorului $r_0 = R$, deci

$$H_m = \frac{2I}{R} .$$

Această din urmă intensitate reprezintă valoarea maximă a cîmpului magnetic produs de conductor, căci înafara conductorului cîmpul variază,

potrivit relației (6-30), invers proporțional cu distanța r_0, deci scade după o hiperbolă (fig. 6-19).

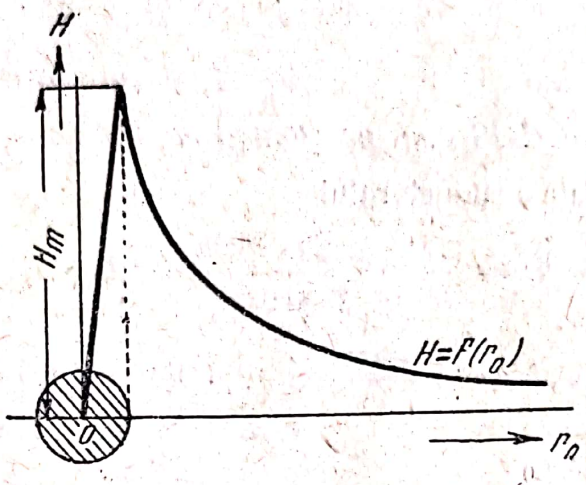


Fig. 6-19. Diagrama variației intensității cîmpului magnetic

Exemplul 6-2. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic maxim și inducția maximă produsă de un conductor cilindric rectiliniu avînd o secțiune de rază $R = 25$ mm, parcurs de un curent de 20 A. Pentru același curent, să se determine inducția la o distanță $r_0 = 20$ mm de axul conductorului. Se ia pentru aer $\mu_r = 1$, deci $\mu = \mu_0$.

Soluția: Cîmpul și inducția maximă se găsesc pe suprafața conductorului și au ca valoare:

1) *În sistemul MKSA neraționalizat*

a) pe suprafața conductorului

$$H = \frac{2I}{R} = \frac{2 \cdot 20}{25 \cdot 10^{-3}} = 1600 \text{ mOe} \quad ;$$

$$B = \mu_0 H = 10^{-7} \left(\frac{\text{Wb/m}^2}{\text{mOe}}\right) 16\,000 \,(\text{mOe}) = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 \; ;$$

b) la distanța $r_0 = 20$ mm de axul conductorului

$$H = \frac{2I}{R^2} r_0 = \frac{2 \cdot 20}{25^2 \cdot 10^{-6}} 20 \cdot 10^{-3} = \frac{80 \cdot 10^{-2}}{625 \cdot 10^{-6}} = 1280 \text{ mOe} \; ;$$

$$B = \mu_0 H = 10^{-7} \cdot 1280 = 1{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 \; .$$

2) *În sistemul MKSA raționalizat*

a) pe suprafața conductorului

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{20}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 128 \text{ A} \cdot \text{sp/m} \quad ;$$

$$B = \mu_0' H = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Wb/m}^2}{\text{A} \cdot \text{sp/m}}\right) 128 \,(\text{A} \cdot \text{sp/m}) = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 \quad ;$$

Scanned with OKEN Scanner

b) la distanța r_0

$$H = \frac{I}{2\pi R^2} r_0 = \frac{20}{2\pi \cdot 25^2 \cdot 10^{-6}} 20 \cdot 10^{-3} = 102 \text{ A} \cdot \text{sp/m} \ ;$$

$$B = \mu_0' = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 102{,}4 = 1{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2 \ .$$

3) *In sistemul CGS e.m. neraționalizat*

a) pe suprafața conductorului

$$H = \frac{2I}{R} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-1}}{25 \cdot 10^{-1}} = 1{,}6 \text{ Oe} \ ;$$

$$B = \mu_0 H = 1 \left(\frac{\text{gauss}}{\text{Oe}} \right) 1{,}6 \text{ (Oe)} = 1{,}6 \text{ gauss} \ ;$$

b) la distanța r_0

$$H = \frac{2I}{R^2} r_0 = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^{-1}}{(25 \cdot 10^{-1})^2} \cdot 2 = 1{,}28 \text{ Oe} \ ;$$

$$B = 1{,}28 \text{ gauss} \ .$$

4) *In sistemul CGS raționalizat*

a) pe suprafața conductorului

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{20 \cdot 10^{-1}}{2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-1}} = 0{,}128 \text{ A} \cdot \text{sp/cm} \ ;$$

$$B = \mu_0 H = 4\pi \left(\frac{\text{gauss}}{\text{As} \cdot \text{p/cm}} \right) 0{,}128 \text{ (A} \cdot \text{sp/cm)} = 1{,}6 \text{ gauss} :$$

b) la distanța r_0

$$H = \frac{I}{2\pi R^4} r_0 = \frac{20 \cdot 10^{-1}}{2\pi (25 \cdot 10^{-1})^2} 2 = 0{,}1018 \text{ A} \cdot \text{sp/cm} \ ;$$

$$B = 1{,}28 \text{ gauss} \ .$$

6-10. Forțe electrodinamice

Am arătat, în par. 6-2, că un conductor parcurs de curent și așezat într-un cîmp magnetic este supus din partea cîmpului unei forțe numită forță electromagnetică. Acțiuni mecanice intervin și între conductoarele parcurse de curenți electrici. De exemplu, dacă două conductoare paralele sînt parcurse de curenți în același sens (fig. 6-20a), ele se atrag; dacă sînt străbătute de curenți în sens contrar, ele se resping (fig. 6-20b).

Pe acest fenomen se bazează definiția dată în par. 2-2 unității de curent (a patra unitate fundamentală a sistemului MKSA).

Această acțiune de atracție și de respingere poate fi pusă în evidență și prin suprapunerea cîmpurilor magnetice ale celor două conductoare paralele.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd curenţii din conductoare au acelaşi sens, liniile lor de forţă au şi ele acelaşi sens şi cîmpurile lor magnetice se compun într-un cîmp rezultant, aşa cum arată fig. 6-21a. Liniile de forţă sînt mai dese în stînga conductorului din stînga şi în dreapta conductorului din dreapta, unde ele

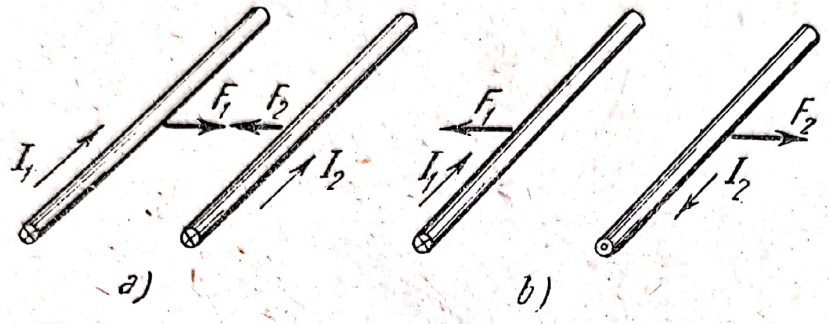


Fig. 6-20. Acţiunea reciprocă a conductoarelor rectilinii parcurse de curent

avînd acelaşi sens se adună, iar în spaţiul dintre cele două conductoare, unde liniile de forţă au sensuri contrare şi se scad, ele sînt foarte rare. Asemenea unor linii elastice întinse, ele solicită conductoarele să se apropie.

Dacă conductoarele sînt străbătute de curenţi în sens contrar, cîmpurilor lor magnetice se compun precum arată fig. 6-21 b. Liniile de forţă aflate în spaţiul dintre cele două conductoare se adună, se îndeasă şi, ase-

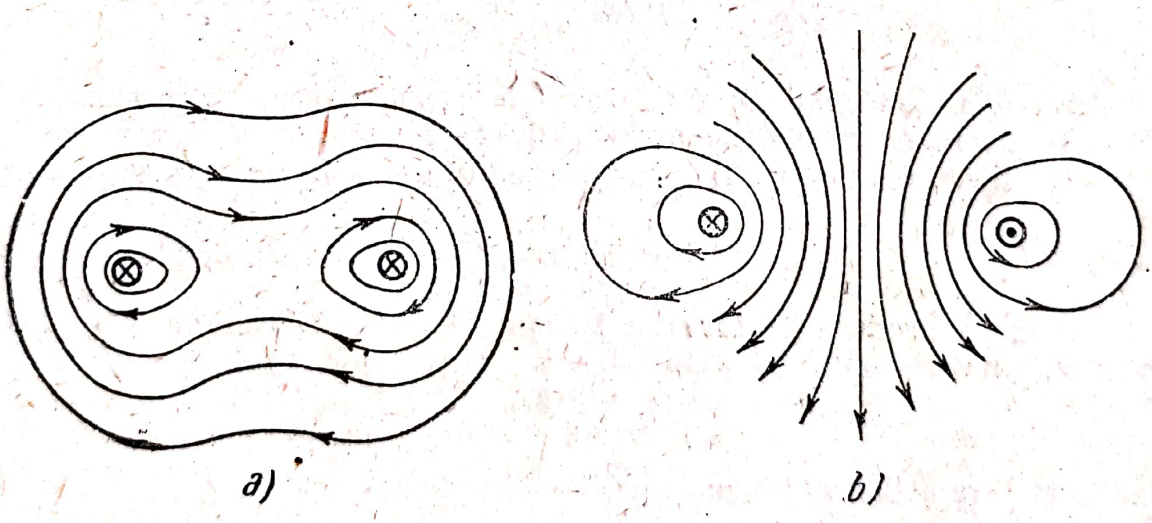


Fig. 6-21. Cîmpul magnetic rezultant din jurul conductoarelor liniare parcurse de curent

menea unor fire elastice comprimate lateral, ele solicită conductoarele să se depărteze. Acţiunile mecanice dintre conductoarele parcurse de curenţi poartă denumirea de *acţiuni electrodinamice* şi forţele respective *forţe electrodinamice*.

Forţa de atracţie sau de respingere între două conductoare paralele parcurse de curent se determină precum urmează:

Să notăm cu I_1 și I_2 curenții care parcurg cele două conductoare paralele, cu l lungimea lor și cu d distanța dintre ele (fig. 6-22). Dacă l

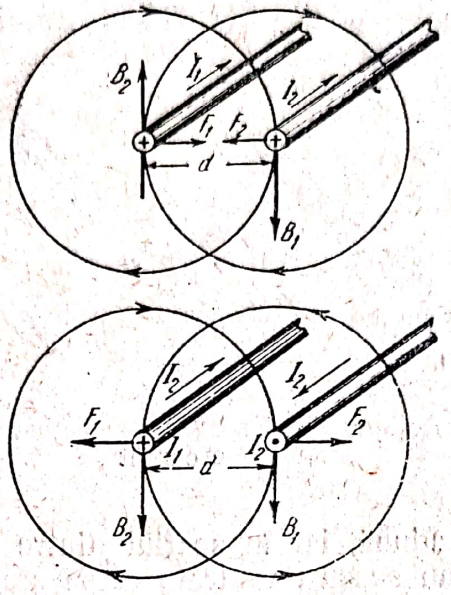


Fig. 6-22. Forțele electrodinamice care apar între două conductoare rectilinii parcurse de curent

este cu mult mai mare decît d, inducția magnetică creată de primul conductor de-a lungul conductorului al doilea este, conform relației (6-13),

$$B_1 = \mu \frac{2 I_1}{d} .$$

Direcția vectorului B_1 este perpendiculară pe planul format de cele două conductoare și este determinată de regula burghiului.

Conform relației (6-2), asupra conductorului I_2 va acționa o forță

$$F_2 = B_1 l I_2 = \mu \frac{2 I_1 I_2}{d} l.$$

Inducția produsă de curentul I_2, din cel de al doilea conductor, de-a lungul primului conductor este

$$B_2 = \mu \frac{2 I_2}{d} ,$$

iar forța care acționează asupra primului conductor

$$F_1 = B_2 l I_1 = \mu \frac{2 I_1 I_2}{d} . \qquad (6\text{-}39)$$

Prin urmare, cele două forțe F_1 și F_2 sînt egale între ele, așa cum trebuia să ne așteptăm.

Forța care acționează asupra unității de lungime a conductorului este

$$F_0 = \frac{F}{l} = \mu \frac{2 I_1 I_2}{d} . \qquad (6\text{-}56)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul general, cînd cele două conductoare rectilinii parcurse de curent fac între ele un unghi oarecare α (fig. 6-23), între conductoare apar forțe care tind să le deplaseze în așa fel încît conductoarele să devină paralele, iar curenții să aibă același sens.

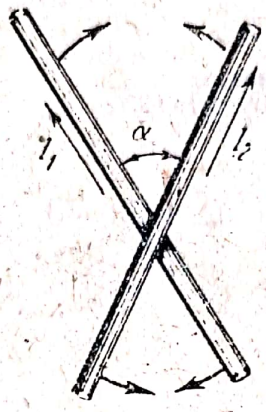


Fig. 6-23. Acțiunea reciprocă între două conductoare parcurse de curent care fac între ele unghiul α

Exemplul 6-3. Să se determine forța, pe metru de lungime, cu care se resping două conductoare paralele, situate la o distanță de 5 cm unul de altul, dacă prin fiecare conductor trece, în sens contrar, un curent de 2 000 A.

Soluția: Aplicînd relația (6-56) în sistemul *MKSA* avem, ținînd seama că $\mu_0 = 10^{-7}$,

$$F = \mu \frac{2\,I^2}{d} = 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 2\,000^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 16\ \text{N} = 1{,}63\ \text{kgf}.$$

6-11. Materiale feromagnetice

Aceste materiale, după cum am arătat în par. 6-6, se caracterizează printr-un coeficient de permeabilitate relativă foarte ridicat, de ordinul miilor de unități. Introduse într-un cîmp magnetic, inducția cîmpului primitiv crește simțitor; deci aceste materiale devin ele însăși surse de cîmp magnetic.

Din grupul de materiale feromagnetice fac parte fierul (cu derivatele sale, oțelul și fonta), nichelul, cobaltul și aliajele lor (de pildă *Fe-Ni, Fe-Ni-Al* etc.) și chiar unele aliaje ale substanțelor neferoase, de exemplu aliajul cu 61,5% *Cu*, 23,5% *Mn* și 15% *Al*.

Pe lîngă un coeficient de permeabilitate ridicat, materialele feromagnetice mai au și următoarele proprietăți magnetice: a) își păstrează, în parte, magnetizarea după dispariția cîmpului primitiv care le-a provocat inducția și b) permeabilitatea lor magnetică nu rămîne constantă ci variază cu intensitea cîmpului magnetic și, la temperaturi ridicate, cu temperatura.

Creșterea inducției magnetice a unui cîmp, prin introducerea în acel cîmp a unui material feromagnetic, se explică în modul următor.

Fenomenele magnetice care apar în interiorul corpurilor feromagnetice sînt datorite unor circuite electrice elementare, existente în interiorul

Scanned with OKEN Scanner

atomilor sau al moleculelor, care corespund mişcării electronilor pe orbitele lor, în jurul nucleelor respective. În materialul neutru din punct de vedere magnetic, curenţii acestor circuite elementare sînt orientaţi absolut la întîmplare, în toate direcţiile; cîmpurile lor se anulează reciproc şi cîmpul rezultant în exterior este nul. Corpul se prezintă în exterior ca nemagnetizat (fig. 6-24a).

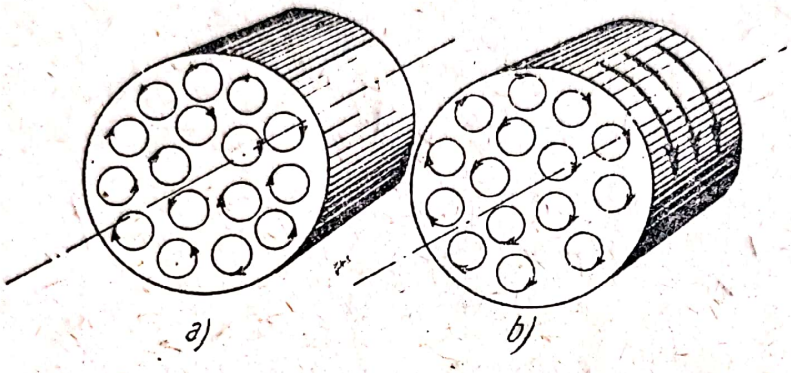


Fig. 6-24. Curenţii moleculari ai unui material feromagnetic: *a*) neorientaţi *b*) orientaţi

Sub acţiunea unui cîmp magnetic exterior H, (spre exemplu, sub acţiunea cîmpului produs de un solenoid parcurs de curent, dacă materialul feromagnetic formează sîmburele solenoidului), care învinge rezistenţele opuse de forţele intermoleculare, aceşti curenţi elementari tind să se orienteze în acelaşi sens, aşezîndu-şi planul lor perpendicular pe direcţia cîmpului exterior. În vecinătatea oricărui punct al secţiunii materialului, dusă perpendicular pe direcţia cîmpului exterior, trec doi curenţi de sens opus, ale căror cîmpuri magnetice se compensează reciproc. Rămîn necompensate numai cîmpurile produse de curenţii care circulă pe suprafaţa laterală a corpului feromagnetic. Aceşti curenţi sînt asemănători curentului unui solenoid şi ei crează un cîmp magnetic suplementar, care se adaugă cîmpului exterior primitiv şi îl intensifică (fig. 6-24 b).

Cu cît cîmpul exterior creşte, cu atît numărul moleculelor orientate este mai mare şi cu atît cîmpul suplementar este mai puternic.

La o intensitate H dată a cîmpului magnetic exterior, inducţia într-un mediu neferomagnetic este

$$B_0 = \mu_0 H. \tag{6-57}$$

Dacă mediul este feromagnetic, la această inducţie se adaugă inducţia J a cîmpului magnetic suplementar, produs de moleculele orientate ale materialului. Inducţia magnetică totală în material este

$$B = \mu_0 H + J. \tag{6-58}$$

Deoarece conform relaţiei (6-28)

$$B = \mu H,$$

rezultă că

$$\mu = \mu_0 + \frac{J}{H}. \tag{6-59}$$

Scanned with OKEN Scanner

Inducția cîmpului suplementar J poartă numele de *vectorul magnetizării* Valoarea acestui vector nu poate crește mereu. Ea atinge o limită, numită *magnetizare de saturație* (J_{sat}) pentru acea valoare a cîmpului exterior pentru care toate moleculele materialului au fost orientate.

Variația vectorului magnetizării J în funcție de cîmpul exterior H (cîmpul de excitație) are aspectul curbei în linie întreruptă din fig. 6-25.

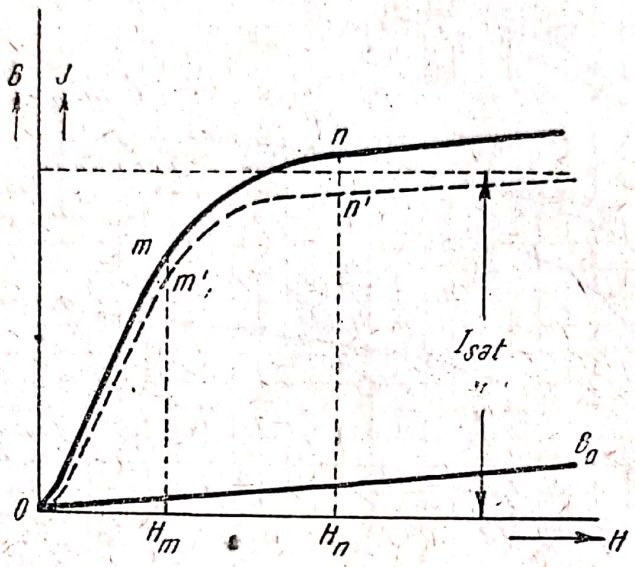


Fig. 6-25. Curba pe magnetizare

Adunînd, la ordonatele acestei curbe ordonatele dreptei B_0 dată de relația (6-57), obținem curba inducției B a materialului respectiv, în funcție de cîmpul H.

Această din urmă curbă se numește *curba de magnetizare* a materialului feromagnetic.

Curba de magnetizare a unui material feromagnetic (fig. 6-25) se compune din trei porțiuni caracteristice: o porțiune *Om,* în care inducția magnetică crește rapid, aproape proporțional cu intensitatea H a cîmpului, și curba se prezintă practic ca o linie dreaptă; porțiunea *m n,* unde creșterea inducției scade din ce în ce mai sensibil cu cîmpul, și curba are o formă oarecum rotundă, din care cauză poartă numele de cotul curbei de magnetizare; porțiunea de dincolo de punctul *n,* în care creșterea inducției B în funcție de cîmp devine din nou practic liniară, însă de data aceasta se face foarte lent. Această din urmă porțiune corespunde regimului de saturație magnetică a materialului, cînd inducția suplementară se apropie de valoarea limită J_{sat}.

Fiecare material feromagnetic are o curbă caracteristică de magnetizare. În fig. 6-26 au fost reprezentate asemenea curbe de magnetizare pentru anumite calități de fontă, oțel turnat și tole de oțel electrotehnic.

Legile de magnetizare ale corpurilor feromagnetice și forma curbei lor de magnetizare au fost stabilite în anul 1872 de savantul rus *A. G. Stoletov,* profesor la Universitatea din Moscova, în lucrarea sa: *„Cercetări teoretice de magnetizare a fierului moale"*. Descoperirea acestor legi a dat un avînt uriaș construcției de mașini și aparate electrice,

înlesnind calculul circuitelor lor magnetice formate din materiale feromagnetice.

După cum rezultă din fig. 6-23, raportul J/H, dat de tangenta la curba $J = f(H)$, nu reprezintă o mărime constantă. La începutul por-

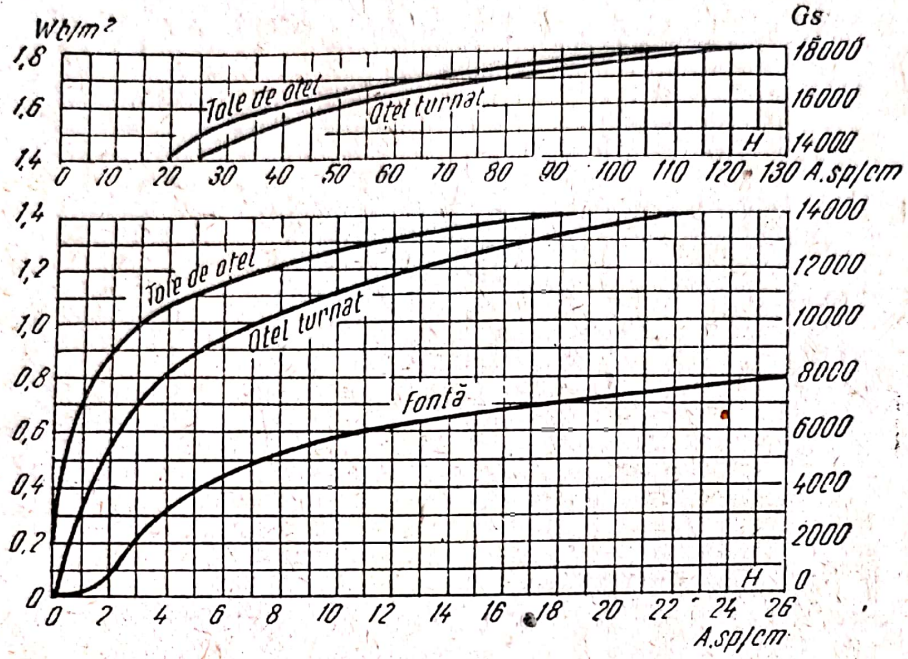


Fig. 6-26. Curbele de magnetizare ale oțelului și fontei

țiunii Om' a curbei, el crește brusc, pentru ca apoi să rămînă aproape constant, iar dincolo de m' să scadă și să tindă spre zero cînd H tinde spre infinit. Potrivit relației (6-59), o variație asemănătoare în funcție de H prezintă și permeabilitatea magnetică μ a materialului feromagnetic. Împărțind ambii membri ai relației (6-59) cu μ_0, se obține valoarea permeabilității relative în funcție de cîmp

$$\mu_r = 1 + \frac{J}{\mu_0 H} = 1 + \frac{J}{B_0} \cdot \qquad (6\text{-}60)$$

Permeabilitatea relativă a materialelor feromagnetice scade cu temperatura (la temperaturi ridicate), ajungînd practic egală cu unitatea pentru temperaturi care, pentru fierul moale, sînt cuprinse între 700° și 900° C, pentru oțel, între 500° și 700° C și pentru nichel, între 250° și 300° C. Temperatura corespunzătoare acestei transformări poartă numele de *punctul Curie.*

6-12. Fenomenul histerezis

Înafară de proprietățile expuse în par. precedent, materialele feromagnetice prezintă și următoarea particularitate remarcabilă: dacă cîmpul H la care este supus un material variază, inducția în fiecare moment depinde de inducția din momentul precedent. Dacă supunem, de pildă, o bucată de fier neutru din punct de vedere magnetic unui cîmp magnetic

exterior, a cărui intensitate o variem de la 0 la H_1 (fig. 6-27) inducția magnetică variază, după curba de magnetizare a materialului respectiv, de la zero la o valoare maximă pozitivă B_1, dată de ordonata punctului A_1. Dacă acum scădem valoarea intensității cîmpului magnetic de la H_1 la zero, inducția magnetică nu coboară după curba A_1O ci după o curbă nouă A_1C; aceloraşi valori ale cîmpului H, luate în ordine inversă, le corespund valori ale inducției B mai mari. În punctul O, deşi cîmpul este nul ($H=0$), inducția nu se anulează ci păstrează valoarea OC. Dacă am opri experiența în acest punct, bucata de fier ar deveni

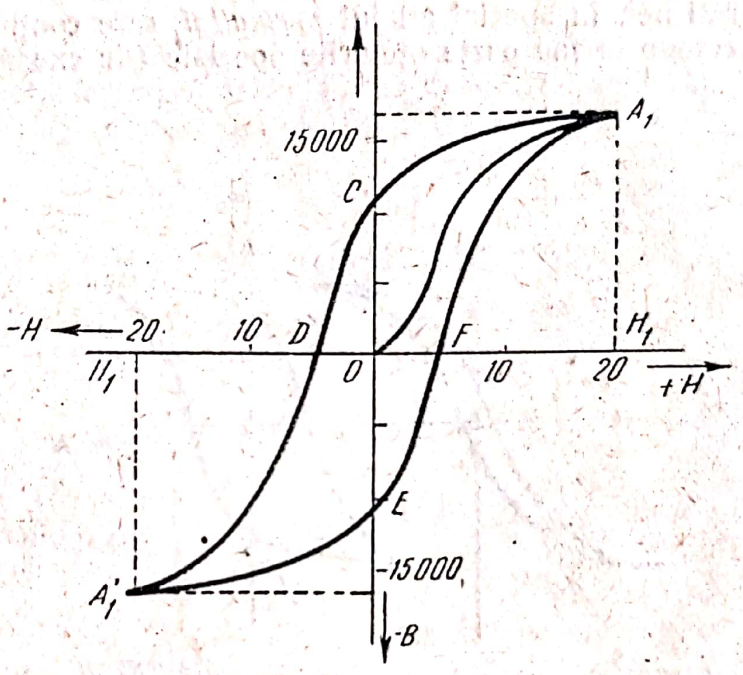


Fig. 6-27. Ciclul de histerezis

un magnet permanent, cu o *inducție remanentă* B. dată de ordonata OC. Pentru a demagnetiza bucata de fier, adică pentru a o face sa-şi piardă complet magnetismul dobîndit, trebuie să o supunem unui cîmp negativ OD. Numim acest cîmp, *cîmp coercitiv* (uneori forță coercitivă). Pentru acest cîmp, inducția fierului devine din nou zero. Dacă continuăm să supunem acum bucata de fier unui cîmp negativ din ce în ce mai puternic, inducția scade sub zero, devine negativă şi creşte apoi în valoare negativă după curba DA'_1. În A'_1 am atins punctul de inducție maximă negativă — B_1, pentru valoarea negativă — H_1 a cîmpului. Dacă micşorăm acum valorile negative ale cîmpului, inducția se deplasează pe ramura A'_1E a curbei, atingînd punctul E pentru un cîmp egal cu zero. Aici avem un magnetism remanent $OE=OC$ de data aceasta negativ, deci cu poli inversați față de cel precedent. Pentru a anula acest magnetism remanent avem nevoie de o forță coercitivă pozitivă $OF=OD$. Continuînd mai departe creşterea cîmpului, ajungem din nou la punctul A_1. După cum se vede, inducția rămîne mereu în urma cîmpului care o produce, de aceea fenomenul poartă numele de *histerezis*, de la cuvîntul grecesc care înseamnează întîrziere.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă repetăm acum variația cîmpului între aceleași limite $+H_1$ și $-H_1$, valoarea inducției va urma exact conturul $A_1CDA'_1EFA_1$, care poartă numele de *curbă* sau *buclă de histerezis*.

Curbele de histerezis variază ca formă după materialele feromagnetice întrebuințate. Utilizările industriale cer anumite tipuri de curbe de histerezis, deci anumite materiale feromagnetice.

Se disting materiale magnetice *moi*, caracterizate printr-o forță coercitivă mică și materiale magnetice *tari*, avînd o forță coercitivă mare. Din prima categorie fac parte fierul moale, oțelul foarte dur, aliajele dintre fier și nichel, în special aliajul *permalloi*, care conține 78% *Ni* etc. Din a doua categorie fac parte oțelurile speciale (de exemplu aliajul 65% *Fe*, 25% *Ni* și 10% *Al*). În fig. 6-28 sînt reprezentate tipurile caracteristice ale curbelor de histerezis pentru materialul „moale" (curba a) și „tare" (curba b).

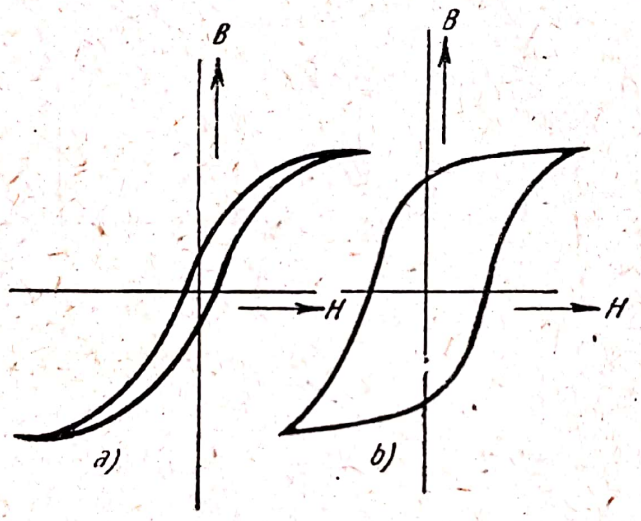


Fig. 6-28. Curbele de histerezis pentru un material
a) „moale"; *b*) „tare"

Demagnetizarea și remagnetizarea unui material feromagnetic, adică orientarea magnetică a moleculelor materialului, cînd într-un sens, cînd în altul, necesită un anumit consum de energie, care apare sub formă de căldură în masa materialului. Se demonstrează (vezi par. 7-17) că, la o anumită scară, suprafața curbei de histerezis reprezintă tocmai energia pierdută în fier pentru un ciclu de histerezis, adică pentru o variație a cîmpului magnetic de la valoarea maximă pozitivă la valoarea maximă negativă și înapoi la valoarea maximă pozitivă.

Prin însuși principiul lor de funcționare, mașinile și unele aparate electrice au anumite porțiuni constituite din materiale feromagnetice, care sînt supuse unor magnetizări alternative foarte dese. Din această cauză, în aceste porțiuni se produc pierderi de energie datorită fenomenului histerezis, cu atît mai mari cu cît se schimbă mai des sensul cîmpului într-un interval de timp determinat, adică cu cît se repetă mai des ciclul histerezis. Aceste pierderi mai depind de inducția maximă, de calitatea și compoziția materialului, adică de tipul curbelor de histerezis, și de greutatea lui. În scopul reducerii acestor pierderi, în construcția mașinilor și aparatelor

electrice sînt utilizate materiale de tip „moale", cu suprafața de histerezis cît mai redusă.

Pentru a se calcula puterea pierdută prin fenomenul histerezis, se aplică următoarea formulă empirică, stabilită experimental,

$$p_H = \sigma_H \cdot \frac{f}{100} \left(\frac{B_m}{10\,000} \right)^2 \text{W/kg} , \qquad (6\text{-}61)$$

în care σ_H este un coeficient care depinde de natura și calitatea metalului și care se determină experimental, B_m este valoarea în gauss a inducției maxime pe care o atinge metalul, iar f este numărul de cicluri histerezis pe secundă (frecvența de magnetizare) la care este supus acest metal. În tabela 6-1 sînt date valorile coeficientul σ_H pentru oțelul în tole (în table), utilizat la construcția mașinilor și transformatoarelor electrice.

Tabela 6-1

Coeficientul σ_H pentru tolele de oțel

Felul materialului	Grosimea tolelor mm	σ_H
Oțel obișnuit	0,35	4,7
	0,5	4,4
	1,0	4,4
Oțel electrotehnic (aliat cu 2—4% siliciu)	0,35	2,4
	0,5	3,0

Materialele magnetice de tipul „tare" sînt utilizate la fabricarea magneților permanenți.

Exemplul 6-4. Care este puterea pierdută prin histerezis într-o masă din tole de oțel electrotehnic, grea de 500 kg, la o inducție de 14 000 gauss, frecvența de magnetizare fiind de 50 cicluri/s. Tolele au o grosime de 0,5 mm.

Soluția: Se aplică relația (6-61). În tabela 6-1 se găsește pentru tole de oțel electrotehnic de 0,5 mm, $\sigma_H = 3$.

$$p_H = 3 \cdot \frac{50}{100} \left(\frac{14\,000}{10\,000} \right)^2 = 2{,}94 \text{ W/kg} .$$

$$p_{Ht} = 2{,}94 \cdot 500 = 1470 \text{ W} = 1{,}47 \text{ kW} .$$

6-13. Refracția liniilor de inducție magnetică

Fluxul magnetic care străbate medii de permeabilități diferite este conservativ, adică își păstrează aceeași valoare, la fel ca și curentul electric care trece prin conductoare de conductivități diferite. Ceea ce diferă la trecerea unui flux dintr-un mediu de o permeabilitate într-altul, de altă permeabilitate, este valoarea inducției magnetice și înclinarea vectorului inducției față de normala la suprafața de separație.

Să examinăm comportarea liniilor de inducție la limita a două medii de permeabilități magnetice diferite μ_1 și μ_2. Fie ΔS o porțiune

plană a suprafeței de separație (fig. 6-29). Valoarea vectorului inducției în dreptul suprafeței ΔS o notăm cu B_1, în mediul cu permeabilitatea μ_1, și cu B_2, în mediul cu permeabilitatea μ_2. Descompunînd acești

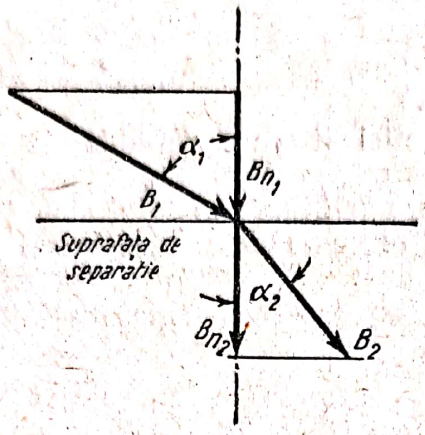


Fig. 6-29. Inducția magnetică la limita de separare a două medii diferite

vectori în cîte două componente, una B_n perpendiculară pe suprafața ΔS și alta B_t, tangentă la ΔS, avem

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_{1n} + \overline{B}_{1t}$$

și

$$\overline{B}_2 = \overline{B}_{2n} + \overline{B}_{2t}.$$

Din conservarea fluxului între cele două medii rezultă că fluxul care iese din primul mediu prin suprafața ΔS este egal cu fluxul care intră în mediul al doilea prin aceeași suprafață ΔS (fig. 6-29). Aceasta conduce la relația

$$B_1 \Delta S \cos \alpha_1 = B_2 \Delta S \cos \alpha_2,$$

în care α_1 și α_2 sînt unghiurile pe care le fac direcțiile vectorilor B_1 și B_2 cu normala la suprafața ΔS.

Ținînd seama că

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_{1n}$$

și

$$B_2 \cos \alpha_2 = B_{2n},$$

rezultă că

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{6-62}$$

adică, *componenta normală a vectorului inducției magnetice B nu se schimbă la trecerea fluxului dintr-un mediu într-altul.*

Relația precedentă se poate pune și sub forma

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2. \tag{6-63}$$

Scanned with OKEN Scanner

Componentele inducțiilor tangente la suprafața ΔS, sînt date de relațiile

$$B_{1t} = B_1 \sin \alpha_1 = \mu_1 H_1 \sin \alpha_1 ,$$
$$B_{2t} = B_2 \sin \alpha_2 = \mu_2 H_2 \sin \alpha_2 .$$

Dacă scriem legea circuitului magnetic pentru conturul închis de o linie foarte apropiată de suprafața ΔS, de lungime $2\Delta l$ (fig. 6-30),

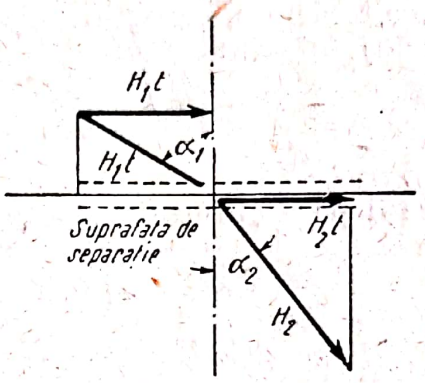


Fig. 6-30. Legea circuitului magnetic

avem, ținînd seama că suprafața ΔS nu este străbătută de nici un curent,

$$H_{2t} \Delta l - H_{2t} \Delta l = 0$$

sau

$$H_{1t} = H_{2t} ,$$

de unde

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2 . \qquad (6\text{-}64)$$

Împărțind, membru cu membru, relația (6-64) cu relația (6-63), obținem

$$\frac{H_1 \sin \alpha_1}{\mu_1 H_1 \cos \alpha_1} = \frac{H_2 \sin \alpha_2}{\mu_2 H_2 \cos \alpha_2} ,$$

de unde rezultă

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} , \qquad (6\text{-}65)$$

adică, *tangentele unghiurilor dintre direcția vectorilor de inducție la suprafața de separație dintre două medii diferite și direcția normală la această suprafață de separație sînt proporționale cu permeabilitățile magnetice ale mediilor respective.*

La trecerea dintr-un mediu feromagnetic (μ_r foarte ridicat) într-un mediu neferomagnetic (μ_r practic egal cu unitatea) sau invers, vectorul inducției în mediul neferomagnetic este practic perpendicular pe suprafața de separație, oricare ar fi înclinația vectorului inducției în mediul feromagnetic, căci, conform relației (6-65),

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0 ,$$

deoarece $\mu_1 \gg \mu_2$.

6-14. Circuitul magnetic

Se numește *circuit magnetic* ansamblul mediilor magnetice prin care se închide un flux magnetic.

Circuitele magnetice prezintă asemănări destul de apropiate cu circuitele electrice. Ca și la acestea din urmă, există circuite magnetice simple, neramificate, în care fluxul își păstrează aceeași valoare de-a lungul circuitului, și circuite ramificate, în care fluxul se ramifică în anumite puncte ale circuitului, pentru a se recompune iarăși în alte puncte.

Ca exemplu de circuit simplu, neramificat, se poate considera circuitul toroidului (fig. 6-16), al cărui flux, dat de relația (6-52), este

$$\Phi = \mu \frac{4\pi w I}{l} S.$$

Această relație poate fi pusă și sub forma

$$\Phi = \frac{4\pi w I}{\frac{l}{\mu S}} . \qquad (6\text{-}66)$$

Expresia $4\pi wI$, de la numărătorul relației (6-66), se numește *forță magnetomotoare* (f.m.m) * a circuitului magnetic și se notează simbolic cu $\mathcal{F}$. Deci

$$\mathcal{F} = 4\pi w I. \qquad (6\text{-}67)$$

Expresia $l/\mu S$, de la numitorul relației (6-66), se numește *rezistență magnetică* sau *reluctanță* a circuitului magnetic și se notează simbolic cu $\mathcal{R}$. Deci

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} . \qquad (6\text{-}68)$$

Cu aceste notații, relația (6-66) devine

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} , \qquad (6\text{-}69)$$

adică, *fluxul unui circuit magnetic este dat de raportul dintre f.m.m. și reluctanță.*

Această expresie a intensității fluxului magnetic are aceeași formă ca și relația care exprimă legea lui Ohm în circuitele electrice,

$$I = \frac{E}{R} .$$

Dacă comparăm reductanța circuitului magnetic, dată de relația (6-68), cu rezistența circuitului electric, dată de relația (2-15),

$$R = \frac{l}{\gamma S} ,$$

*) In unele tratate de electrotehnică în locul denumirii de *f.m.m.* se întrebuințează denumirea de *solenație.*

se vede că permeabilitatea μ are aceeași semnificație în circuitul magnetic ca și conductivitatea γ în circuitul electric. Dar, în timp ce γ este independentă de valoarea intensității curentului I, permeabilitatea μ depinde de B, deci, dacă ținem seama că la S constant $\Phi \equiv B$, depinde de Φ.

Produsul wI, din relația (6-67), poartă numele de *amperspire* (A. sp). Prin urmare, f.m.m. este egală cu de 4π ori numărul de amperspire.

Dacă în relația (6-66) înlocuim pe μ prin $\mu'/4\pi$ obținem expresia fluxului în sistemul raționalizat,

$$\Phi = \frac{wI}{\frac{l}{\mu' S}}. \qquad (6\text{-}66a)$$

În acest caz, f.m.m. devine

$$\mathcal{F} = wI. \qquad (6\text{-}67a)$$

Prin urmare, utilizînd sistemul raționalizat, dispare coeficientul 4π din formulele care conțin f.m.m.; acest coeficient fiind inclus în expresia permeabilității μ', f.m.m. se măsoară în amperspire.

Să presupunem acum că toroidul dispune de un interval de aer, de o lungime l_0 relativ redusă față de restul lungimii sale l_1 (fig. 6-31). Un asemenea interval de aer poartă numele de *întrefier*. Prin

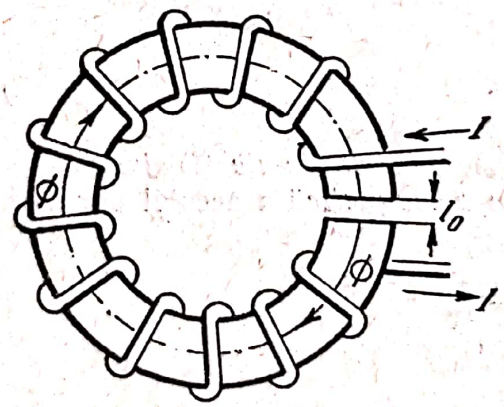


Fig. 6-31. Circuit magnetic cu întrefier

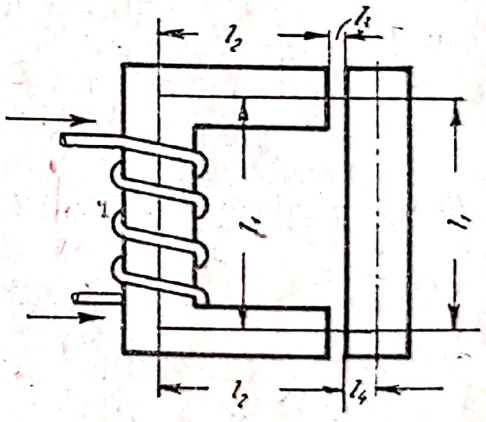


Fig. 6 - 32. Circuit magnetic simplu

urmare, în sîmburele de fier de lungime l_1, permeabilitatea este μ, iar în întrefierul de lungime l_0, permeabilitatea este μ_0. Dacă lungimea l_0 a întrefierului este suficient de redusă, tubul de forță al fluxului din întrefier păstrează o secțiune constantă S_0. Aplicăm legea circuitului magnetic, considerînd drept contur de integrare linia mijlocie a torului (linia mijlocie a traseului pe care se măsoară reluctanța). Dacă notăm cu H cîmpul în fier și H_0, în întrefier, obținem

$$H l_1 + H_0 l_0 = 4\pi w I \qquad (6\text{-}70)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, introducînd în locul intensităţilor cîmpului H şi H_0 inducţiile magnetice respective $B = \mu H$ şi $B_0 = \mu_0 H_0$, avem

$$\frac{B}{\mu} l_1 + \frac{B_0}{\mu_0} l_0 = 4\pi w I .$$

Ţinînd seama că $B = \Phi/S$ şi $B_0 = \Phi/S_0$, relaţia precedentă devine

$$\Phi \left(\frac{l_1}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S_0} \right) = 4\pi w I$$

sau

$$\Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0) = \mathcal{F},$$

de unde

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_0} .$$

În cazul general, al unui circuit simplu, format din porţiuni de materiale feromagnetice şi din întrefieruri de secţiuni şi lungimi diferite (fig. 6-32), valoarea fluxului magnetic, pentru orice secţiune transversală a circuitului, este constantă

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \cdots = B_n S_n .$$

În acest caz, împărţind circuitul magnetic în sectoare de lungimi l_1, $l_2, \cdots, l_n$, în care B şi μ îşi păstrează aceeaşi valoare, relaţia (6-70) devine

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_n l_n = 4\pi w I \qquad (6\text{-}71)$$

sau

$$\Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \cdots + \mathcal{R}_n) = \mathcal{F},$$

de unde

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\sum \mathcal{R}} . \qquad (6\text{-}72)$$

Termenii Hl din relaţia (6-71) se numesc *căderile de tensiune magnetică* pe porţiunea de circuit l sau *tensiunea magnetică* a acestei porţiuni.

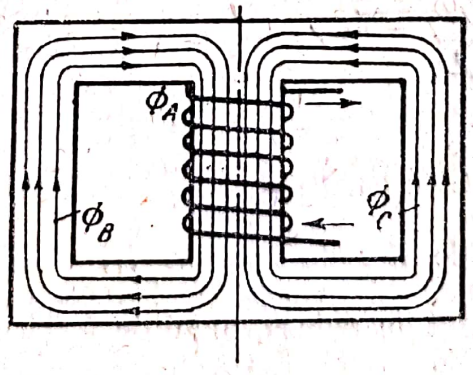


Fig. 6 - 33. Circuit magnetic ramificat

Relaţia (6-71) poate fi privită ca legea de a doua a lui Kirchhoff, aplicată circuitelor magnetice.

Dacă circuitul magnetic are o formă ramificată, aşa cum se arată, de pildă, în fig. 6-33, se foloseşte şi prima lege a lui Kirchhoff apli-

Scanned with OKEN Scanner

cată fluxurilor magnetice: *suma fluxurilor care intră într-un punct de ramificație a circuitului magnetic este egală cu suma fluxurilor care ies din acel punct.*

Referindu-ne la fig. 6-33, avem

$$\Phi_B + \Phi_C = \Phi_A \cdot$$

Dacă considerăm ca negative fluxurile care ies din punctul de ramificație și ca pozitive cele care intră, avem relația

$$\sum \Phi = 0 \cdot \qquad (6\text{-}73)$$

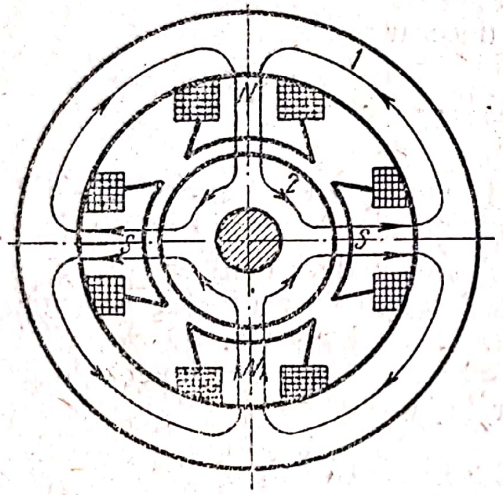


Fig. 6-34. Circuitul magnetic unei mașini electrice de curent continuu

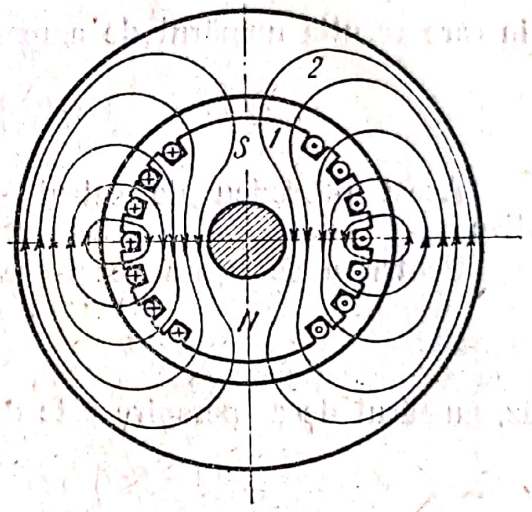


Fig. 6-35. Circuitul magnetic al unei mașini electrice de curent alternativ

În general, în mașinile electrice circuitele magnetice sînt ramificate simetric. În fig. 6-34 este reprezentat schematic circuitul magnetic al unei mașini electrice de curent continuu cu patru poli, iar fig. 6-35, circuitul magnetic al unei mașini de curent alternativ cu doi poli.

6-15. Calculul circuitului magnetic

Problema cea mai frecventă care intervine în practică, în calculul unui circuit magnetic, este determinarea f.m.m. necesară pentru producerea unui anumit flux sau a unei anumite inducții magnetice, într-un circuit de dimensiuni geometrice cunoscute. Soluția problemei duce la determinarea mărimii curentului de excitație necesar funcționării mașinilor electrice, electromagneților, releelor magnetice etc.

Calculul se efectuiază în modul următor:

Se determină, pentru fiecare porțiune de aceeași secțiune a circuitului magnetic, valorile inducțiilor magnetice respective B_1, B_2, $\cdots B_n$ și, apoi, cu ajutorul permeabilității $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, valorile respective ale intensității cîmpului magnetic în acele porțiuni de circuit.

Pentru porțiunile de întrefier, sau de material nemagnetic, pentru care $\mu = \mu_0$, intensitatea cîmpului este dată de relația

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{10^{-7}\,\frac{H}{m}} = B_0\,\frac{10 \cdot A}{cm.\ gauss}\ , \qquad (6\text{-}74)$$

în care B_0 reprezintă inducția magnetică în porțiunile respective ale circuitului magnetic.

F.e.m. necesară se calculează cu formula (6-71)

$$4\pi w I = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_n l_n\ ,$$

din care rezultă numărul de amperspire necesar

$$w I = \frac{1}{4\pi}(H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_n l_n).$$

Acest procedeu de calcul necesită cunoașterea permeabilității relative μ_r ($\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$) pentru diversele inducții ale circuitului magnetic.

Pentru a se ușura rezolvarea problemelor de calcul magnetic, s-au construit curbe (fig. 6-26) care permit determinarea directă a cîmpului magnetic H în amperspire pe metru sau, cel mai adesea, pe cm, cînd se cunoaște inducția magnetică B în gauss sau în Wb/m^2, sau invers. În acest caz, numărul de amperspire este dat de relația

$$w I = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \cdots + H_n l_n\ , \qquad (6\text{-}75)$$

în care lungimile $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sînt exprimate în metri sau cm, iar intensitățile cîmpului magnetic, în amperspire pe metru sau pe cm. În acest caz, pentru porțiunile de întrefier sau de material neferomagnetic, intensitatea cîmpului se calculează cu relația (6-39a),

$$H_0 = 80\,B_0\ (A \cdot sp/m) = 0{,}8\,B_0\ (A \cdot sp/cm),$$

în care B_0 reprezintă inducția în gauss a porțiunii de circuit respective.

Exemplul 6-5. Să se calculeze numărul de amperspire necesare pentru a produce, în întrefierul de 1,7 mm lungime a unui toroid de oțel electrotehnic în tole, o inducție magnetică de 12 000 gauss. Diametrul exterior al toroidului este de 30 cm, iar cel interior de 22 cm.

Soluția: Lungimea medie (axială) a toroidului este dată de expresia

$$l = 2\pi\frac{30 + 22}{2} = 163{,}28\ cm\ .$$

Din curba de magnetizare a oțelului turnat (fig. 6-26), obținem pentru $B = 12\,000$ gauss, $H = 13$ A.sp/cm. Pentru întrefier, conform relației (6-39a), avem

$$H_0 = 0{,}8 \cdot 12\,000 = 9\,600\ A \cdot sp/cm\ .$$

Aplicînd relația (6-75), obținem

$$wI = 13\,(163{,}28 - 0{,}17) + 9\,600 \cdot 0{,}17 = 2\,140{,}43 + 1\,632 \cong 3\,753A \cdot sp\ .$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 6-6. Să se calculeze curentul necesar bobinei circuitului magnetic din fig. 6–36, pentru a se produce în circuit un flux magnetic de 400 000 maxwell. Bobina are 250 de spire, iar dimensiunile circuitului magnetic sînt date în tabela de mai jos.

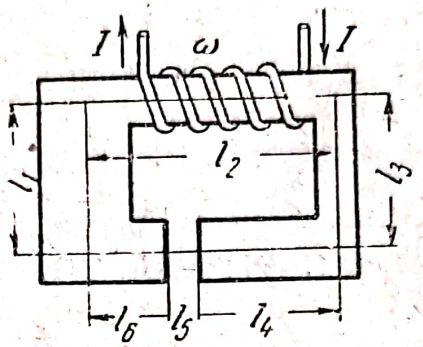


Fig. 6-36. La exemplul 6 - 6

Soluția: Se determină, pentru fiecare secțiune a circuitului, specificată în coloana a 4-a a tabelei, inducțiile în gauss pe care le trecem în coloana a 5-a. Cu ajutorul curbelor de magnetizare din fig. 6-26 determinăm intensitățile cîmpurilor respective, pe care le trecem în coloana a 6-a. Pentru H_0 aplicăm relația (6-39a). Cunoscînd lungimile porțiunilor respective de circuit (coloana a 3-a), obținem produsele Hl din coloana a 7-a. Suma acestor produse $Hl = 4\,868{,}5$ A.sp ne reprezintă amperspirele necesare.

Nr. porțiunii	Materialul	l cm	S cm²	B gauss	H A.sp/cm	$H.l$ A.sp
1	Tole de oțel	14,0	50	8 000	1,4	19,6
2	„ „	18,0	35	11 000	4,6	82,8
3	„ „	14,0	25	16 000	35,0	490,0
4	„ „	11,0	40	10 000	3,0	33,0
5	Aer (întrefier)	0,5	40	10 000	8 000,0	4000,0
6	Oțel în tole	6,5	40	10 000	3,0	19,5
					$Hl =$	4 644,9

După cum rezultă din tabel, cele mai multe amperspire corespund magnetizării întrefierului.

Curentul de excitație al bobinei este dat de relația

$$I = \frac{Hl}{w} = \frac{4.644{,}9}{250} = 18{,}5 \quad .$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

INDUCȚIA ELECTROMAGNETICĂ

7-1. Fenomenul inducției electromagnetice

Am arătat, în capitolul precedent, proprietatea curenților electrici de a produce cîmpuri magnetice. Vom studia acum fenomenul invers și anume producerea curenților electrici cu ajutorul cîmpurilor magnetice. Acest fenomen poartă denumirea de *inducție electromagnetică* și a fost descoperit de *Faraday*, în anul 1831.

Următoarele trei experiențe reproduc principalele cazuri de apariție a fenomenului inducției electromagnetice:

a) Se introduce un magnet A în interiorul unui solenoid B (fig. 7-1),

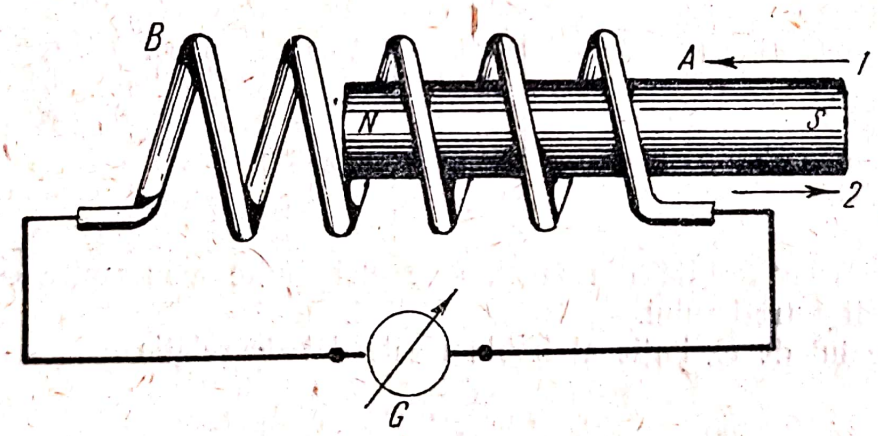


Fig. 7-1. Inducerea f.e.m. în selenoid

al cărui circuit este închis pe un galvanometru (aparat care indică prezența în circuit a unor curenți foarte slabi și pe care îl studiem în par. 15-8). Aparatul este prevăzut cu punctul de zero la mijlocul scării. Acul indicator al galvanometrului va devia într-un anumit sens, după care revine la zero. Dacă se scoate magnetul din bobină, acul va devia în sens opus, pentru a reveni iarăși la zero. Experiența arată că devierea acului indicator este cu atît mai accentuată (într-un sens sau altul), cu cît deplasarea magnetului se face mai rapid.

Prin introducerea și scoaterea magnetului din bobină, mărim sau micșorăm fluxul magnetic ce străbate bobina. Această variație de flux dă

naștere, în spirele bobinei, unei f.e.m. de inducție, deci, în circuitul format de bobină și miliampermetru, unui curent, cu atît mai mare, cu cît variația fluxului se face mai rapid.

De aci scoatem o primă enunțare a *legii inducției:*

Dacă variem fluxul ce străbate un circuit (fluxul înfășurat de circuit), în circuit apare o f.e.m., iar dacă circuitul este închis, această f.e.m. dă naștere unui curent electric.

F.e.m. și curentul electric produs în circuit se numesc *forță electromotoare indusă* și *circuit indus.*

b) Să deplasăm conductorul electric *ab* (fig. 7-2), legat la un galvanometru, într-un cîmp magnetic, în așa fel încît conductorul să taie

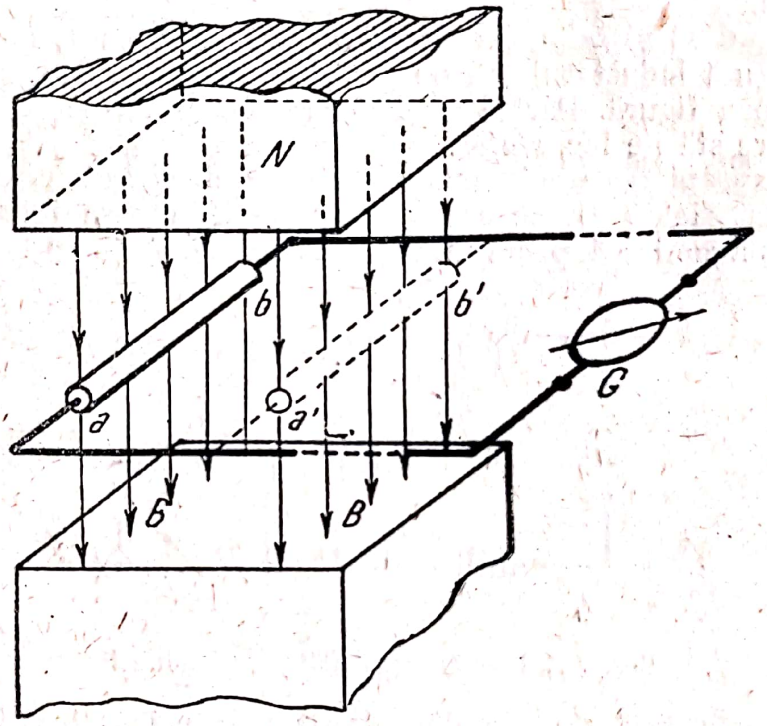


Fig. 7-2. Inducerea f.e.m. în conductorul deplasat în cîmp magnetic

liniile de forță ale cîmpului, întîi din poziția *ab* în *a' b'* și apoi îndărăt în *ab.* Obținem același rezultat ca și în cazul precedent: la prima deplasare, acul galvanometrului deviază într-un anumit sens, iar la a doua deplasare, în sens contrar. Îndată ce conductorul se oprește, acul galvanometrului revine la zero. Devierea crește cu viteza de deplasare a conductorului.

De aci scoatem o altă enunțare a legii inducției electromagnetice:

Cînd mișcăm un conductor electric într-un cîmp magnetic, în așa fel încît el să taie linii de forță, între capetele conductorului se produce o f.e.m., iar dacă conductorul face parte dintr-un circuit închis, această f.e.m. dă naștere unui curent electric.

De fapt, această din urmă enunțare este identică cu cea precedentă, dacă considerăm că conductorul *ab* face parte dintr-un circuit, circuitul galvanometrului, și că, prin tăierea liniilor de forță ale cîmpului magnetic

de către conductor în deplasarea sa, se mărește sau se micșorează fluxul care străbate circuitul, deci acest flux variază.

În amîndouă experiențele de mai sus, este indiferent dacă se mișcă circuitul și stă pe loc magnetul sau electromagnetul, deci cîmpul magnetic, sau invers. Se cere numai ca unul din ele să se deplaseze față de celălalt, pentru a se obține variația fluxului magnetic ce străbate circuitul.

Pe aceste două experiențe se bazează funcționarea tuturor mașinilor electrice, în care intră elementul mișcare. La fel ca în experiențele descrise, în aceste mașini există cîmpuri magnetice, produse de electromagneți care, în ansamblul lor, formează *inductorul mașinii,* și circuite electrice, bobinate pe un miez din tole de fier, *indusul mașinii,* în care ia naștere, prin mișcarea relativă dintre indus și inductor, f.e.m. indusă, care produce curentul indus.

În fig. 6-34 și 6-35, inductorul a fost notat cu 1, iar indusul cu 2. În prima figură inductorul stă pe loc și se învîrtește indusul și invers în cea de a doua figură. Partea mașinii care se învîrtește se numește *rotor,* iar aceea care stă pe loc, *stator.*

c) În apropierea unei bobine *B,* al cărei circuit este legat la un galvanometru (fig. 7-3), se așază o bobină *A,* în așa fel încît parte din fluxul său magnetic să poată străbate bobina *B.* Ambele bobine păstrează

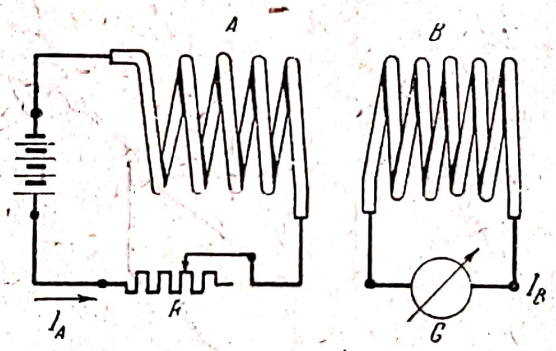


Fig. 7-3. Inducția mutuală între bobine fixe

poziții fixe una față de cealaltă. Bobina *A* este alimentată cu curent de la o sursă printr-un reostat *R,* cu care se variază valoarea curentului.

Cînd curentul bobinei *A* crește, se produce o deviere a acului galvanometrului într-un anumit sens. Cînd curentul scade, devierea are loc în sens opus. Devierea este cu atît mai mare, cu cît creșterea sau descreșterea curentului se face mai brusc, adică cu cît variem mai repede rezistența reostatului *R.* Cînd cursorul reostatului rămîne într-o poziție fixă, deci cînd $I_A = \text{const}$, acul indicator rămîne în poziția de zero.

În cazul de față, în bobina *B* apare o f.e.m. de inducție fără să intervină o mișcare relativă între circuitul indus al bobinei *B* și între cîmpul inductor al bobinei *A.* Variația fluxului în bobina *B* se obține variind fluxul inductor produs de bobina *A,* prin variația curentului I_A.

Spunem că f.e.m. indusă în circuitul bobinei *B* se datorește *inducției mutuale* dintre cele două bobine. Bobina *A,* care produce fluxul variabil, se numește *bobină primară;* bobina *B,* în care se produce f.e.m. de inducție, se numește *bobină secundară.*

Pe principiul inducției mutuale, dintre două circuite fixe, se bazează funcționarea transformatoarelor electrice.

7-2. F. e. m. indusă în circuit

O examinare mai minuțioasă a fenomenului inducției duce la constatarea că f.e.m. indusă în circuit este independentă de mărimea fluxului care străbate circuitul și depinde numai de variația lui în timp. Se constată, de asemenea, că f.e.m. indusă este proporțională cu numărul de spire ai circuitului străbătut de flux.

Sub forma ei generală, legea inducției se exprimă prin relația

$$E = -w\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ , \qquad (7\text{-}1)$$

în care φ este valoarea instantanee a fluxului variabil, w — numărul de spire ale circuitului pe care le traversează acest flux, iar t este timpul. Valoarea f.e.m. indusă este aceeași, oricare ar fi modul de variație al fluxului φ. Ea depinde numai de expresia $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, care reprezintă viteza de variație, la un moment dat, a fluxului.

În cazul cînd circuitul este format dintr-o singură spiră, expresia f.e.m. induse devine

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ . \qquad (7\text{-}1a)$$

Pentru interpretarea acestei formule, se procedează în modul următor:

Se alege un sens pozitiv arbitrar pentru fluxul variabil care străbate planul spirei, de pildă sensul de jos în sus (fig. 7-4). Sensul pozitiv

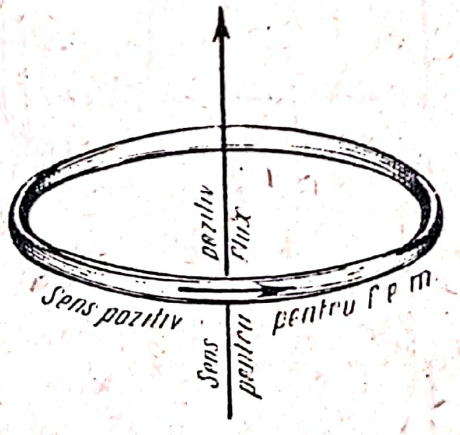


Fig. 7-4. Sensul pozitiv al f.e.m. induse într-un circuit

al f.e.m. induse este sensul în care curentul produs de această f.e.m. în circuit dă naștere unui flux propriu pozitiv. Prin urmare, sensul pozitiv al f.e.m. induse este acela în care trebuie să învîrtim un burghiu, pentru a-l face să înainteze în sensul pozitiv al fluxului. Dacă formula (7-1 a) dă pentru E o valoare pozitivă, adică dacă $\mathrm{d}\varphi$ este negativ, înseamnă că f.e.m. indusă este îndreptată în sensul săgeții și invers.

Pentru a găsi sensul f.e.m. induse, ne putem folosi și de următoarea lege, formulată în 1884 de Academicianul rus prof. *Lenz:*

Sensul f.e.m. de inducție este astfel încît curentul pe care îl produce această f.e.m., dacă circuitul în care apare este închis, să dea naștere unui flux care să se opună variației fluxului inductor.

Conform legii lui Lenz, dacă fluxul inductor φ este pozitiv și crește, $d\varphi$ este pozitiv și f.e.m. indusă și curentul respectiv sînt dirijați astfel încît să dea un flux negativ, care să se opună creșterii $d\varphi$ Dacă fluxul inductor φ este pozitiv și scade, deci $d\varphi$ este negativ, f.e.m. de inducție și curentul respectiv sînt dirijați astfel încît să producă un flux pozitiv, care să se opună scăderii fluxului inductor.

Această interpretare reprezintă aplicarea la un caz particular a unei legi generale a fizicii: *efectul se opune cauzei.*

Legea inducției este a patra lege fundamentală a electricității și este, ca și celelalte trei legi, deja examinate: legea lui Ohm, legea lui Joule-Lenz și legea lui Biot-Savart-Laplace, un rezultat al experienței. Cu ajutorul acestor patru legi fundamentale, pot fi definite toate mărimile electromagnetice.

7-3. F.e.m. indusă în conductorul rectiliniu

Legea generală a inducției, pusă sub forma ecuației (7-1), ne servește să calculăm f.e.m. indusă într-un circuit atunci cînd putem exprima, în funcție de timp, fluxul care străbate circuitul, adică cînd cunoaștem funcția $\varphi = f(t)$.

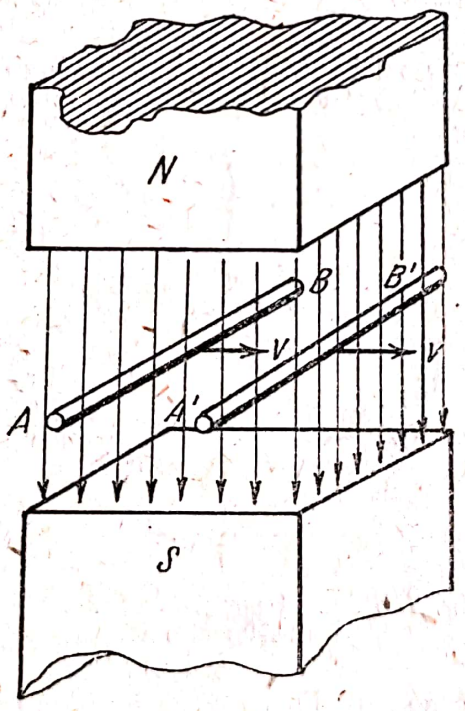


Fig. 7-5. Inducerea f.e.m. în conductorul rectiliniu

Cînd variația de flux este produsă printr-o deplasare, ceea ce se petrece frecvent în cazul mașinilor electrice, este mai comodă o altă formulă de calcul, care să exprime f.e.m. indusă într-un conductor, care constituie un element al circuitului indus al mașinii.

Să presupunem că deplasăm un conductor AB, de lungime l, într-un întrefier în care inducția este omogenă și egală cu B (fig. 7-5). De-

plasarea conductorului se face perpendicular pe direcția lui B. Fie x această deplasare.

Dacă conductorul este perpendicular pe direcția inducției, fluxul magnetic tăiat de conductor este

$$\Phi = B l x,$$

în care lx este suprafața descrisă de conductor în deplasarea sa. Fluxul magnetic tăiat de conductor reprezintă chiar variația fluxului magnetic în spira din care ar face parte conductorul, în ipoteza că ea nu ar mai tăia și alte linii de inducție.

În cazul unei deplasări $\mathrm{d}x$ infinit mici, variația fluxului în spiră va fi $\mathrm{d}\Phi$ și vom avea

$$\mathrm{d}\Phi = B l \, \mathrm{d}x.$$

Împărțind ambii membri ai egalității cu $\mathrm{d}t$, avem

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B l \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Dar $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ este viteza v de deplasare a conductorului în sensul perpendicular pe flux, iar $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ este f.e.m. E_c, indusă în conductor. Deci, putem exprima f.e.m. indusă într-un conductor de lungime l, care se deplasează într-un cîmp omogem de inducție B, perpendicular pe direcția acestui cîmp, cu o viteză v, însăși conductorul fiind perpendicular pe direcția cîmpului, prin relația

$$E_c = B l v. \tag{7-2}$$

F.e.m. E_c rezultă în volți cînd se exprimă B în $\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}$, l în metri și v în m/s. In cazul cînd conductorul, în loc să fie perpendicular pe direcția cîmpului, face cu această direcție un unghi $\alpha < 90^0$, se înlocuiește în relația (7-2) lungimea l a conductorului cu proiecția sa $l \sin \alpha$ pe direcția perpendiculară pe cîmp și relația (7-2) devine

$$E_c = B l v \sin \alpha. \tag{7-2a}$$

Pentru a se determina sensul f.e.m. și deci al curentului indus în conductor, se aplică următoarea regulă simplă, denumită *regula mîinii drepte:*

Așezăm mîna dreaptă întinsă astfel ca liniile de forță ale cîmpului magnetic să intre în palmă și o orientăm astfel încît degetul mare desfăcut să indice sensul mișcării. Restul degetelor ne va arăta sensul f.e.m. induse.

Relația (7-2) poate fi dedusă și pe cale analitică.

În mișcarea sa în cîmpul magnetic, conductorul antrenează cu sine nucleele și electronii atomilor din care este compus. Conform celor expuse în par. 6-3, asupra sarcinilor electrice care se deplasează într-un cîmp magnetic acționează forțe care tind să deplaseze sarcinile pozitive într-un

Scanned with OKEN Scanner

sens, deci în cazul nostru către un capăt al conductorului, și sarcinile negative în sens opus, deci către celălalt capăt al conductorului. Deoarece într-un conductor metalic nu se pot deplasa decît electronii (sarcinile negative), aceștia se vor deplasa într-un anumit sens, legat de sensul cîmpului și sensul de deplasare al conductorului, și în conductorul închis apare curentul electric indus, care durează atîta timp cît durează și deplasarea conductorului în cîmp.

Dacă circuitul conductorului este deschis (fig. 7-5), electronii se vor îngrămădi la unul din capetele conductorului, unde vor produce o sarcină negativă în exces. La celălalt capăt al conductorului, lipsa de electroni produce o sarcină pozitivă. Între cele două sarcini se va produce, de-a lungul conductorului, un cîmp electric, sub acțiunea căruia electronii liberi din interiorul conductorului vor fi solicitați să se deplaseze către capătul încărcat pozitiv, deci invers deplasării imprimate de forțele datorite mișcării lor în cîmpul magnetic. Prin urmare, sarcinile electrice de la cele două capete ale conductorului vor crește pînă cînd forțele interne, produse de cîmpul electric asupra electronilor din conductor, vor echilibra forțele externe, produse de cîmpul magnetic, corespunzătoare vitezei v de deplasare, presupusă constantă.

Conform relației (6-5), forța externă care acționează asupra electronului este

$$F_0 = B e_0 v \ ,$$

iar, conform relației (1-9), forța cîmpului electric este

$$F_e = E Q = E e_0 \ .$$

La echilibru, vom avea

$$E e_0 = B e_0 v \ ,$$

deci

$$E = B v \ .$$

Rezultă că diferența de potențial între capetele conductorului deschis, care este egală cu f.e.m. indusă în conductor, este

$$E_c = E l = B l v \ ,$$

adică am ajuns la relația (7-2). În modul acesta, se verifică analitic și relația experimentală (7-1).

7-4. Fenomene reversibile în aplicarea legii inducției

a) **Transformarea energiei mecanice în energie electrică.** Vom presupune că în circuitul conductorului liniar, din paragraful precedent, se găsește o rezistență R, în care este inclusă și rezistența proprie a conductorului (fig. 7-6). Conductorul, a cărei direcție este perpendiculară pe direcția cîmpului omogen, de inducție B, este deplasat cu viteza v, perpendicular pe acest cîmp, în sensul săgeții v. În conductor apare o f.e.m. de inducție, dată de relația (7-2)

$$E = B l v \ ,$$

al cărui sens este dat de regula mîinii drepte, iar în circuit, un curent

$$I = \frac{E}{R} = \frac{Blv}{R} \cdot \qquad (7\text{-}3)$$

Conductorul, parcurs de curent și aflat în cîmpul magnetic, este

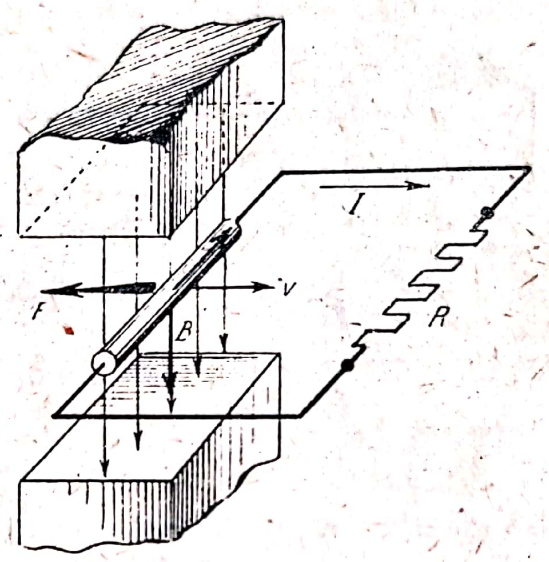


Fig. 7-6. Principiul funcționării generatorului electric

supus unei forțe mecanice, perpendiculare pe direcția conductorului și a cîmpului magnetic, dată de relația (6-2).

$$F = BlI \,,$$

al cărei sens este dat de regula palmei stîngi. Rezultă că forța F are sensul dat de săgeata F, deci un sens invers vitezei v de deplasare a conductorului. Prin urmare, forța F se opune deplasării conductorului în cîmpul magnetic, înfrînează mișcarea acestuia, și, pentru a obține această deplasare, trebuie să aplicăm conductorului o forță exterioară, egală și opusă forței F. Pentru producerea curentului I în conductor este necesar un motor primar, care să dezvolte o putere mecanică egală cu

$$P_{mec} = F \cdot v \cdot$$

Ținînd seama de valoarea forței de frînare F și de relația (7-3), rezultă că

$$P_{mec} = BlIv = IE \,, \qquad (7\text{-}4)$$

adică, puterea mecanică, produsă de motorul primar, este egală cu puterea electrică, care apare în circuit.

În concluzie, *prin deplasarea unui conductor electric, care face parte dintr-un circuit închis, într-un cîmp magnetic, sub acțiunea unor forțe exterioare, energia mecanică este transformată în energie electrică.*

Pe acest principiu se bazează funcționarea generatoarelor electrice, care transformă energia mecanică, primită de la motoarele primare care le antrenează, în energie electrică.

b) **Transformarea energiei electrice în energie mecanică.** Să presupunem că în circuitul conductorului din exemplul precedent se găsește o sursă de energie electrică, de f.e.m. E și de rezistență interioară r (fig. (7-7). Sursa produce în circuit, deci și în conductorul aflat în cîmp,

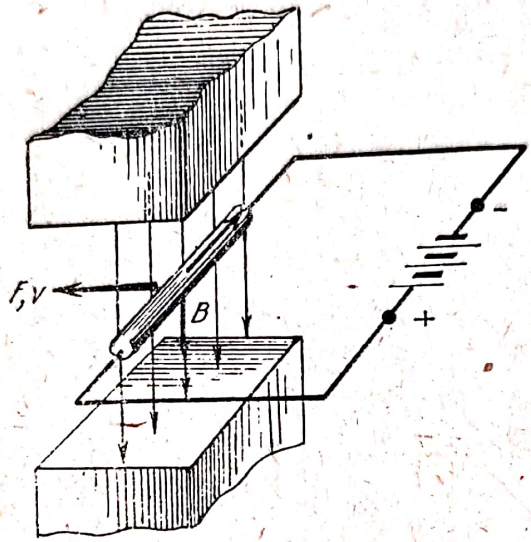


Fig. 7-7. Principiul funcționării motorului electric

un curent I. Cîmpul magnetic acționează asupra conductorului cu o forță

$$F = B l I \cdot$$

Sub acțiunea acestei forțe mecanice, conductorul se deplasează cu o viteză v în sensul dat de regula mîinii stîngi și, în conductor, apare o f.e.m. de inducție, al cărei sens, dat de regula palmei drepte, este invers sensului de scurgere a curentului prin conductor; din această cauză, f.e.m. indusă se numește *forță contraelectromotoare* (f.c.e.m.). Notînd f.c.e.m. cu E', avem

$$E' = B l v \cdot$$

Dacă aplicăm legea a doua a lui Kirchhoff, obținem, notînd cu U tensiunea la bornele sursei,

$$U - E' = R I \ ,$$

în care R este rezistența circuitului exterior al sursei. Din relația precedentă rezultă

$$U = R I^2 + E' I \cdot \qquad (7\text{-}5)$$

Înmulțind cu I ambii membri ai relației (7-5), obținem ecuația bilanț a puterii electrice dezvoltate în conductor,

$$U I = R I^2 + E' I \cdot$$

Ținînd seama că $E' = B l v$, obținem

$$U I = R I^2 + B l v I = R I^2 + F v = R I^2 + P_{mec},$$

adică puterea electrică furnizată conductorului de sursa E se transformă în putere termică în rezistența conductorului și în putere magnetică care poate fi utilizată în exterior.

În concluzie, *prin deplasarea unui conductor electric parcurs de curent într-un cîmp magnetic se produce, sub acțiunea forțelor cîmpului, transformarea energiei electrice în energie mecanică.* Această transformare este însoțită de apariția obișnuită a energiei termice Joule-Lenz care constituie, în acest caz, pierderile transformării.

Pe acest principiu se bazează funcționarea motoarelor electrice care transformă energia electrică în energie mecanică.

Din examinarea celor două cazuri de mai sus, rezultă că transformarea energiei mecanice în energie electrică, și invers, se bazează pe același principiu. Prin urmare, aceste două operații sînt *reversibile,* același dispozitiv putînd îndeplini și funcția de generator și pe aceea de motor. *Principiul reversibilității este comun funcționării tuturor mașinilor electrice.*

7-5. Lucrul mecanic al forțelor electromagnetice

Am arătat, în par. 6-2, că un conductor drept, parcurs de curent și aflat într-un cîmp omogen, este supus unei forțe electromagnetice dată de relația (6-4)

$$F = B l I \sin \alpha$$

care, atunci cînd conductorul este perpendicular pe direcția cîmpului, devine

$$F = B l I.$$

Să presupunem că sub acțiunea acestei forțe conductorul se deplasează, paralel cu el însuși, pe o distanță b (fig. 7-8). Lucrul mecanic

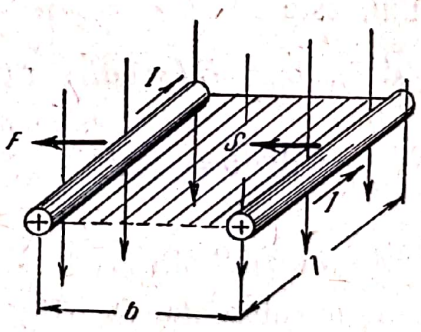


Fig. 7-8. Lucrul mecanic al deplasării în cîmpul magnetic al conductorului rectiliniu, parcurs de curent

produs prin această deplasare a conductorului este

$$A = F b = B l I b. \qquad (7\text{-}6)$$

Produsul lb reprezintă suprafața S descrisă de conductor în deplasarea sa perpendiculară pe direcția cîmpului. Rezultă că produsul

$Blb = BS$ ne dă fluxul magnetic Φ, care trece prin suprafața S, și relația (7-6) devine

$$A = BIS = I\Phi. \qquad (7\text{-}7)$$

Prin urmare, *lucrul mecanic produs prin deplasarea unui conductor parcurs de curent, aflat într-un cîmp magnetic, este egal cu produsul dintre intensitatea curentului din conductor și fluxul magnetic tăiat de conductor.*

Relația (7-7) poate fi aplicată și în cazul general, al unui conductor de formă oarecare parcurs de un curent constant, care se deplasează într-un cîmp neomogen (fig. 7-9). În acest caz, lucrul mecanic ele-

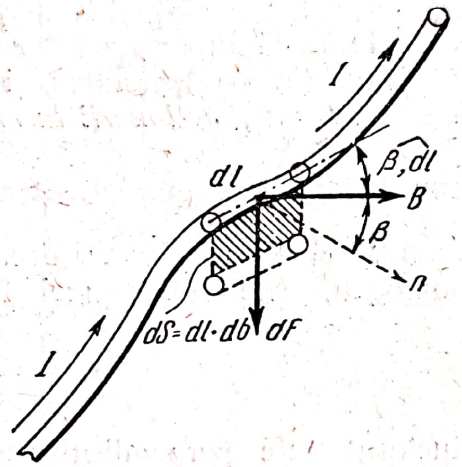


Fig. 7-9. Lucrul mecanic al elementului de conductor

mentar, produs prin deplasarea unui element de lungime dl al conductorului pe o distanță $\overline{db}$ în direcția forței electromagnetice care acționează asupra conductorului, este

$$dA = dF \cdot \overline{db} = BI\, dl\, \overline{db} \sin (\widehat{B,dl}).$$

Ținînd seama că

$$dl\, \overline{db} = dS,$$

urmează că

$$dA = IB\, dS \sin (\widehat{B,dl}).$$

Să ducem normala n la suprafața dS (fig. 7-9). Această normală, cuprinsă în planul format de B cu dl (deoarece forța dF și, deci, deplasarea db este perpendiculară pe acest plan), face cu B un unghi β, care este complementul unghiului $(\widehat{B,dl})$. În consecință,

$$dA = IB\, dS \cos \beta = I\, d\Phi. \qquad (7\text{-}8)$$

Dacă deplasarea elementului de conductor se face sub un unghi oarecare cu direcția forței, se ajunge la același rezultat, în ceea ce privește lucrul elementar efectuat, descompunînd deplasarea db în două componente, una în direcția forței și una perpendiculară pe direcția forței,

și observînd că această din urmă componentă nu produce lucru mecanic.

Lucrul mecanic total, efectuat prin deplasarea întregului conductor de lungime l în cîmpul magnetic neomogen, se obține prin integrarea relației (7-8). Se obține expresia

$$A = \int dA = I \int d\Phi = I\Phi , \qquad (7\text{-}9)$$

în care Φ reprezintă fluxul care traversează suprafața descrisă de conductor în mișcarea sa.

Cînd lucrul mecanic este produs de forțele cîmpului magnetic, el este pozitiv, este un lucru mecanic produs; cînd este produs de o forță exterioară care acționează contra forțelor cîmpului, el este negativ, este un lucru mecanic absorbit.

Un conductor poate fi parcurs de curent numai dacă face parte dintr-un circuit închis. Convenim să considerăm curentul din circuit ca fiind totdeauna pozitiv, iar fluxul magnetic, care trece prin circuit, ca pozitiv atunci cînd el corespunde sensului dat de regula burghiului și ca negativ în caz contrar.

Pentru ca prin deplasarea circuitului să apară un lucru mecanic, trebuie ca fluxul care străbate circuitul să varieze.

Să analizăm, de pildă, ce se întîmplă cu un cadru dreptunghiular, parcurs de un curent I, plasat într-un cîmp magnetic neomogen a cărei inducție crește de la dreapta spre stînga (fig. 7-10). Rezultă că asupra

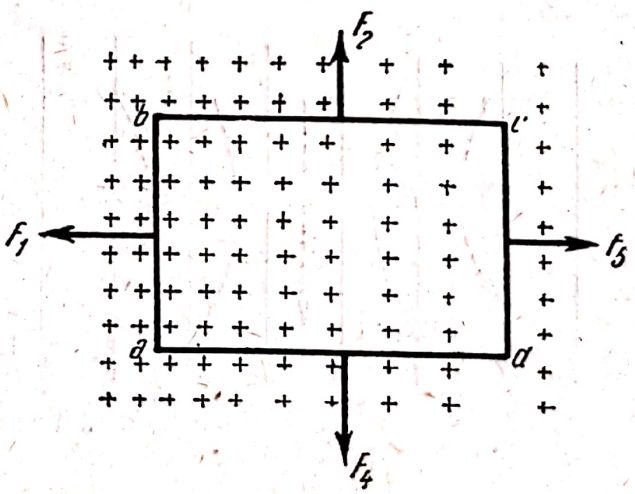


Fig. 7-10. Cadru parcurs de curent și aflat într-un cîmp magnetic

laturii ab a cadrului acționează o forță F_1 mai mare decît forța F_3 care acționează asupra laturii cd. Latura superioară bc a cadrului găsindu-se în aceleași condiții magnetice ca cea inferioară ad, rezultă că $F_2 = F_4$. Prin urmare, forța rezultantă care acționează asupra cadrului este $F = F_1 - F_3$ și sensul ei coincide cu sensul forței F_1, adică cadrul se deplasează spre stînga. Fluxul îmbrățișat de cadru este pozitiv și valoarea sa absolută crește prin deplasarea cadrului.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că forțele F_2 și F_4 sînt perpendiculare pe direcția deplasării cadrului, lucrul lor mecanic este zero, deci lucrul mecanic produs de cadru este dat de relația

$$A = A_{ab} + A_{cd} , \qquad (7\text{-}10)$$

în care A_{ab} reprezintă un lucru mecanic pozitiv (deplasarea laturii ab se face în sensul forței F_1), iar A_{cd}, un lucru mecanic negativ (deplasarea laturii cd se face în sens contrar forței F_3). Prin urmare, relația (7-10) trebuie privită ca o sumă algebrică.

Dar, din cele arătate mai sus,

$$A_{ab} = I\Phi_{ab} \quad \text{și} \quad A_{cd} = -I\Phi_{cd} ,$$

în care Φ_{ab} și Φ_{cd} sînt fluxurile care traversează suprafețele descrise de conductoarele ab și cd în timpul deplasării lor.

Cu aceste valori ale lucrurilor mecanice A_{ab} și A_{cd}, relația (7-10) devine

$$A = I(\Phi_{ab} - \Phi_{cd}) = I\Delta\Phi . \qquad (7\text{-}11)$$

Diferența $\Delta\Phi = \Phi_{ab} - \Phi_{cd}$ este egală însă, evident, cu diferența dintre fluxul Φ_2, care străbate circuitul la sfîrșitul drumului parcurs de cadru, și fluxul Φ_1, care străbate circuitul la începutul aceluiași drum; deci

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) .$$

În timpul deplasării unui circuit electric, parcurs de curent, sub acțiunea cîmpului magnetic, variația fluxului prin circuit este totdeauna

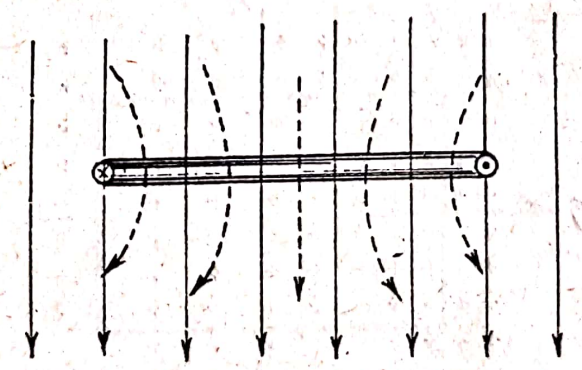


Fig. 7-11. Sfera parcursă de curent și aflată într-un cîmp magnetic

pozitivă. Fluxul prin circuit crește dacă el este pozitiv sau descrește dacă este negativ.

De pildă, dacă așezăm o spiră, parcursă de curent, într-o poziție oarecare într-un cîmp omogen, spira se va roti pînă cînd axa ei va coincide cu direcția cîmpului magnetic exterior și fluxul propriu al spirei va avea același sens ca și fluxul cîmpului, cînd cele două fluxuri se vor aduna. După atingerea acestei poziții de echilibru, forțele care acționează asupra spirei tind apoi să o deformeze, să-i mărească suprafața la maximum, astfel încît fluxul care trece prin conturul spirei să fie cît mai mare (fig. 7-11).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă spira se deplasează într-un cîmp neomogen, pe lîngă rotirea spirei apare și mișcarea de translație spre regiunea cîmpului în care inducția este maximă, așa cum am arătat în exemplul de mai sus.

De aici deducem următoarea regulă:

Orice circuit electric, parcurs de curent, aflat într-un cîmp magnetic, tinde să ocupe poziția în care fluxul care străbate circuitul să fie pozitiv și maxim. Cînd variația $\Delta\Phi$ a fluxului magnetic prin circuit este negativă, potrivit relației (7-11) lucrul mecanic este negativ, adică el rezultă nu din acțiunea forțelor cîmpului magnetic, ci sub acțiunea unor forțe externe, al căror sens este opus sensului forțelor cîmpului.

Exemplul 7-3. Într-un cîmp magnetic uniform, cu o inducție $B = 8\,350$ gauss, sînt așezate, perpendicular pe direcția cîmpului, două șine paralele, lungi de 5 m, la o distanță d între ele de 0,6 m (fig. 7-12). Pe șine se poate deplasa un conductor

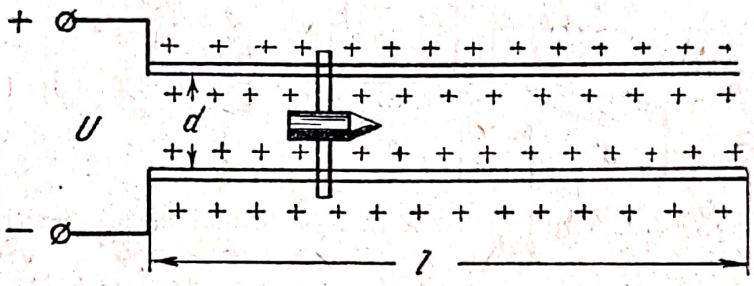


Fig. 7-12. Schemă la exemplul 7-3

de masă neglijabilă, care poartă cu sine un proiectil de masă $m = 1$ kg. Ce curent trebuie să treacă prin circuit pentru ca proiectilul, în momentul cînd părăsește șinele, să aibă o viteză $v = 500$ m/s. Se neglijează frecările.

Soluția: Energia cinetică a proiectilului, în momentul lansării sale, este dată de relația

$$W = \frac{m v^2}{2} = \frac{1 \text{ kg } 500^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} = 125\,000 \text{ J} .$$

Această energie este echivalentă cu lucrul mecanic al acțiunii forțelor cîmpului magnetic asupra conductorului parcurs de curent care poartă proiectilul [relația (7-7)]. Prin urmare,

$$W = I\Phi ,$$

de unde

$$I = \frac{W}{\Phi} = \frac{W}{Bbd} = \frac{125\,000}{0{,}835 \dfrac{\text{Wb}}{\text{m}^2} 5 \text{ m} \cdot 0{,}6 \text{ m}} = 5 \cdot 10^4 \text{ A} .$$

7-6. Curenții Foucault

Variația fluxului poate produce curenți induși nu numai în conductoare și înfășurări izolate, dar și în piese metalice masive. În acest caz, curenții induși poartă numele de *curenți Foucault* sau *curenți turbionari*, deoarece se închid prin circuite avînd forma unor vîrtejuri. Ei pot să apară în mase metalice ce se mișcă într-un cîmp mag-

netic constant sau în mase fixe străbătute de fluxuri magnetice variabile. Curenții Foucault se deosebesc de curenții induși în conductoare numai prin aceea că ei nu pot fi colectați într-un circuit exterior și folosiți pentru producerea energiei electrice. Asemenea curenți apar în toate mașinile și aparatele electrice a căror funcționare se bazează pe fenomenul inducției electrice. În fig. 7-13 *a* și *b* este arătat modul cum apar prin inducție, simultan, curentul util într-o spiră a unui generator electric și curenții Foucault în masa rotorului *R* a mașinii. Curenții

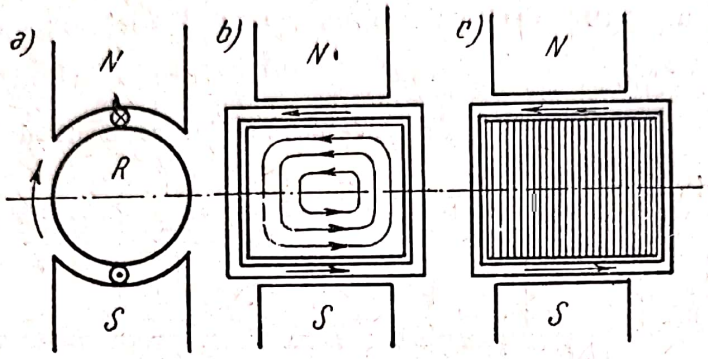


Fig. 7-13. Curenții Foucault în rotorul unei mașini electrice

Foucault produc, prin efect Joule-Lenz, o încălzire a maselor în care apar, între altele a maselor de fier care intră în compunerea circuitelor magnetice ale mașinilor și aparatelor electrice. Deci apariția curenților Foucault provoacă o reducere a randamentului acestor mașini și aparate. Curenții Foucault se mai numesc și *curenți paraziți*.

În construcția mașinilor și aparatelor electrice se reduc curenții Foucault înlocuind piesele masive de fier, în care ei s-ar putea produce, prin piese executate din ansamblarea de tole de tablă, de 0,35-0,5 mm (fig. 7-13 c), confecționate dintr-un oțel special cu conținut de siliciu (tole silicioase, tole de dinam sau tole de oțel electrotehnic) și

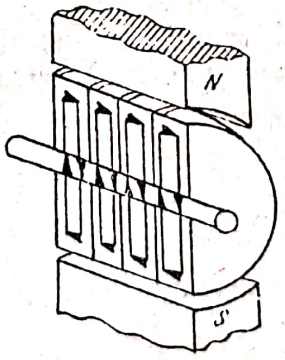


Fig. 7-14. Curenții Foucault în tolele rotorului

izolate între ele prin foiță de hîrtie sau prin lac izolant. Prezența siliciului în tole ridică rezistivitatea materialului, deci scade intensitatea curenților paraziți și, odată cu ea, pierderile prin efect Joule-Lenz. La o rezistivitate dată a materialului magnetic, prin înlocuirea materialului ma-

siv printr-un material compus din tole, așezate perpendicular pe drumul pe care se închid curenții induși, curenții paraziți sînt siliți să se închidă prin secțiunile tolelor (fig. 7-14), deci pe drumuri mult mai lungi, ceea ce reprezintă o nouă contribuție la mărirea rezistenței circuitului acestor curenți, deci la reducerea pierderilor respective.

Puterea absorbită și consumată în căldură într-un pachet de tole prin efectul curenților Foucault este dată de relația următoare

$$p_F = \sigma_F \left(\frac{f}{100} \cdot \frac{Bm}{10\,000} \cdot b \right)^2 \text{ watt/kg}, \qquad (7\text{-}12)$$

în care

b este grosimea tolelor, în cm;

f — frecvența fenomenului de magnetizare, în cicli pe secundă;

B_m — valoarea maximă a inducției, în gauss;

σ_F — un coeficient depinzînd de calitatea tolelor și a cărui valoare variază între 2,2 și 4,8.

7-7. Inductanța proprie

Am văzut că trecerea unui curent printr-un circuit dă naștere unui cîmp magnetic, deci unui flux care străbate circuitul respectiv: este cîmpul magnetic, respectiv fluxul propriu al circuitului. Atîta timp cît curentul din circuit este constant, fluxul propriu este constant și nu produce nici un fenomen de inducție. Dacă însă curentul din circuit variază, variază și fluxul produs de el și, în consecință, se produce în circuit o forță electromotoare de inducție numită *forță e. m. de autoinducție* sau de *self-inducție*. Ca orice f.e.m. de inducție, prin curentul pe care îl produce ea se opune variațiilor curentului din circuit. Curentul produs de f.e.m. de autoinducție se numește *curent de autoinducție* și se suprapune peste curentul principal din circuit.

Cînd circuitul este format dintr-o singură spiră, fluxul care trece prin conturul circuitului este fluxul său propriu Φ. Dacă circuitul are forma unui solenoid compus din w spire (fig. 7-15 a), fluxul total

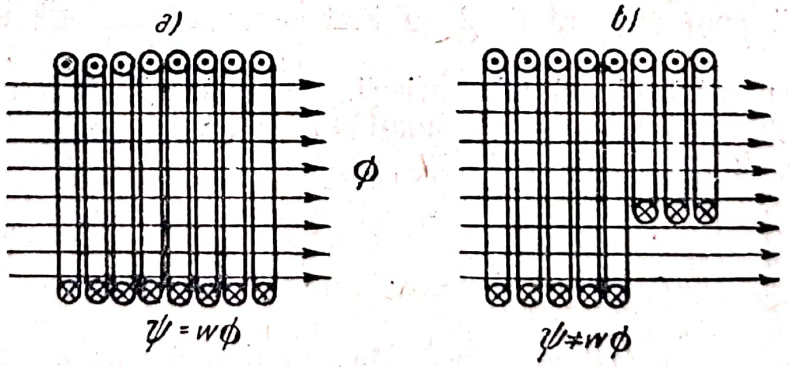


Fig. 7-15. Fluxul propriu și fluxul total al circuitului electric

prin întregul contur al circuitului (prin toate cele w spire ale sale), pe care îl notăm cu Ψ, este dat de relația

$$\Psi = w\Phi,$$

în care Φ este fluxul produs de solenoid.

Dacă circuitul are w_1 spire parcurse de fluxul Φ_1 și w_2 spire parcurse de fluxul Φ_2 (fig. 7-15 *b*), fluxul total prin conturul circuitului este

$$\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 .$$

În cazul cel mai general cînd circuitul este compus din n porțiuni, formate fiecare din cîte un număr diferit de spire și parcurse de cîte un flux propriu diferit, fluxul total prin conturul circuitului este dat de relația

$$\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + \cdots + w_n \Phi_n = \sum_{k=1}^{n} w_k \Phi_k , \qquad (7\text{-}12)$$

în care Φ_k este fluxul propriu care parcurge porțiunea k a circuitului, compusă din w_k spire.

Fluxul total Ψ fiind produs ca și fluxurile parțiale $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ de același curent I, care parcurge întregul circuit, putem scrie

$$\Psi = LI .$$

Coeficientul de proporționalitate L poartă numele de *inductanță proprie* sau, mai pe scurt, *inductanță* a circuitului. Adesea întîlnim acest coeficient cu denumirea de *coeficient de autoinducție* sau de *selfinducție*.

Din relația precedentă rezultă că

$$L = \frac{\Psi}{I} . \qquad (7\text{-}13)$$

Ecuația de dimensiuni a inductanței este

$$[L] = \left[\frac{\Psi}{I}\right] = \frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega\, s .$$

Prin urmare, unitatea de măsură a inductanței este *ohm-secunda*, căruia, după cum am arătat și cu altă ocazie, i s-a dat denumirea de *henry* (H).

Dacă curentul din circuit variază, vor varia simultan toate fluxurile $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ și, odată cu ele, fluxul Ψ. În circuit va apare o f.e.m. de autoinducție, dată de relația

$$E_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} . \qquad (7\text{-}14)$$

7·8. Calculul inductanței unor circuite

În general calculul inductanței unui circuit constituie o problemă analitică dificilă. În anumite cazuri particulare, inductanța se poate determina însă relativ ușor.

Ne propunem, în cele ce urmează, să determinăm inductanța în cazul unei bobine toroidale și în cazul unei linii bifilare.

Scanned with OKEN Scanner

Am văzut că fluxul magnetic al unei bobine toroidale (un solenoid toroidal), în cazul cînd diametrul mediu al toroidului este mare în raport cu diametrul spirelor toroidului, este dat de relaţia

$$\Phi = \frac{4\pi w I}{\mathcal{R}} = \frac{4\pi w I}{\frac{l}{\mu S}} = \mu \frac{4\pi w I}{l} S ,$$

în care l este lungimea medie a toroidului, iar μ este permeabilitatea materialului care constituie sîmburele solenoidului.

Deoarece acelaşi flux Φ străbate toate spirele bobinei, rezultă pentru fluxul total Ψ al circuitului magnetic al bobinei relaţia

$$\Psi = w\Phi = \mu \frac{4\pi w^2 I}{l} S.$$

Aceeaşi expresie o obţinem pentru o bobină cilindrică (un solenoid drept) de o lungime suficient de mare faţă de diametrul spirelor. În acest caz l reprezintă lungimea solenoidului. Prin urmare, în ambele cazuri, obţinem

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{4\pi w^2}{l} S . \qquad (7\text{-}15)$$

Observăm că în relaţia care ne dă pe L intervine permeabilitatea μ a mediului; urmează că inductanţa circuitelor electrice care conţin, în interiorul lor, materiale feromagnetice saturate, a căror permeabilitate variază cu inducţia B, deci cu curentul I care trece prin circuit, sînt variabile cu starea de saturaţie a materialului paramagnetic, deci cu valoarea curentului I. Numai cînd materialul feromagnetic este nesaturat, deci cînd μ se poate considera practic constant, valoarea inducţiei L rămîne constantă.

Cînd circuitele electrice conţin numai materiale para sau diamagnetice, a căror permeabilitate este constantă şi practic egală cu μ_0, inductanţa rămîne constantă oricare ar fi valoarea curentului de circuit. În acest caz, relaţia (7-15) devine

$$L = \mu_0 \frac{4\pi w^2}{l} S.$$

În cazul unei linii bifilare (fig. 7-16), cele două conductoare parcurse de curent ale liniei formează un circuit electric închis. Ne propunem să determinăm inductanţa unui asemenea circuit atunci cînd distanţa între conductorul de ducere şi cel de întoarcere este a. Pentru aceasta vom determina, mai întîi, fluxul magnetic care străbate conturul circuitului.

Fluxul magnetic care străbate o suprafaţă elementară $l\,\mathrm{d}x$ (l este lungimea conductorului), flux creat de curentul primului conductor, este dat de relaţia

$$\mathrm{d}\Phi_1 = B_1 l\,\mathrm{d}x = \mu \frac{2 \cdot I}{x} l\,\mathrm{d}x ,$$

în care x este distanţa, faţă de primul conductor, a suprafeţei elementare $l\,\mathrm{d}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu r raza conductoarelor, fluxul total creat de curentul din primul conductor, în spațiul dintre conductoare, este

$$\Phi_1 = \int d\Phi_1 = \mu 2 I l \int_r^{a-r} \frac{dx}{x} = \mu 2 I l \ln \frac{a-r}{r}.$$

Curenții din cele două conductoare fiind egali, fluxul creat de curentul din cel de al doilea conductor va fi egal cu Φ_1 și de același sens.

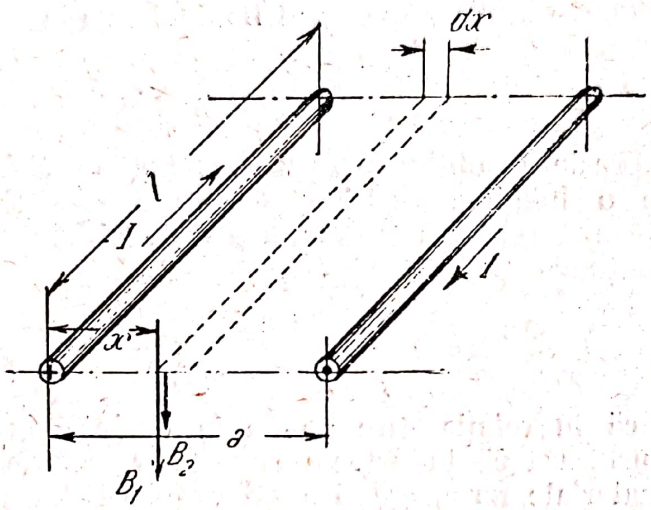


Fig. 7-16. Linia bifilară

Prin urmare, fluxul total dintre conductoare este

$$\Psi = 2\Phi_1 = \mu 4 I l \ln \frac{a-r}{r}.$$

Dacă neglijăm raza r a secțiunii conductorului față de distanța a dintre conductoare, relația precedentă devine

$$\Psi = \mu 4 I l \ln \frac{a}{r}.$$

Inductanța liniei bifilare, de lungime l, rezultă împărțind relația precedentă prin I

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu 4 l \ln \frac{a}{r}.$$

În cazul cînd linia este o linie aeriană, $\mu \approx \mu_0 = 10^{-7} \frac{H}{m}$ și inductanța liniei devine

$$L = 4 \cdot 10^{-7} \cdot l \cdot \ln \frac{a}{r}. \qquad (7\text{-}16)$$

Scanned with OKEN Scanner

Liniile electrice avînd în general lungimi importante, inductanța unei linii se calculează pe km de lungime de linie. Dacă notăm cu L_0 inductanța pe km a liniei și ținem seama că $1\,\text{km} = 10^3\,\text{m}$, rezultă

$$L_0 = 4 \cdot 10^{-4} \ln \frac{a}{r} \left(\frac{\text{H}}{\text{km}}\right) .$$

Dacă ținem seama și de fluxul magnetic din interiorul conductoarelor, inductanța liniară bifilară devine

$$L_0 = \left(4 \ln \frac{a}{r} + \mu_r\right) \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{H}}{\text{km}}\right) , \qquad (7\text{-}17)$$

în care μ_r reprezintă permeabilitatea magnetică relativă a conductorului. Această permeabilitate poate fi considerată, practic, egală cu unitatea pentru toate conductoarele, în afară de cele de oțel.

Inductanța conductorului liniei bifilare, pe km de conductor simplu, în ipoteza că $\mu_r = 1$, este

$$L_c = \frac{L_0}{2} = \left(2 \ln \frac{a}{r} + 0{,}5\right) \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{H}}{\text{km}}\right) \qquad (7\text{-}18)$$

sau, în log zecimali,

$$L_c = \left(4{,}6 \ \lg \frac{a}{r} + 0{,}5\right) \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{H}}{\text{km}}\right) . \qquad (7\text{-}18\,\text{a})$$

7-9. Inductanța mutuală

Am arătat, în par. 7-1, că variația curentului care parcurge o bobină este însoțită de apariția unei f.e.m. de inducție în spirele oricărei

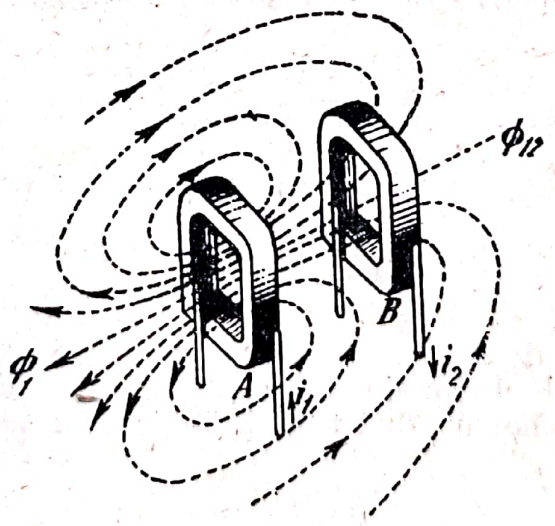


Fig. 7-17. Fenomenul apariției f.e.m. de inducție mutuală

alte bobine aflate în apropiere. Această f.e.m. se numește *f.e.m. de inducție mutuală*. După cum rezultă din fig. 7-17, apariția f.e.m. de

inducție mutuală în bobina B, se explică prin faptul că spirele acestei bobine sînt străbătute de un flux magnetic variabil, creat de curentul care trece prin bobina A.

Să notăm cu i_1 curentul variabil din bobina A, produs de o sursă care nu apare în figură, și cu Φ_1, fluxul variabil produs de acest curent. O parte din acest flux, și anume Φ_{12}, străbate conturul bobinei B. Dacă notăm cu w_2 numărul de spire al bobinei B, fluxul total prin această bobină, produs de fluxul bobinei A parcursă de curentul i_1, este

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12} . \tag{7-19}$$

În aer, valoarea fluxului fiind direct proporțională cu curentul care îl produce, fluxul Ψ_{12} poate fi pus sub forma

$$\Psi_{12} = M i_1 . \tag{7-20}$$

Coeficientul de proporționalitate M se numește *inductanță mutuală* sau *coeficient de inducție mutuală*. El depinde de dimensiunile și forma geometrică a celor două bobine și de poziția lor reciprocă.

Din ultima relație, rezultă pentru inductanța mutuală expresia

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} . \tag{7-21}$$

Prin urmare, pentru a determina inductanța mutuală dintre două circuite electrice este suficient să cunoaștem fluxul magnetic total Ψ_{12} care străbate conturul celui de al doilea circuit, cînd primul circuit este parcurs de curentul i_1, și să împărțim acest flux prin valoarea curentului i_1.

Orice variație a curentului i_1 produce, simultan, o variație a fluxului Ψ_{12} și f.e.m. de inducție mutuală, care ia naștere în bobina B, este dată de relația

$$e_{M2} = - \frac{d\Psi_{12}}{dt} ,$$

care, ținînd seama de relația (7-20), devine

$$e_{M2} = -M \frac{di_1}{dt} . \tag{7-22}$$

Dacă bobina A are w_1 spire și bobina B este alimentată de un curent i_2, din fluxul Φ_2 produs de acest curent o parte Φ_{21} va străbate spirele bobinei A, dînd un flux total prin circuitul acestei bobine egal cu

$$\Psi_{21} = w_1 \Phi_{21} .$$

Forma și poziția celor două bobine rămînînd neschimbată, coeficientul de inducție mutuală M dintre cele două circuite trebuie să păstreze aceeași valoare. Prin urmare

$$\Psi_{21} = M i_2 . \tag{7-23}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă i_2 variază, f.e.m. de inducție mutuală care apare în bobina A este

$$e_{M1} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M\frac{di_2}{dt} .$$

Din relațiile (7-20) și (7-23) rezultă

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} \qquad (7\text{-}24)$$

sau

$$\Psi_{12}\, i_2 = \Psi_{21}\, i_1 . \qquad (7\text{-}25)$$

Potrivit relației (7-7), această din urmă expresie reprezintă egalitatea dintre două lucruri mecanice. Membrul întîi reprezintă lucrul mecanic corespunzător îndepărtării, la infinit, a bobinei B, în ipoteza că se menține constant curentul i_2 din această bobină, iar membrul al doilea reprezintă lucrul mecanic corespunzător îndepărtării, la infinit, a bobinei A, în ipoteza menținerii constante a curentului i_1 din această bobină. În ambele cazuri se înțelege că una din bobine stă pe loc și este parcursă de curentul său, constant ca mărime. Mișcările relative fiind aceleași, lucrul mecanic corespunzător fiecărei deplasări este același, prin urmare, relația (7-25) se verifică, ceea ce atrage verificarea relației (7-24), deci a afirmației că inductanța mutuală M este aceeași pentru ambele circuite în prezență.

Inductanța mutuală se măsoară, ca și inductanța proprie, în *henry*.

Cînd ambele circuite în prezență sînt parcurse, simultan, de curenți variabili, în fiecare din ele vor apare, pe lîngă f.e.m. de inducție mutuală, și f.e.m. de autoinducție. Notînd aceste din urmă f.e.m. cu e_{L1}, respectiv cu e_{L2}, și aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff celor două circuite electrice, vom avea:

Pentru primul circuit

$$u_1 + e_{L1} + e_{M1} = R_1 i_1 ,$$

în care u_1 este tensiunea la bornele circuitului, iar R_1, rezistența circuitului. Rezultă ca valoare a tensiunii la borne

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} . \qquad (7\text{-}26)$$

Pentru al doilea circuit

$$u_2 + e_{L2} + e_{M2} = R_2 i_2 ,$$

de unde scoatem valoarea tensiunii la bornele acestui circuit

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} . \qquad (7\text{-}27)$$

Relațiile (7-26) și (7-27) reprezintă ecuațiile generale ale transformatoarelor electrice, a căror funcționare se bazează pe fenomenul inducției mutuale.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul analitic al inductanței mutuale prezintă dificultăți mari, fiind mai complicat decît acela al inductanțelor proprii. El se rezolvă simplu numai atunci cînd cele două circuite se găsesc astfel plasate, unul față de celălalt, încît întregul flux produs de un circuit să parcurgă cel de al doilea circuit, și invers. Să presupunem, de pildă, că ambele bobine de mai sus se găsesc pe același miez de fier, de secțiunea S și de lungime l. Fluxul magnetic produs de bobina A, conform relației (6-50), este

$$\Phi_1 = \mu \frac{4\pi w_1 i_1}{l} S.$$

Dacă neglijăm scăpările de flux și presupunem că întreg acest flux străbate și bobina B, adică $\Phi_{12} = \Phi_1$, fluxul total prin spirele bobinei a doua este

$$\Psi_{12} = w_2 \Phi_{12} = w_2 \Phi_1 = \mu \frac{4\pi w_1 w_2 S}{l} i_1,$$

de unde rezultă inductanța mutuală dintre cele două bobine

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \mu \frac{4\pi w_1 w_2 S}{l}. \qquad (7\text{-}28)$$

Observăm că în acest caz inductanțele mutuale nu mai rămîn constante, ci variază cu permeabilitatea μ dacă circuitul feromagnetic este saturat.

Cele două bobine au cîte o inductanță proprie, dată de relația (7-15)

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \mu \frac{4\pi w_1^2 S}{l}$$

și

$$L_2 = \frac{\Psi_2}{i_2} = \mu \frac{4\pi w_2^2 S}{l}.$$

Rezultă, potrivit relației (7-28), că în ipoteza circuitului feromagnetic nesaturat și, în general, cînd $\mu = \text{const}$,

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \qquad (7\text{-}29)$$

S-a ajuns la această relație plecînd de la ipoteza că întregul flux, creat de una din bobine, parcurge toate spirele celei de a doua și invers. În realitate, circuitul magnetic nu este perfect, adică nu tot fluxul Φ_1, produs de bobina A, trece prin B și nu tot fluxul Φ_2, produs de bobina B, trece prin A. Fluxul bobinei A, care trece prin B, este dat de relația $\frac{\Phi_1}{\nu_1}$, iar fluxul bobinei B, care trece prin A, de relația $\frac{\Phi_2}{\nu_2}$. În aceste relații, ν_1 și ν_2 sînt doi coeficienți mai mari decît unitatea (coeficienții lui Hopkinson).

În aceste condiții,

$$L_1 L_2 = \frac{w_1 \Phi_1}{i_1} \cdot \frac{w_2 \Phi_2}{i_2} = w_1 w_2 \frac{\Phi_1 \Phi_2}{i_1 i_2}$$

și

$$M = \frac{w_1 \Phi_2}{i_2 \nu_1} = \frac{w_2 \Phi_1}{i_1 \nu_1} \quad \text{sau} \quad M^2 = \frac{w_1 w_2 \Phi_1 \Phi_2}{\nu_1 \nu_2 i_1 i_2}.$$

Deci, în ipoteza că $\mu = \text{const}$, avem

$$L_1 L_2 = M^2 \nu_1 \nu_2 ;$$

de unde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} \sqrt{L_1 L_2}$$

și relația (7-29) devine

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \tag{7-30}$$

în care coeficientul $k = \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}}$ se numește *coeficient de cuplaj* al celor două circuite. Deoarece $k < 1$, avem, în acest caz,

$$M < \sqrt{L_1 L_2} .$$

Spre deosebire de inductanța proprie, inductanța mutuală poate avea și valori negative. Pentru a ne da seama de acest lucru, să examinăm fig. 7-18 a. Prima bobină, parcursă de curentul i_1, produce fluxul Φ_1. Din

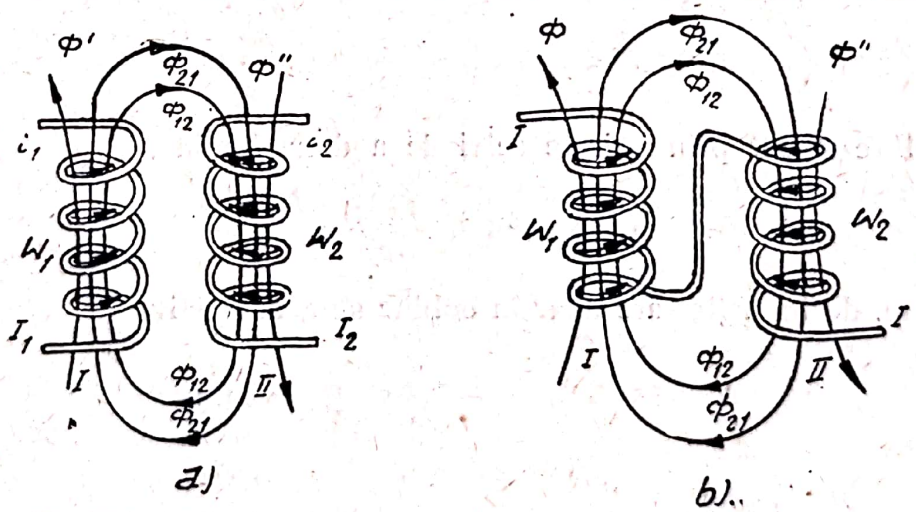


Fig. 7-18. Cuplaj inductiv pentru obținerea unui flux adițional : *a*) cazul a două circuite separate ; *b*) cazul a două circuite legate în serie

acest flux numai o parte, și anume Φ_{12}, străbate cele w_2 spire ale bobinei a doua. Conform relațiilor de mai sus, vom avea

$$\Phi_1 = \frac{L_1 i_1}{w_1}$$

și

$$\Phi_{12} = \frac{M i_1}{w_2} .$$

În mod analog, cea de a doua bobină, parcursă de curentul i_2, produce un flux Φ_2, din care numai o parte, și anume Φ_{21}, străbate cele w_1 spire ale primei bobine. Vom avea și aici

$$\Phi_2 = \frac{L_2 i_2}{w_2}$$

și

$$\Phi_{21} = \frac{M i_1}{w_1} .$$

În consecință, fluxul magnetic rezultant care străbate spirele primei bobine poate fi dat de suma fluxurilor $\Phi_1 + \Phi_{21}$ sau de diferența lor $\Phi_1 - \Phi_{21}$, după sensul curentului în bobina a doua. În primul caz avem un flux total *adițional*, în al doilea, un flux total *diferențial*. Același lucru îl putem spune despre fluxul rezultant care străbate spirele celei de a doua bobine și fluxurile parțiale Φ_2 și Φ_{12} prin aceste spire.

Fluxurile rezultante sînt date de suma fluxurilor parțiale cînd acestea din urmă au același sens prin spirele fiecărei bobine, adică cînd bobinele sînt parcurse de curent în sens invers (fig. 7-18a). Ele sînt date de diferența fluxurilor parțiale, cînd acestea din urmă au sensuri opuse, adică cînd bobinele sînt parcurse de curent în același sens (fig. 7-18b). Prin urmare, fluxul rezultant prin spirele primei bobine este

$$\Phi' = \Phi_1 \pm \Phi_{21} = \frac{L_1 i_1}{w_1} \pm \frac{M i_2}{w_1} ,$$

iar fluxul rezultant prin spirele celei de a doua bobine,

$$\Phi'' = \Phi_2 \pm \Phi_{12} = \frac{L_2 i_2}{w_2} \pm \frac{M i_1}{w_2} .$$

F.e.m. de inducție care apar în bobine sînt, respectiv,

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi'}{dt} = -\left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}\right) , \qquad (7\text{-}31)$$

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi''}{dt} = -\left(L \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}\right) . \qquad (7\text{-}32)$$

Cînd bobinele sînt legate în serie, deci parcurse de același curent, (cazul fig. 7-18b și 7-19), din relațiile (7-31) și (7-32) rezultă că

$$L'_1 = L_1 \pm M$$

și

$$L'_2 = L_2 \pm M .$$

La legarea în serie a circuitelor inductanța rezultantă fiind egală cu suma inductanțelor fiecărui circuit, avem

$$L = L'_1 + L'_2 = L_1 + L_2 \pm 2M. \qquad (7\text{-}33)$$

Relația (7-33) este aplicată, în tehnica frecvențelor înalte, la construcția aparatelor numite *variometre*, care permit variația continuă a inductanței circuitului pe care sînt montate. Un variometru este compus,

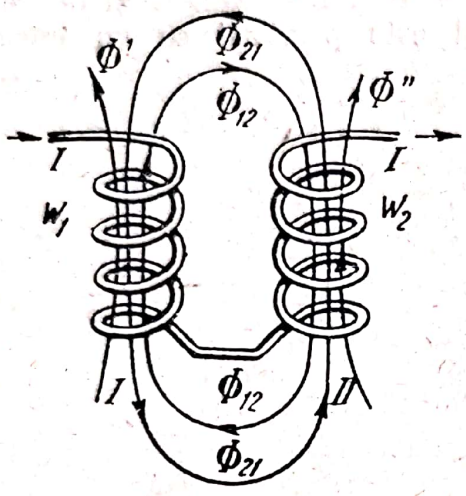


Fig. 7-19. Cuplaj inductiv pentru obținerea unui flux diferențial

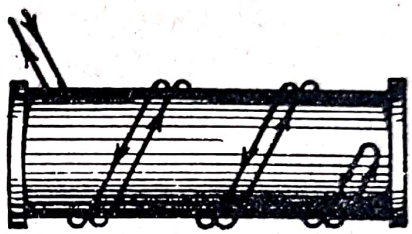


Fig. 7-20. Înfășurare bifilară

deobicei, din două bobine legate în serie, dintre care una din ele poate fi rotită în interiorul celeilalte.

Dacă axa bobinei interioare coincide cu cea a bobinei exterioare și fluxurile produse de cele două bobine au același sens, inductanța totală a aparatului este

$$L = L_1 + L_2 + 2M.$$

Dacă rotim bobina interioară cu 180°, fluxurile magnetice ale celor două bobine vor avea sensuri opuse și inductanța totală a aparatului este

$$L = L_1 + L_2 - 2M.$$

Să presupunem acum o bobină formată din două înfășurări identice, cu același număr de spire, legate în opoziție, așa cum se arată în fig. 7-20. În acest caz, vom avea

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{12} = \Phi_{21},$$

și

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_{12} = \Psi_{21}.$$

Prin urmare,

$$L_1 = L_2 = M,$$

de unde, aplicînd relația (7-33), în care luăm semnul minus deoarece curenții în cele două înfășurări ale bobinei sînt în opoziție,

$$L = 2L - 2M = 0.$$

Se obține astfel ceea ce numim o *înfășurare bifilară*, întrebuințată acolo unde este necesar ca fenomenul autoinductanței să fie cît mai redus cu putință, de pildă la rezistențele adiționale ale aparatelor de măsură.

7-10. Fenomene tranzitorii la închiderea și deschiderea unui circuit prevăzut cu inductanță, rezistență și f. e. m.

Să presupunem existența unui circuit electric de rezistență r și inductanță L, în care se găsește o sursă de energie de f.e.m. E și de rezistență interioară r_0 (fig. 7-21). Circuitul este prevăzut cu un între-

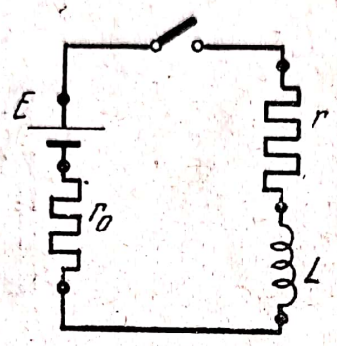


Fig. 7-21. Inchiderea pe o sursă de curent a unui circuit cu rezistență și inductanță

ruptor. Ne propunem să studiem variația curentului din circuit în regimul tranzitoriu cuprins din momentul închiderii circuitului, cînd curentul este zero, pînă în momentul cînd curentul atinge valoarea permanentă. Să notăm cu $R = r + r_0$ rezistența întregului circuit. Valoarea curentului permanent este dată de relația

$$I = \frac{E}{R} .$$

În regim tranzitoriu curentul fiind variabil, îl vom nota cu i. El va produce în circuit o f.e.m. de autoinducție e_L. Conform legii a doua a lui Kirchhoff, avem

$$E + e_L = Ri . \tag{7-34}$$

Ținînd seama că $e_L = -L\frac{di}{dt}$, relația precedentă devine

$$E - Ri = L\frac{di}{dt} , \tag{7-35}$$

de unde scoatem

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri}{L} . \tag{7-36}$$

Prin urmare, viteza creșterii curentului în circuit este cu atît mai mare, cu cît inductanța circuitului este mai mică. La inductanță constantă, această viteză este maximă în momentul închiderii circuitului, cînd i este

zero, deci $Ri = 0$ și devine zero la stabilirea regimului permanent, cînd i devine I, deci $RI = E$.

Relația (7-35) poate fi pusă și sub forma

$$\frac{E}{R} - i = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \cdot \tag{7-37}$$

Raportul $\frac{L}{R}$ are dimensiunea unui timp și se măsoară în secunde

$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{H}{\Omega} = \frac{\Omega \cdot s}{\Omega} = s \cdot$$

Numim acest raport *constanta de timp a circuitului* și îl notăm cu τ.

Deci

$$\tau = \frac{L}{R} \cdot \tag{7-38}$$

Ținînd seama că $\frac{E}{R}$ reprezintă valoarea curentului permanent al circuitului și înlocuind pe $\frac{L}{R}$ prin τ, relația (7-37) devine

$$I - i = \tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{7-39}$$

sau, după separarea variabilelor,

$$\frac{\mathrm{d}i}{I - i} = \frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t \cdot \tag{7-40}$$

Dacă observăm că

$$\mathrm{d}i = -\,\mathrm{d}\,(I - i)\,,$$

relația (7-40) se poate pune sub forma

$$\frac{\mathrm{d}\,(I - i)}{I - i} = -\,\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t \cdot$$

Integrînd fiecare membru al acestei ecuații diferențiale, obținem

$$ln\,(I - i) = -\frac{t}{\tau} + ln\,K\,, \tag{7-41}$$

de unde

$$I - i = K\,e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot$$

În această din urmă expresie K este constanta de integrare pe care o determinăm prin condiția inițială. În momentul închiderii circuitului, cînd $t = 0$, curentul în circuit este egal cu zero și, deoarece

$$e^{-\frac{0}{\tau}} = 1\,,$$

rezultă

$$K = I \cdot$$

Prin urmare,

$$i = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \qquad (7\text{-}42)$$

Această ultimă relație ne arată că variația curentului din circuit, în funcție de timp, în perioada de regim tranzitoriu, se face după o lege exponențială. Ea ne arată că la închiderea circuitului pe f.e.m. E, curentul din circuit nu atinge dintr-odată valoarea I, ci după un anumit interval de timp, cu atît mai îndelungat cu cît τ este mai mare, adică cu cît este mai mare inductanța L a circuitului și cu cît este mai mică rezistența sa R (relația 7-38). Grafic, variația curentului este reprezentată prin curba din fig. 7-22.

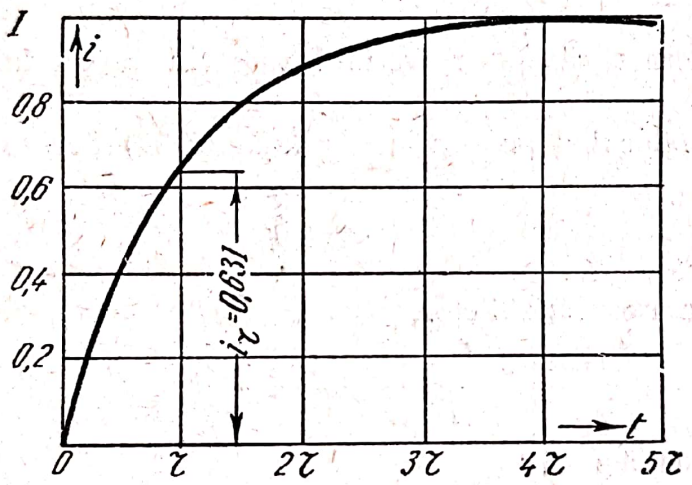


Fig. 7-22. Caracteristica regimului tranzitoriu la stabilirea curentului într-un circuit cu inductanță

Relația precedentă poate fi pusă sub forma.

$$i = I - Ie^{-\frac{t}{\tau}} \cdot$$

Prin urmare, curentul variabil din regimul tranzitoriu al închiderii circuitului este dat de suma a doi curenți, curentul permanent I și curentul tranzitoriu $i_{tr} = -I\,e^{-\frac{t}{\tau}}$:

$$i = I + i_{tr} \cdot \qquad (7\text{-}42a)$$

Teoretic, curentul atinge valoarea permanentă I într-un interval de timp infinit de lung. Practic, regimul permanent poate fi considerat atins într-un interval de timp foarte scurt, cu atît mai scurt cu cît constanta de timp τ este mai mică, adică cu cît inductanța L a circuitului este

Scanned with OKEN Scanner

mai redusă și rezistența R mai mare. Într-adevăr, pentru $t = \tau$ valoarea curentului este

$$i = I(1 - e^{-1}) = I\left(\frac{e-1}{e}\right) \approx 0{,}63\ I,$$

iar după o trecere de timp 3τ, curentul atinge 0,95 I. Prin urmare, la un τ destul de mic curentul se stabilește instantaneu.

Dacă scurtcircuităm porțiunea de circuit care conține inductanța L

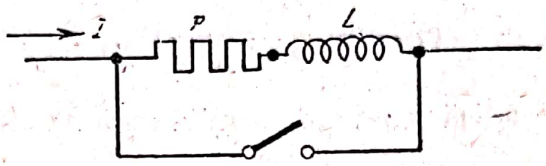


Fig. 7-23. Scurtcircuitarea unui circuit cu rezistență și inductanță parcurs de curent

și rezistența r, (fig. 7-23), curentul din circuit nu scade instantaneu la zero, ci descrește după relația

$$i = Ie^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (7\text{-}43)$$

în care I este curentul din circuit dinaintea scurtcircuitării, iar τ constanta de timp a circuitului, dată de relația $\tau = \frac{L}{r}$.

Relația precedentă ne arată că la dispariția f.e.m. dintr-un circuit, intensitatea curentului din circuit scade după o lege exponențială. Curentul

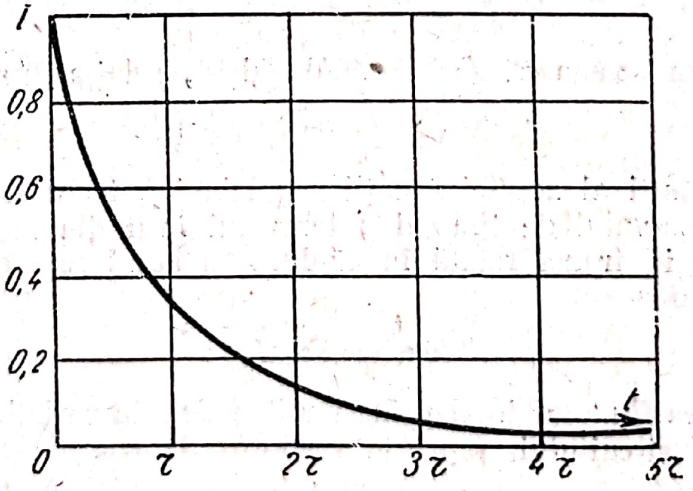


Fig. 7-24. Caracteristica de variație a curentului la scurtcircuitarea unui circuit cu inductanță

se anulează cu atît mai încet, cu cît inductanța L a circuitului este mai mare și cu cît rezistența sa r este mai mică. Curba de variație a curentului din circuit este dată în figura 7-24.

Scanned with OKEN Scanner

7-11. Energia cîmpului magnetic

Am arătat în paragraful precedent că, din cauza f.e.m. de autoinducţie, atunci cînd închidem un circuit electric pe o f.e.m. curentul nu ia instantaneu valoarea sa finală. Conform relaţiei (7-34), pusă sub forma

$$E = -e_L + Ri,$$

se vede că în momentul iniţial, cînd $i = 0$, f.e.m. de autoinducţie este maximă şi egală şi de sens contrar cu f.e.m. a sursei

$$e_L = -\frac{di}{dt} = -E,$$

iar cînd $i = \frac{E}{R} = I$, adică cînd ia sfîrşit regimul tranzitoriu,

$$e_L = 0.$$

Rezultă că f.e.m. de autoinducţie care apare la închiderea circuitelor variază invers decît curentul şi este tot timpul opusă f.e.m. principale din circuite. Deci f.e.m. de autoinducţie joacă rolul, în regimul tranzitoriu de închidere a circuitelor, de forţă contraelectromotoare. Ca orice f.c.e.m., ea absoarbe de la sursa E o putere pe care o găsim înmagazinată, sub formă de energie, în cîmpul magnetic creat în jurul conductoarelor în timpul acestui regim tranzitoriu.

Într-adevăr, să revenim la relaţia (7-35), pe care să o punem acum sub forma

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

şi să-i înmulţim ambii membri cu $i\,dt$. Vom obţine

$$E\,i\,dt = Ri^2\,dt + L\,i\,di.$$

Dacă ţinem seama că $L\,di = d(Li) = d\Psi$, relaţia precedentă devine

$$E\,i\,dt = Ri^2\,dt + i\,d\Psi. \qquad (7\text{-}44)$$

Membrul întîi al acestei ecuaţii reprezintă puterea debitată de sursă în circuit în intervalul de timp dt; termenul întîi din membrul al doilea reprezintă energia transformată în căldură în acest interval de timp, iar termenul al doilea

$$dW = i\,d\Psi,$$

legat de sporirea fluxului total prin cirouit, adică de variaţia cîmpului magnetic din jurul circuitului, reprezintă sporul de energie al acestui cîmp, corespunzător creşterii curentului cu di.

Energia totală înmagazinată în cîmpul magnetic al circuitului în timpul regimului tranzitoriu, cînd curentul creşte de la zero la I, este, în ipoteza că inductanţa L a circuitului rămîne constantă,

$$W = \int_0^I L\,i\,di = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Psi i. \qquad (7\text{-}45)$$

T. P.

Dacă cîmpul magnetic apare în interiorul unei bobine toroidale, de secţiune transversală S avînd w spire, fluxul produs este

$$\Phi = B\,S$$

şi

$$\Psi = w\,\Phi = w\,B\,S\ .$$

Cîmpul în interiorul toroidului este dat de relaţia

$$H = \frac{4\pi w I}{l},$$

în care l este lungimea medie (axială) a toroidului. Rezultă că

$$I = \frac{H l}{4\pi w}.$$

Înlocuind în relaţia (7-45) valorile obţinute pentru Ψ şi I, energia înmagazinată în cîmpul magnetic al toroidului este

$$W = \frac{1}{2}\Psi I = \frac{1}{2}\,\frac{BSHl}{4\pi} = \frac{BH}{8\pi}\,Sl\ .$$

Dacă observăm că produsul $Sl = V$ reprezintă volumul toroidului în care este concentrat întreg cîmpul său magnetic, avem

$$W = \frac{BH}{8\pi}V = \frac{B^2}{8\pi\mu}V\ . \qquad (7\text{-}46)$$

Notînd cu W_0 energia cîmpului magnetic pe unitatea de volum a cîmpului, care se mai numeşte şi *densitatea de energie* a cîmpului magnetic, avem

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{BH}{\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}\ . \qquad (7\text{-}47)$$

Această expresie, obţinută pornind de la un cîmp omogen, rămîne valabilă şi pentru cîmpurile neomogene. În acest caz, W_0 variază, de la un punct la altul al cîmpului, cu pătratul inducţiei.

În cazul scurtcircuitării unui circuit cu inductanţă parcurs de curent (fig. 7-23), energia magnetică înmagazinată în cîmpul magnetic al circuitului se consumă prin efect Joule-Lenz în rezistenţa acestuia.

Exemplul 7-4. Să se calculeze energia cîmpului magnetic al unui circuit electric, cu o inductanţă de 8.10^{-3} H, cînd circuitul este parcurs de un curent de 80 A.

Soluţia: $W = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{8\cdot 10^{-3}\cdot 80^2}{2} = 256$ J.

7-12. Energia consumată în fenomenul histerezis

În par. 6-10, cu ocazia studierii fenomenului histerezis, am afirmat că orice variaţie ciclică a magnetizării unui material feromagnetic este însoţită de o pierdere de energie care se transformă în căldură în masa materialului şi că valoarea acestei pierderi este proporţională cu suprafaţa închisă de curba care reprezintă ciclul de histerezis.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, energia înmagazinată în cîmpul magnetic pe unitate de volum, conform relației (7-47), este

$$W_0 = \frac{B^2}{8\pi\mu} = \frac{BH}{8\pi} .$$

La o variație infinit mică dH a cîmpului, putem presupune că μ rămîne constant; deci, ținînd seama că $B = \mu H$, avem

$$B\,dH = H\,dB .$$

Prin urmare,

$$dW_0 = \frac{1}{8\pi}(B\,dH + H\,dB) = \frac{1}{4\pi} H\,dB .$$

Rezultă că suprafața *mpqn* din fig. 7-25 exprimă, la o anumită

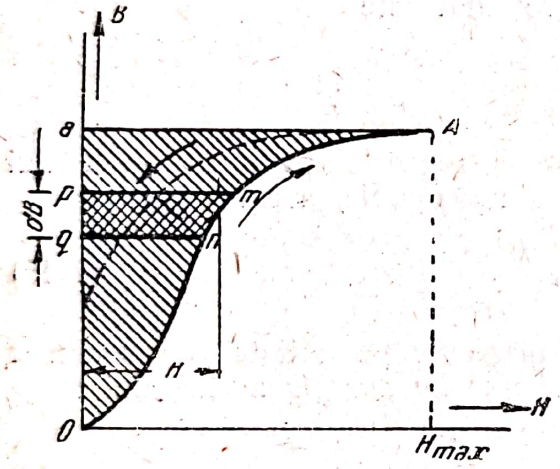


Fig. 7-25. Energia de magnetizare

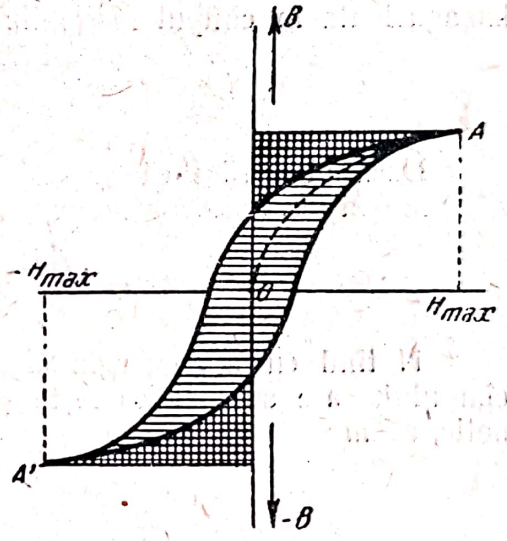


Fig. 7-26. Energia corespunzătoare unui ciclu de histerezis

scară, lucrul mecanic elementar de magnetizare corespunzător variației dB. Energia înmagazinată în unitatea de volum a cîmpului magnetic, corespunzătoare cîmpului H_{max}, este

$$W_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{H_{max}} H\,dB .$$

Această energie este proporțională cu suprafața haşurată $OAaO$.

Cînd cîmpul H scade, dB devine negativ și, deoarece curba de inducție la demagnetizarea materialului se menține deasupra aceleia de magnetizare, numai o parte din energia cîmpului magnetic este restituită circuitului electric (suprafața haşurată în pătrate din fig. 7-26). Rezultă că suprafața haşurată orizontal, cuprinsă în interiorul curbei ciclului de magnetizare, este proporțională cu energia consumată, în unitatea de volum al materialului, prin fenomenul histerezis.

7-13. Magneţi permanenţi şi electromagneţi. Forţă portantă

Am arătat mai sus că o bară de oţel aşezată în interiorul unui solenoid parcurs de curent, deci supusă unui cîmp magnetic, dobîndeşte proprietăţi magnetice. Dacă bara este din oţel tare, călit, a cărui curbă de histerezis, după cum am văzut, prezintă un magnetism remanent accentuat şi o forţă coercitivă importantă, bara îşi menţine proprietăţile magnetice şi după întreruperea curentului în solenoidul care produce cîmpul magnetic. Se obţine, în modul acesta, un *magnet permanent*.

Dacă bara este din fier moale, recopt, a cărui curbă de histerezis prezintă un magnetism remanent şi o forţă coercitivă reduse, bara se demagnetizează aproape complet după întreruperea curentului în solenoid. În acest caz, solenoidul, împreună cu bara de fier moale, constituie ceea ce numim un *electromagnet*, adică un aparat care prezintă proprietăţi magnetice numai în timpul trecerii curentului prin înfăşurarea sa.

Bara de fier moale, care poartă înfăşurarea bobinei, se numeşte *miezul electromagnetului* (fig. 7-27). Piesa de fier moale, atrasă de miez,

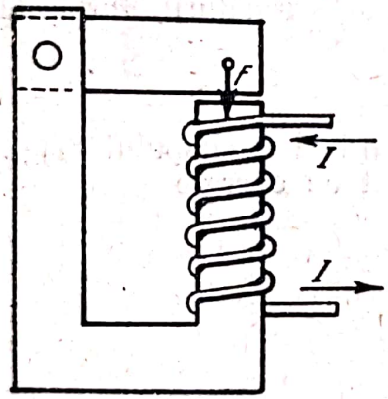


Fig. 7-27. Electromagnet în formă de bară

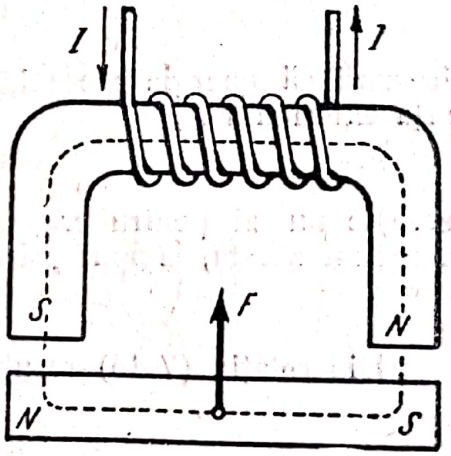


Fig. 7-28. Electromagnet în formă de potcoavă

se numeşte *armătura* electromagnetului. Curentul care trece prin bobina electromagnetului se numeşte *curentul de excitaţie* al acestuia.

Electromagneţii au o foarte mare răspîndire, intrînd în construcţia maşinilor electrice, a aparatelor de măsurat, a releelor şi a automatelor electrice, a aparatelor de ridicat, a telefoanelor, a microfoanelor etc.

În raport cu destinaţia lor, electromagneţii, în special miezul şi armătura lor, pot avea forme foarte variate, care însă se pot clasa în două categorii: electromagneţi *în formă de bară* (fig. 7-27), la care armătura este atrasă numai de unul din poli, şi electromagneţi *în formă de potcoavă* (fig. 7-28), la care armătura este atrasă de ambii poli.

Forţa care trebuie aplicată armăturii pentru a o desprinde de miez se numeşte *forţa portantă* a electromagnetului.

Ne propunem să determinăm valoarea forţei portante.

Să presupunem că sub acţiunea unei forţe exterioare F, aplicate electromagnetului din fig. 7-27, armătura s-a desprins şi depărtat de

miez cu o distanță infinit de mică d b (fig. 7-29), fără ca fluxul circuitului magnetic al electromagnetului să-și fi modificat valoarea. Deoarece, în aceste condiții, în înfășurarea electromagnetului nu apare nici o f.e.m., întreaga energie furnizată de sursă se transformă numai în căldură, în rezistența înfășurării.

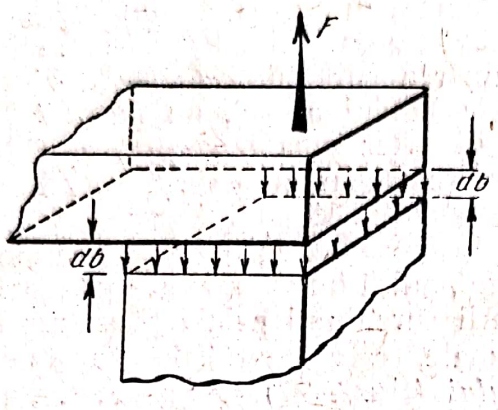


Fig. 7-29. Forța portantă a unui pol al electromagnetului

Urmează că energia mecanică necesară deplasării armăturii, furnizată de forța exterioară F,

$$dA = F\,db,$$

servește numai pentru creșterea energiei potențiale a cîmpului magnetic. În modul acesta, cîmpul primește un suplement de energie

$$dW = dA\,F\,db.$$

Din relația (7-46) rezultă că

$$dW = \frac{B^2}{8\pi\mu_0}\,dV,$$

deci

$$\frac{B^2}{8\pi\mu_0}\,dV = F\,db.$$

Ținînd seama că $dV = S\,db$, obținem

$$F = \frac{B^2}{8\pi\sigma_0}\,S. \qquad (7\text{-}48)$$

Introducînd în această din urmă relație valoarea lui μ_0 și exprimînd forța în kgf, obținem

$$F = 0{,}102\,\frac{10^7}{8\pi}\,B^2 S \approx 4\cdot 10^4\,B^2 S. \qquad (7\text{-}48a)$$

Dacă exprimăm inducția în gauss, relația precedentă devine

$$F = 4\cdot 10^4\left(\frac{B}{10\,000}\right)^2 S. \qquad (7\text{-}48b)$$

Scanned with OKEN Scanner

Forța portantă a electromagnetului se poate varia, variind inducția B, prin variația curentului de excitație al bobinei electromagnetului.

Electromagneții destinați aparatelor de ridicat materiale de fier au doi poli, unul interior, de suprafață circulară, și unul exterior, de suprafață inelară (fig. 7-30). Bobina circuitului de excitație înfășoară polul

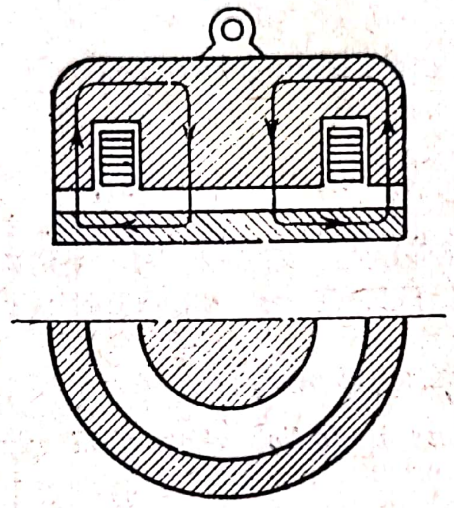


Fig. 7-30. Electromagnet cu poli circulari concentrici

circular, din interior, și este înfășurată de polul inelar exterior.

Exemplul 7-5. Să se calculeze forța portantă a unui electromagnet, destinat ridicării materialelor fieroase având suprafața polului interior de 1 000 cm^2, iar a polului inelar exterior, de 1 800 cm^2, inducția în polul interior fiind de 18 000 gauss.

Soluția: Inducția în miezul polului exterior este

$$B_2 = B_1 \frac{S_1}{S_2} = 18\,000 \frac{1\,000}{1\,800} = 10\,000 \text{ gauss} \cdot$$

Forța portantă se determină aplicînd celor doi poli relația (7-48b),

$$F = F_1 + F_2 = 4.10^4 \left(\frac{18\,000}{10\,000}\right)^2 .1\,000.10^{-4} + 4.10^4 \left(\frac{10\,000}{10\,000}\right)^2 \cdot$$

$$1\,800 \cdot 10^{-4} \cdot = 12\,960 + 7\,200 = 20\,160 \text{ kg} = 20{,}16 \text{ tone.}$$

CAPITOLUL VIII

NOȚIUNI FUNDAMENTALE ȘI DEFINIȚII ASUPRA CURENTULUI ALTERNATIV

8-1. Generalități asupra mărimilor periodice alternative

Se numește *mărime periodică alternativă* sau, mai pe scurt, *mărime alternativă*, o mărime care își schimbă sensul la anumite intervale de timp și ale cărei valori se repetă, în mod periodic, la intervale egale de timp T. Conform definiției, o asemenea mărime poate fi exprimată sub forma

$$a = f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \cdots = f(t + nT) \cdot \quad (8\text{-}1)$$

În tehnica curenților alternativi se întîlnesc, ca mărimi alternative, f.e.m., tensiuni, curenți, f.m.m., fluxuri etc.

Intervalul de timp T, în cursul căruia mărimea alternativă parcurge

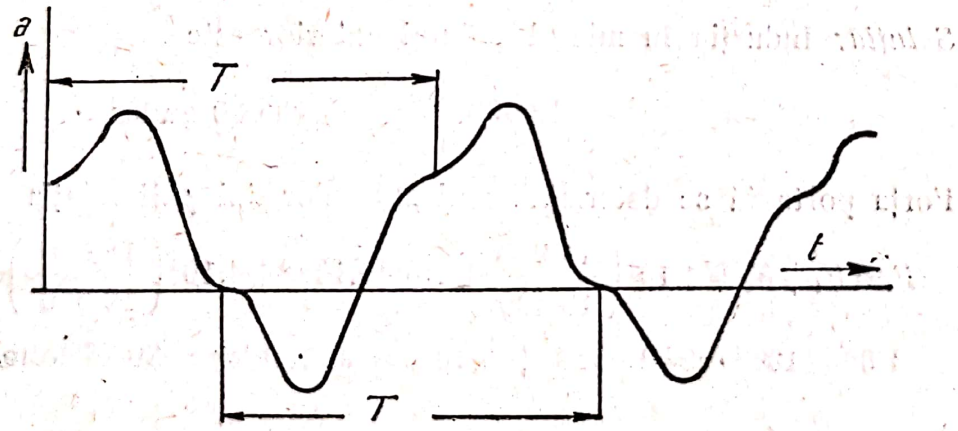


Fig. 8-1. Reprezentarea grafică (panoramică) a unei mărimi periodice alternative

în întregime ciclul său de variație (fig. 8-1), se numește *perioadă* a acestei mărimi.

Se numește *frecvență* a mărimii alternative și se notează cu f numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp, adică într-o secundă. Conform definiției

$$f = \frac{1}{T} \cdot \quad (8\text{-}2)$$

F.e.m., tensiunile și curenții continui pot fi priviți drept cazuri particulare ale f.e.m., tensiunilor și curenților alternativi, cînd perioada acestora este infinit de mare, deci frecvența lor este nulă, adică

$$T = \infty \quad \text{și} \quad f = 0 \ .$$

Mărimile alternative pe care le întîlnim în electrotehnică sînt, în general, *funcții periodice simetrice,* adică ele reiau, după cîte o jumătate de perioadă, aceeași valoare însă cu semnul schimbat, adică

$$a = f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \ . \qquad (8\text{-}3)$$

Funcțiile periodice alternative pot avea forme foarte complicate. După cum vom arăta în par. 12-1, astfel de funcții pot fi descompuse, cu ajutorul *seriei lui Fourier,* în funcții periodice de formă simplă, numite *funcții alternative sinusoidale* sau, mai pe scurt, *funcții sinusoidale.*

O funcție sinusoidală este o funcție periodică alternativă simetrică care își reia aceeași valoare cînd argumentul său se mărește cu 2π. Dacă se ia ca origine a timpurilor momentul cînd valoarea ei trece prin zero, funcția sinusoidală este de forma

$$a = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

și se exprimă, în general, prin relația

$$a = A \sin \omega t \ . \qquad (8\text{-}4)$$

Mărimea ω se numește *pulsație* sau *frecvență unghiulară* a funcției alternative și este legată de perioada și frecvența acestei funcții prin relația

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad ; \qquad (8\text{-}5)$$

rezultă că

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ . \qquad (8\text{-}5a)$$

8-2. Producerea f.e.m. alternative sinusoidale

În tehnică se tinde, în general, să se obțină f.e.m., tensiuni și curenți sinusoidali deoarece, după cum vom arăta în par. 12-2, cînd aceste mărimi se prezintă sub forme alternative nesinusoidale, ele conțin armonice superioare, care dau naștere în circuitele electrice unor fenomene nedorite.

În fig. 8-2 este reprezentat, schematic, cel mai simplu generator de curent alternativ, redus la o spiră rectangulară, indeformabilă, care se rotește cu o viteză unghiulară ω, în sensul arătat de săgeată, într-un cîmp omogen de inducție B. Rotația spirei se face în jurul axului său,

Scanned with OKEN Scanner

care este perpendicular pe direcţia cîmpului. Capetele spirei sînt legate la două inele, fixate pe axul de rotaţie. Două perii, notate cu *a* şi *b*, care treacă pe inele, stabilesc legătura cu un circuit exterior *R*.

Fluxul magnetic care străbate planul spirei variază cu poziţia acesteia. Pentru a stabili legea de variaţie a fluxului, vom lua ca origine a timpurilor momentul cînd planul spirei se găseşte perpendicular pe direcţia liniilor de forţă, deci cînd normala la acest plan coincide cu direcţia vec-

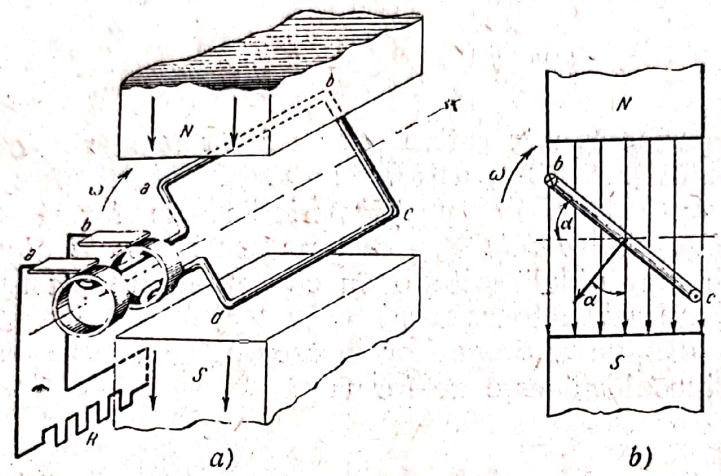


Fig. 8-2. Spira rotită într-un cîmp magnetic omogen

torului inducţiei. În acest moment, fluxul magnetic prin spiră atinge valoarea sa maximă, dată de relaţia

$$\Phi = S B \quad ,$$

în care S este suprafaţa spirei.

Să considerăm acum spira la un moment dat, într-o poziţie oarecare (fig. 8-2 *b*), şi să notăm cu ω unghiul pe care îl face normala la planul spirei cu direcţia pozitivă a inducţiei B. Valoarea fluxului care străbate în acest moment spira este

$$\varphi = S B \cos \alpha = \Phi \cos \alpha \quad . \tag{8-6}$$

Ţinînd seama că spira se învîrteşte cu o viteză unghiulară ω constantă, $\alpha = \omega t$ şi relaţia precedentă devine

$$\varphi = \Phi \cos \omega t \quad . \tag{8-6a}$$

Prin urmare, spira este străbătută de un flux variabil în timp. Rezultă că în spiră ia naştere o f.e.m. de inducţie, dată de relaţia (7-1a),

$$e = - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega \Phi \sin \omega t \quad ,$$

Produsul $\omega \Phi$ fiind constant, îl notăm cu E_m,

$$E_m = \omega \Phi$$

şi relaţia precedentă devine

$$e = E_m \sin \omega t \quad . \tag{8-7}$$

Prin urmare, f.e.m. indusă în spiră prezintă o variație sinusoidală în timp, a cărei valoare maximă este E_m. Ea poate fi reprezentată grafic printr-o sinusoidă cu valoarea maximă (amplitudinea) E_m. Abscisele sinusoidei reprezintă timpul sau, la altă scară, unghiul $a = \omega t$ de rotație al spirei (curba *1* din fig. 8-3).

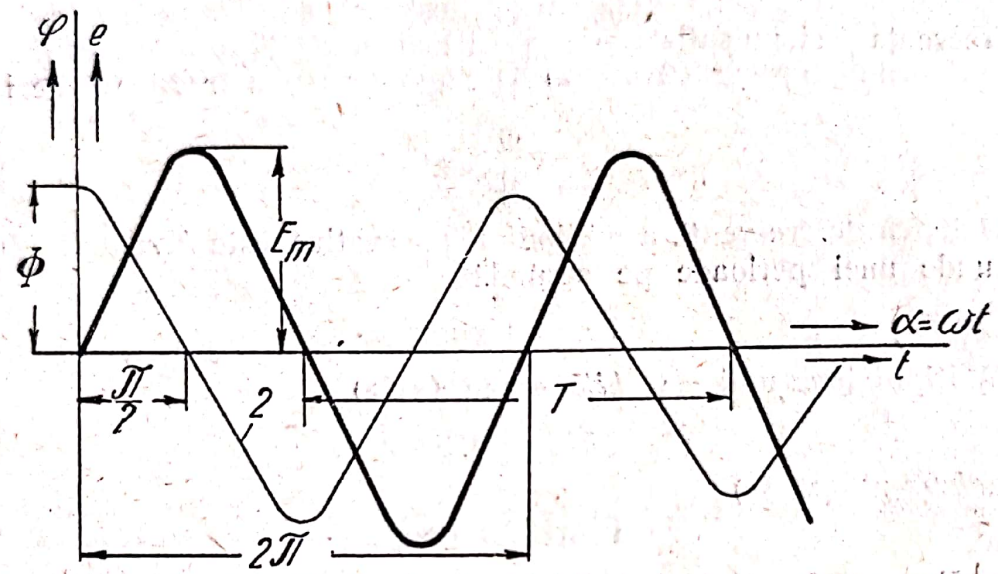


Fig. 8-3. Diagrama fluxului și a f.e.m. sinusoidale

Fluxul variabil φ poate fi reprezentat tot printr-o sinusoidă, ținînd seama că

$$\varphi = \Phi \cos \omega t = \Phi \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) . \qquad (8\text{-}8)$$

Luînd ca origine a timpurilor momentul cînd fluxul trece prin valoarea sa maximă pozitivă, obținem curba 2 din fig. 8-3.

După cum se vede, f.e.m. nu trece prin valorile sale maxime în același timp cu fluxul care o produce, ci în urma acestuia. Se constată de asemenea că pentru $t = 0$, $\varphi = \Phi$ și $e = 0$. Pentru ca f.e.m. să atingă valoarea sa maximă pozitivă, trebuie ca spira să se rotească cu $\frac{\pi}{2}$ și în acel moment fluxul prin spiră este nul.

În ambele mărimi alternative sinusoidale φ și e, pulsația ω este egală cu viteza unghiulară de rotație a spirei. Dacă notăm cu n viteza în rotații pe minut a spirei, viteza sa unghiulară, deci pulsația mărimilor φ și e este

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60} , \qquad (8\text{-}9)$$

iar frecvența acestor mărimi,

$$f = \frac{n}{60} . \qquad (8\text{-}10)$$

Dacă în loc de doi poli, generatorul elementar de curent alternativ are $2p$ poli, așezați simetric în jurul axului spirei și la aceeași distanță de acest ax, mărimile sinusoidale φ și e vor trece prin valorile lor anterioare după fiecare deplasare a spirei egală cu $\frac{2\pi}{p}$ dintr-o rotație completă. Rezultă, în acest caz, că perioada T este de p ori mai mică, deci frecvența f și pulsația ω de p ori mai mare decît în cazul precedent, al generatorului bipolar ($2p = 2$). Relația (8-10) a frecvenței devine

$$f = \frac{pn}{60} \cdot \qquad (8\text{-}11)$$

Unitatea de frecvență a mărimilor alternative este *herz*-ul (Hz), care corespunde unei perioade pe secundă

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ per/s} \cdot$$

Multiplii herz-ului sînt *kiloherz*-ul (kHz)

$$1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz}$$

și *megaherz*-ul (MHz)

$$1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz} \cdot$$

În Europa frecvența industrială standardizată este de 50 Hz. Pentru tracțiunea electrică se utilizează frecvențele de 16, 23, 25 și 50 Hz. În America sînt utilizate frecvențele industriale de 50 și 60 Hz.

În transmisiile telefonice cu fir sînt întrebuințate frecvențe de 300-5 000 Hz. În electrotermie se aplică frecvența de 50 Hz - 10 MHz. În transmisiile prin radio se utilizează curenți de frecvență înaltă și foarte înaltă cuprinsă între 10^{-1} - 10^4 MHz.

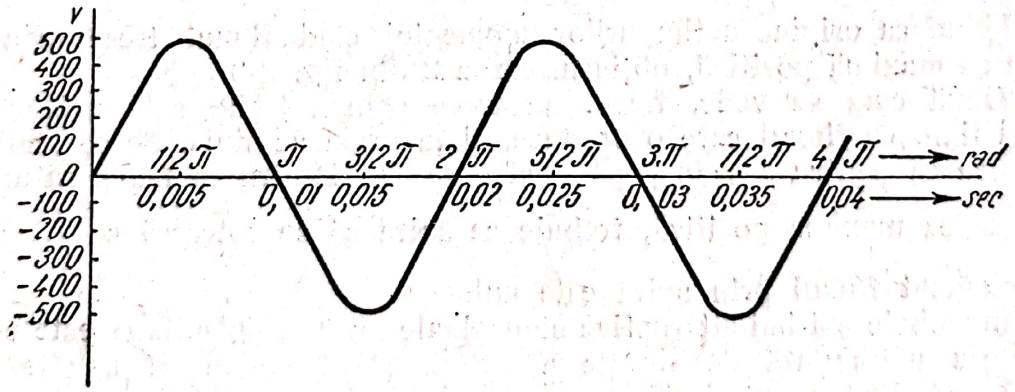


Fig. 8-4. Diagrama sinusoidală a unei f.e.m. cu $Em = 500$ V și $f = 50$ Hz

Curenți alternativi de frecvență înaltă și foarte înaltă nu se pot obține pe cale mecanică, cu ajutorul mașinilor; producerea lor se face cu ajutorul oscilatoarelor cu tuburi electronice.

La frecvența industrială de 50 Hz, valoarea pulsației ω, conform relației (8-5), este

$$\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}.$$

Valoarea variabilă cu timpul a unei funcții alternative se numește *valoarea instantanee* și se notează cu literă mică, așa cum am făcut mai sus cînd am notat cu φ fluxul instantaneu și cu e f.e.m. instantanee.

Valoarea maximă a unei funcții alternative se numește *amplitudine* și se notează cu literă mare (simbolul mărimii), însoțită de indicele m. De la această regulă face abstracție fluxul, a cărui amplitudine se notează cu literă mare fără indicele m. În figura 8-4, am reprezentat sinusoida unei f.e.m. care are o amplitudine de 500 volți și o frecvență de 50 Hz, deci a cărei perioadă T este

$$T = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ s}.$$

Exemplul 8-1. Să se determine frecvența unui curent alternativ, a cărui perioadă este de 0,01666 s.

Soluția: Se aplică relația (8-2)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}01666} = 60 \text{ Hz}.$$

Exemplul 8-2. Care este valoarea instantanee a unei f.e.m. alternative sinusoidale, de amplitudine 380 V, cînd $\omega t = 0{,}96$ radiani.

Soluția: $e = E_m \sin \omega t = 380 \cdot \sin 0{,}96 = 311{,}22$ V.

8-3. Fază și diferență de fază

Să presupunem că generatorul elementar din fig. 8-5 dispune de trei spire egale, notate cu *1*, *2* și *3* (spira *1* fiind cea din mijloc), și că spira *2*

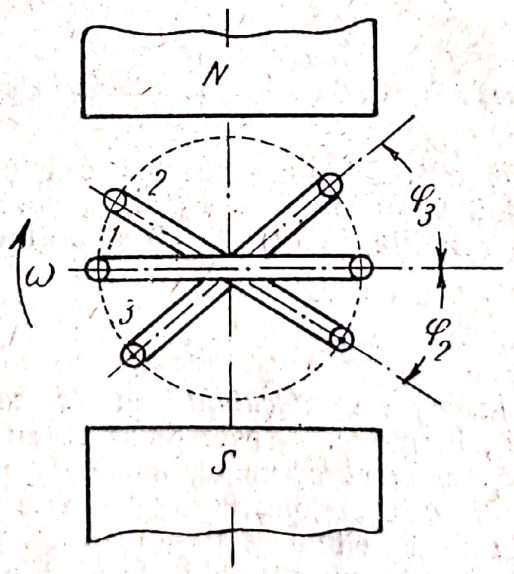


Fig. 8-5. Generatorul elementar cu spire decalate una față de alta

face cu spira *1* un unghi φ_2 în sensul rotației, iar spira *3* face cu spira *1* un unghi φ_3, în sens opus sensului de rotație. Spirele, învîrtindu-se în cîmp

cu aceeași viteză, f.e.m. induse în ele au aceeași frecvență și aceeași amplitudine. Deoarece însă spirele sînt deplasate una față de alta, f.e.m. induse nu trec simultan prin zero și prin valorile lor maxime și minime.

Să exprimăm f.e.m. indusă în spira *1* prin relația

$$e_1 = E_m \sin \omega t \cdot$$

Aceasta înseamnă că luăm ca origine a timpurilor și totodată a unghiurilor ωt momentul arătat în fig. 8-5, cînd fluxul prin spira *1* atinge valoarea sa maximă și $e_1 = 0$. Într-adevăr, dacă în relația precedentă facem $t = 0$, obținem

$$e_{10} = 0.$$

În acest caz, f.e.m. induse în spirele 2 și 3 sînt date, respectiv, de relațiile

$$e_2 = E_m \sin (\omega t - \varphi_2)$$

și (8-12)

$$e_3 = E_m \sin (\omega t - \varphi_3) \cdot$$

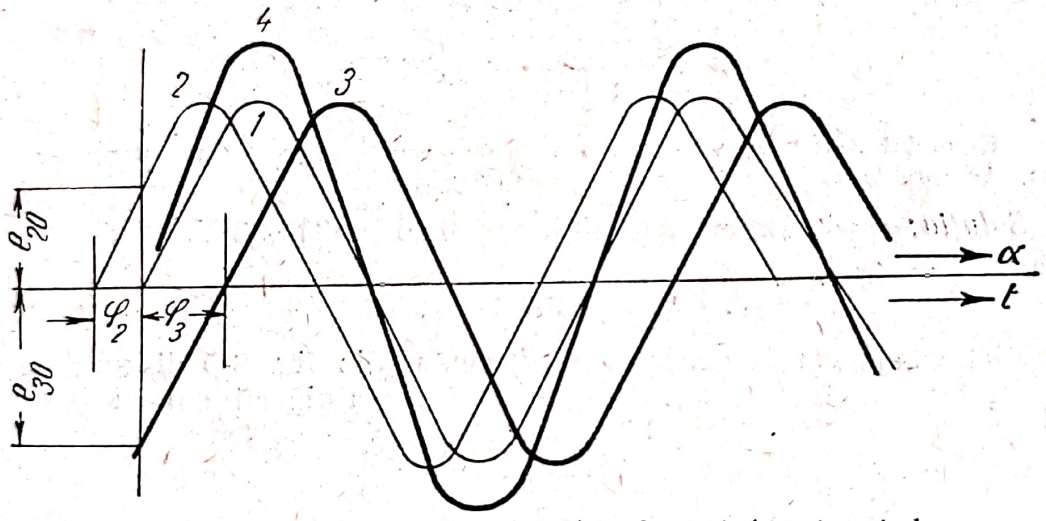


Fig. 8-6. Reprezentarea prin sinusoide a f.e.m. induse în spirele decalate între ele

Aceste f.e.m. sînt reprezentate prin sinusoidele *1*, *2* și *3* din fig. 8-6. Pentru a determina valorile f.e.m. e_2 și e_3 corespunzătoare momentului inițial, facem, în relațiile (8-12), $t = 0$ și obținem

$$e_{20} = E_m \sin \varphi_2$$

și

$$e_{30} = - E_m \sin \varphi_3 \cdot$$

Se spune că f.e.m. e_2 este *decalată* sau *defazată* cu unghiul φ în avans față de f.e.m. e_1, iar f.e.m. e_3 este defazată cu unghiul φ_3 în întîrziere față de f.e.m. e_1. Se mai spune că între e_2 și e_1, respectiv e_3 și e_1, există *diferența de fază* φ_2, respectiv $-\varphi_3$. Între f.e.m. e_2 și e_3 decalajul sau diferența de fază este $\varphi_2 - (-\varphi_3) = \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_{23}$.

Timpul care corespunde unui unghi de decalaj, de pildă unghiului φ_{23}, este dat de relația

$$t_{23} = \frac{\varphi_{23}}{\omega} = \frac{\varphi_{23}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{\varphi_{23}}{2\pi} T \cdot \qquad (8\text{-}13)$$

Unghiurile φ_2 și φ_3 se mai numesc și *faze inițiale* ale funcțiilor sinusoidale e_2 și e_3.

Cînd unghiul de defazaj dintre două mărimi alternative sinusoidale de aceeași frecvență este zero, mărimile respective variază la fel, trecînd simultan prin valorile lor maxime și minime. În acest caz, cele două mărimi alternative sînt *în fază*. Curbele *1* și *4*, din figura 8-6, reprezintă două f.e.m. alternative sinusoidale în fază.

Dacă diferența între fazele a două mărimi sinusoidale este egală cu $\pm \frac{\pi}{2}$, cum este de pildă cazul fluxului variabil și al f.e.m. induse, cele două mărimi sînt *în cuadratură de fază;* dacă această diferență este egală cu $\pm \pi$, mărimile sînt *în opoziție de fază*.

Exemplul 8-3. Se dau următoarele f.e.m. alternative sinusoidale: $e_1 = Em \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $e_2 = E \sin(\omega t - \varphi_2)$, în care $\varphi_1 = 45^0$ și $\varphi_2 = 30^0$ Se cere să se determine: 1) valorile instantanee ale celor două f.e.m. în momentul cînd $t = 0{,}005$ s, dacă $Em = 500$ V; 2) unghiul de decalaj dintre cele două f.e.m.; 3) timpurile t_1 și t_2 corespunzătoare fazelor lor inițiale și 4) timpul corespunzător defazajului lor.
Frecvența f.e.m. este de 50 Hz.

Soluția: Fazele inițiale φ_1 și φ_2, exprimate în radiani, sînt

$$\varphi_1 = \frac{45^0 \cdot 2\pi}{360^0} = \frac{1}{4}\pi; \quad \varphi_2 = \frac{30^0 \cdot 2\pi}{360^0} = \frac{1}{6}\pi.$$

1. Pentru $f = 50$ Hz, $\omega = 2\pi f = 100\pi$. Valorile f.e.m. la timpul $t = 0{,}005$ s sînt: $e_1 = 500 \sin\left(100\pi \cdot 0{,}005 + \frac{1}{4}\pi\right) = 500 \sin\left(0{,}5 + \frac{1}{4}\right)\pi =$

$= 500 \sin \frac{3}{4}\pi = 500 \cdot 0{,}707 = 340{,}5$ V și $e_2 = 500 \sin\left(0{,}5 - \frac{1}{6}\right)\pi = 500 \times$

$\times \sin \frac{1}{3}\pi = 500 \frac{\sqrt{3}}{2} = 432{,}5$ V.

2. Unghiul de defazaj dintre e_1 și e_2 este $\varphi_{12} = \varphi_1 - (-\varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = 45^0 + 30^0 = 75^0$ sau în radiani $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{12}\pi$. Prin urmare, f.e.m. e_1 este defazată în avans față de f.e.m. e_2 cu un unghi de 75^0 sau $\frac{5}{12}\pi$ radiani.

3. Perioada celor două f.e.m. este $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02$ s. Timpul corespunzător fazelor inițiale se calculează cu relația (8-13)

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{1}{8}T = \frac{1}{8}0{,}02 = 0{,}0025 \text{ s},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega} = -\frac{\frac{1}{6}\pi}{\frac{2\pi}{T}} = -\frac{1}{12}\,0{,}02 = -0{,}001667\ \text{s}.$$

4. Timpul corespunzător defazării dintre e_1 şi e_2 este

$$t_{12} = t_1 - t_2 = 0{,}0025 - (-0{,}001667) = 0{,}004167\ \text{s}.$$

Aceasta înseamnă că f.e.m. e_1 trece prin valoarea sa maximă pozitivă cu 0,004167 secunde înaintea f.e.m. e_2.

8-4. Reprezentarea vectorială a mărimilor sinusoidale

În afară de reprezentarea prin sinusoide, diagrame desfăşurate în timp, care poartă denumirea de *diagrame panoramice*, mărimile sinusoidale pot fi reprezentate şi prin vectori în mişcare de rotaţie.

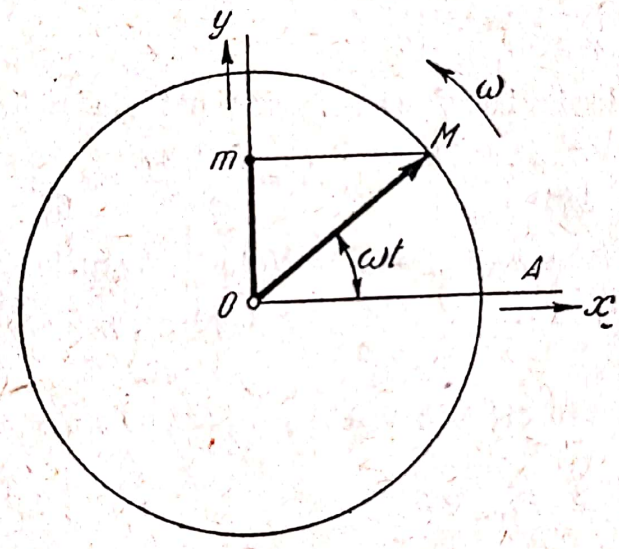


Fig. 8-7. Reprezentarea unei mărimi sinusoidale printr-un vector învîrtitor, cînd se ia axa Ox ca origine a timpilor

Să considerăm un vector $\overline{OM}$, de lungime Y ($OM = Y$), care se învîrteşte în jurul originii sale O cu o viteză unghiulară de rotaţie constantă ω. Fie $\overline{OA}$ direcţia vectorului în momentul $t = 0$. Numim această direcţie *originea timpilor*.

Dacă direcţia OA coincide cu direcţia pozitivă a axei absciselor (fig. 8-7), rezultă că unghiul pe care îl face vectorul $\overline{OM}$ la un moment dat cu această axă este

$$\sphericalangle MOx = \sphericalangle MOA = \omega t\ .$$

Dacă direcţia $\overline{OA}$, luată ca origine a timpilor, face cu axa absciselor un unghi φ (fig. 8-8), unghiul MOx devine

$$\sphericalangle MOx = \omega t + \varphi\ .$$

Proiecţia vectorului învîrtitor $\overline{OM}$ pe direcţia axei ordonatelor este

$$y = Y \sin \omega t$$

în primul caz şi

$$y = Y \sin (\omega t + \varphi) ,$$

în cel de al doilea.

Ambele expresii reprezintă funcţii alternative sinusoidale.

Prin urmare, o mărime sinusoidală poate fi reprezentată printr-un vector învîrtitor, a cărui lungime este egală cu amplitudinea mărimii sinusoidale şi a cărei viteză unghiulară de rotaţie este egală cu pulsaţia acestei mărimi. Proiecţia vectorului învîrtitor pe axa ordonatelor ne dă, în fiecare moment, valoarea instantanee a mărimii sinusoidale. Un asemenea vector poartă denumirea de *vector cronic* şi se notează prin simbolul respectiv, prevăzut deasupra cu o bară.

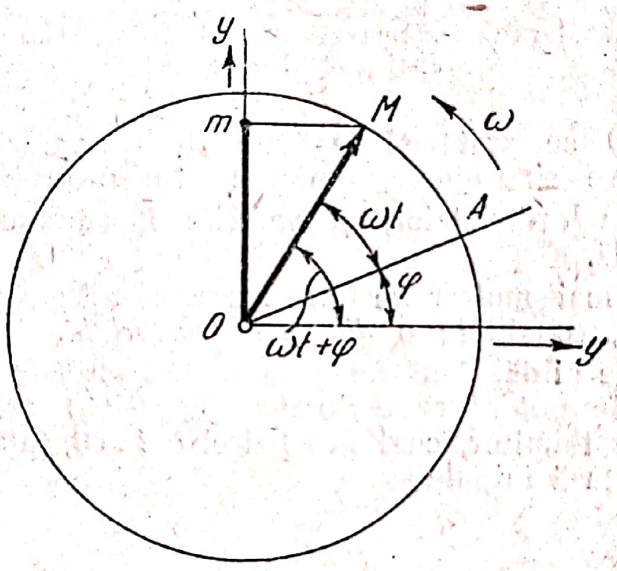


Fig. 8-8. Reprezentarea precedentă, cînd se ia ca origine a timpilor direcţia fixă *OA*

Vectorii spaţiali (vezi par. 1-66) sînt vectori ficşi în spaţiu şi constanţi ca mărime, direcţie şi sens. Aceşti vectori, care se mai numesc şi *vectori acronici,* se notează cu simbolul respectiv, prevăzut deasupra cu o săgeată (aşa cum am procedat în par. 1-6).

Unghiul φ, pe care îl face vectorul învîrtitor (vectorul cronic) în momentul $t = 0$ cu direcţia pozitivă a axei absciselor, este ceea ce am definit mai sus ca fază iniţială a funcţiei alternative sinusoidale.

Să presupunem că vrem să reprezentăm vectorial f.e.m. sinusoidală $e = E_m \sin (\omega t + \varphi)$.

Luăm un vector a cărui mărime să fie egală, la o anumită scară, cu amplitudinea E_m a funcţiei sinusoidale şi-l aşezăm în aşa fel încît să facă, la un moment dat t_1, unghiul $\omega t_1 + \varphi$ cu direcţia pozitivă a axei absciselor (fig. 8-9).

Dacă ne închipuim acum că acest vector se roteşte în sens trigonometric cu o viteză unghiulară egală cu pulsaţia ω, proiecţiile lui

Scanned with OKEN Scanner

pe axa ordonatelor ne vor da, pentru valorile corespunzătoare ωt, valorile instantanee ale f.e.m. considerate, deoarece, la scara aleasă, aceste proiecţii reprezintă mărimea variabilă sinusoidală

$$e = E_m \sin (\omega t + \varphi) \cdot$$

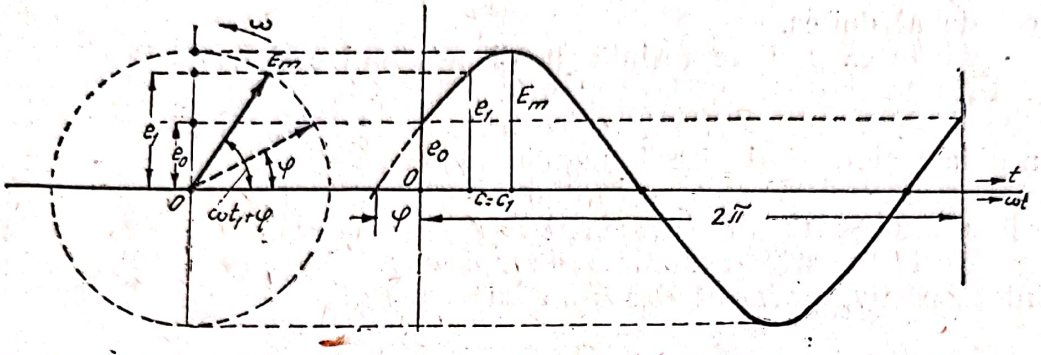


Fig. 8-9. Legătura dintre reprezentarea vectorială şi cea sinusoidală a unei mărimi sinusoidale

În fig. 8-9 se arată şi legătura dintre valorile instantanee ale funcţiei alternative sinusoidale, obţinute prin proiectarea vectorului rotativ $\overline{E}_m$ pe axa ordonatelor, şi valorile instantanee corespunzătoare date de sinusoidă.

Ansamblul mai multor vectori, reprezentînd mărimi sinusoidale de aceeaşi frecvenţă, constituie o *diagramă vectorială*.

Dacă avem, de pildă, două f.e.m. $e_1 = E_{1m} \sin (\omega t + \varphi_1)$ şi $e_2 = E_{2m} \sin (\omega t + \varphi_2)$, ele pot fi reprezentate (fig. 8-10) prin doi vectori, decalaţi la originea timpilor, cînd $t = 0$ deci $\omega t = 0$, faţă de axa absciselor, cu unghiurile de fază iniţiale φ_1 şi φ_2.

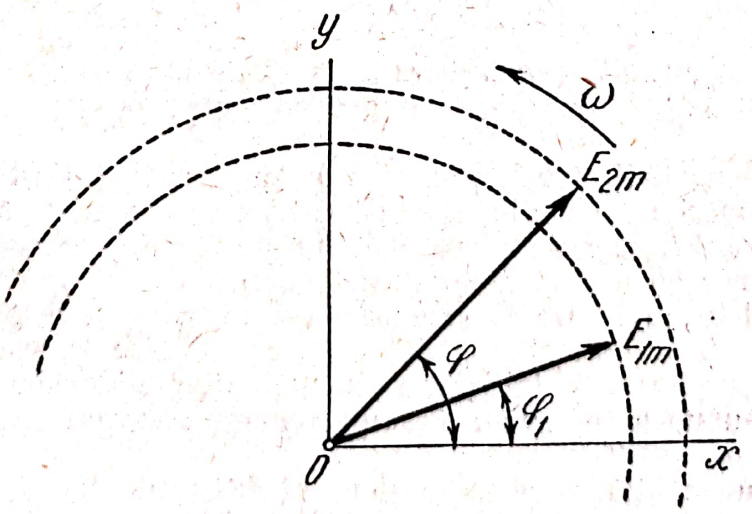
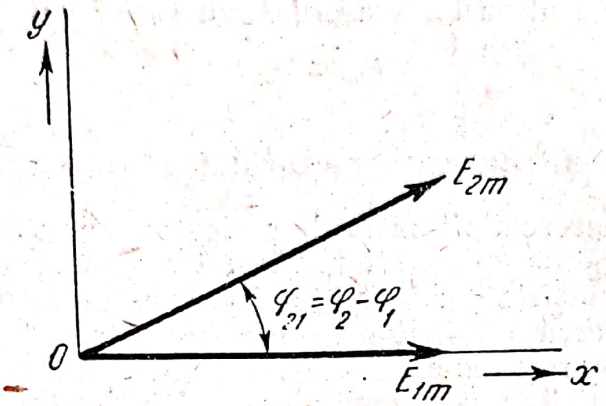


Fig. 8-10. Diagrama vectorială a f.e.m.

Toţi vectorii unei diagrame vectoriale, avînd aceeaşi frecvenţă f, înseamnă că au aceeaşi pulsaţie ω, deci se rotesc, în bloc, cu aceeaşi viteză unghiulară, păstrîndu-şi aceleaşi poziţii relative.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece în operațiile ce intervin între mărimile alternative sinusoidale nu ne interesează decît defazajul dintre aceste mărimi, în loc să așezăm toți vectorii, în raport cu axa absciselor, sub niște unghiuri egale cu unghiurile inițiale de fază, putem să luăm ca direcție arbitrară pentru unul din vectori chiar axa absciselor și să construim ceilalți vectori față de primul



Fip. 8-11. Diagrama vectorială precedentă, cu v ctorul E_{1m} luat ca origine de fază

luată ca origine de fază, făcînd cu el unghiuri egale cu defazajele respective. În acest scop, se poartă unghiurile de defazaj pozitive în sensul trigonometric, iar cele negative în sensul mișcării acelor ceasornicului.

Aplicînd acest procedeu la exemplul de mai sus, al celor două mărimi sinusoidale e_1 și e_2, să presupunem că luăm faza vectorului f.e.m. e_1 ca origine de fază.

În acest caz, acest vector va avea poziția arătată în fig. 8-11. Vectorul reprezentînd f.e.m. e_2 este decalat față de vectorul f.e.m. e_1 cu unghiul de defazaj dintre cei doi vectori, adică cu

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 \cdot$$

Deoarece $\varphi_2 > \varphi_1$, urmează că φ_{21} este pozitiv și trebuie luat pe diagramă în sens trigonometric. Vectorul f.e.m. e_2 este *în avans* față de

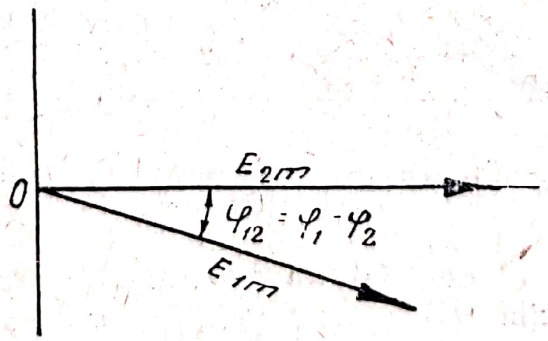


Fig. 8-12. Diagrama vectorială precedentă, cu vectorul E_{2m} luat ca origine de fază

vectorul f.e.m. e_1 cu unghiul φ_{21} sau invers, vectorul f.e.m. e_1 este *în întîrziere* cu același unghi față de vectorul f.e.m. e_2.

Dacă am fi luat ca origine de fază, faza vectorului f.e.m. e_2 (fig. 8-12), vectorul f.e.m. e_1 ar fi fost decalat față de vectorul f.e.m. e_2 cu unghiul

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Deoarece $\varphi_1 < \varphi_2$, rezultă că unghiul φ_{12} este negativ și trebuie luat în sensul de rotație al acelor ceasornicului. Deci

$$\varphi_{12} = -\varphi_{21} .$$

8-5. Adunarea și scăderea vectorială a mărimilor sinusoidale

Avantajul reprezentării mărimilor sinusoidale prin vectori constă în faptul că anumite operații, ce intervin între aceste mărimi, pot fi executate pe cale geometrică mai rapid și mai simplu decît pe cale analitică.

Astfel, adunarea mărimilor sinusoidale poate fi înlocuită prin însumarea vectorilor respectivi.

Ne propunem să adunăm două f.e.m. $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$, adică să găsim expresia

$$e = e_1 + e_2 = E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + E_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) .$$

Să reprezentăm cele două funcții alternative sinusoidale e_1 și e_2 prin vectorii respectivi $\overline{OA} = \overline{E}_{1m}$ și $\overline{OB} = \overline{E}_{2m}$ (fig. 8-13). Valoarea

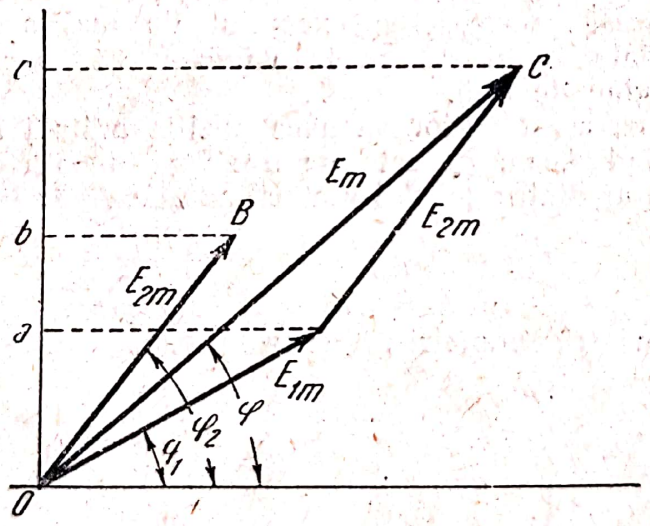


Fig. 8-13. Adunarea vectorială a două mărimi sinusoidale

instantanee a f.e.m. e_1 este dată de proiecția Oa; valoarea instantanee a f.e.m. e_2, de proiecția Ob.

Deci $e_1 + e_2 = Oa + Ob = Oa + ac = Oc$.

Rezultă că suma celor două proiecții este egală cu proiecția vectorului $\overline{OC}$, deci cu proiecția sumei geometrice a vectorilor reprezentînd funcțiile e_1 și e_2. Vectorul $\overline{OC}$ reprezintă deci vectorul f.e.m. rezultantă e.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, efectuînd însumarea grafică a celor doi vectori, așa cum în mecanică se însumează forțele de direcție diferită, se obține:

a) amplitudinea f.e.m. rezultante, prin mărimea OC a vectorului, măsurată la aceeași scară la care am construit vectorii $\overline{E}_{1m}$ și E_{2m}, și b) unghiul de fază inițial φ (decalajul la originea timpilor) al f.e.m. rezultante.

În consecință, se poate scrie

$$e = e_1 + e_2 = E_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Însumarea geometrică a celor doi vectori se exprimă prin ecuația

$$\overline{E}_m = \overline{E}_{1m} + \overline{E}_{2m}.$$

Generalizînd, în cazul unui număr n de mărimi periodice sinusoidale $e_1, e_2, \ldots, e_n$, de aceeași frecvență, reprezentate geometric prin vectorii $\overline{E}_{1m}, \overline{E}_{2m}, \ldots, \overline{E}_{nm}$, vom avea

$$\overline{E}_m = \overline{E}_{1m} + \overline{E}_{2m} + \cdots + \overline{E}_{nm}. \qquad (8\text{-}14)$$

În cazuri mai simple, în loc să determinăm pe E_m și pe φ măsurîndu-le pe diagrama vectorială, le putem deduce mai ușor prin calcul.

Din triunghiul OAC (fig. 8-13), format de cei trei vectori $\overline{E}_{1m}$, $\overline{E}_{2m}$ și $\overline{E}_m$, deducem amplitudinea funcției sinusoidale rezultante din relația

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (8\text{-}15)$$

și decalajul φ din relația

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_m \sin\varphi}{E_m \cos\varphi} = \frac{E_{1m}\sin\varphi_1 + E_{2m}\sin\varphi_2}{E_{1m}\cos\varphi_1 + E_{2m}\cos\varphi_2}. \qquad (8\text{-}16)$$

Să examinăm acum două cazuri particulare de însumări de mărimi

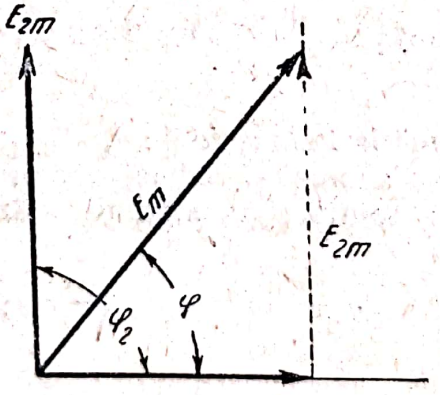


Fig. 8-14. Însumarea vectorilor în cuadratură

sinusoidale: a) cînd cele două mărimi sînt decalate cu $\frac{\pi}{2}$ între ele și b) cînd ele sînt în fază.

În primul caz (fig. 8-14), $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ și relațiile (8-15) și (8-16)

devin, ținînd seama că $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ și $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2}.$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_{2m}}{E_{1m}}.$$

În al doilea caz (fig. 8-15), $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ și relațiile (8-15) și (8-16) devin, ținînd seama că $\cos 0 = 1$ și $\sin 0 = 0$,

$$E_m = E_{1m} + E_{2m}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 .$$

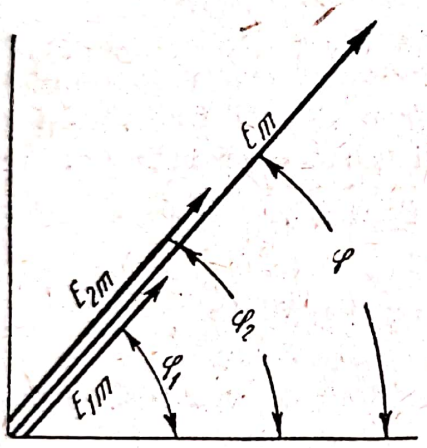


Fig. 8-15. Însumarea vectorilor în fază

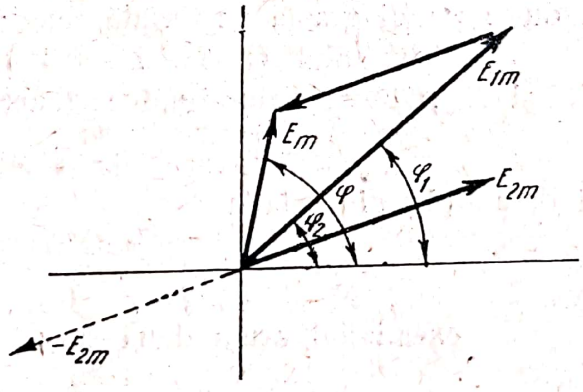


Fig. 8-16. Scăderea vectorială a două mărimi sinusoidale

Scăderea a două mărimi sinusoidale $e_1 - e_2$, se poate înlocui printr-o operație de adunare și anume se adună vectorul mărimii de scăzut cu vectorul, luat în sens contrar, al mărimii scăzător (fig. 8-16), ținînd seama că

$$e_1 - e_2 = e_1 + (-e_2).$$

Rezultă că

$$e = e_1 - e_2 = E_m \sin (\omega t + \varphi).$$

Operația de scădere se exprimă vectorial prin următoarea ecuație

$$\overline{E}_m = \overline{E}_{1m} - \overline{E}_{2m}.$$

Exemplul 8-4. Două circuite de curent alternativ, unul avînd o f.e.m. $e_1 = (125 \times \sin \omega t)$ V, al doilea avînd o f.e.m. $e_2 = 150 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ V sînt legate în serie. Să se determine f.e.m. rezultantă prin metoda analitică.

Soluția: Amplitudinea o determinăm aplicînd relația (8-15)

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2 E_{1m} E_{2m} \cos(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= \sqrt{125^2 + 150^2 + 2 \cdot 125 \cdot 150 \cdot 0{,}866} = 266 \text{ V} .$$

Unghiul de decalaj este dat de relația (8-16)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_{1m} \sin \varphi_1 + E_{2m} \sin \varphi_2}{E_{1m} \cos \varphi_1 + E_{2m} \cos \varphi_2} =$$

$$= \frac{150 \cdot 0{,}500}{125 + 150 \cdot 0{,}866} = \frac{75}{255} = 0{,}294 ;$$

$\varphi = \frac{\pi}{11}$ radiani. Rezultă $e = 266 \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{11}\right)\right]$ V.

8-6. Valori eficace în curent alternativ

În calculele circuitelor de curent alternativ, curenții, f.e.m. și tensiunile alternative apar, de regulă, prin valorile radicalului mediei lor pătratice, care poartă numele de *valori eficace*. Aceste valori se notează cu litere mari, fără indici: curentul cu I, f.e.m. cu E, tensiunea cu U.

În legătură cu efectul termic al curentului electric, se dă noțiunii de valoare eficace a curentului alternativ următoarea definiție:

Se numește valoare eficace a unui curent alternativ intensitatea echivalentă a unui curent continuu care, trecînd printr-o aceeași rezistență electrică ca și curentul alternativ, produce, în același interval de timp, aceeași cantitate de căldură ca și curentul alternativ respectiv.

Să analizăm efectul termic al unui curent alternativ i, care parcurge un circuit de rezistență R, în vederea determinării valorii sale eficace.

Cantitatea de căldură dezvoltată prin efect Joule-Lenz, într-un interval de timp dt, este

$$dQ = 0{,}24 \, R \, i^2 \, dt .$$

Deoarece cantitatea de căldură dezvoltată în cursul fiecărei perioade de timp T a curentului alternativ, rămîne constantă, ne putem limita la determinarea căldurii corespunzătoare unei singure perioade, care este dată de relația

$$Q = \int_0^T dQ = 0{,}24 \int_0^T R \, i^2 \, dt .$$

Cantitatea de căldură produsă de un curent continuu echivalent, în rezistența R, în același interval de timp T, este

$$Q = 0{,}24 \, R \, I^2 \, T .$$

Egalizînd aceste două relații și simplificînd factorul comun $0{,}24\,R$, obținem valoarea eficace a curentului alternativ

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt} . \qquad (8\text{-}17)$$

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 8-17 a fost reprezentată variaţia panoramică a curentului i (curba *1*) şi a pătratului său i^2 (curba *2*). Suprafaţa limitată de curba *2* şi axa absciselor reprezintă, la o anumită scară, mărimea $\int_0^T i^2\,dt$, iar înălţimea Oa a dreptunghiului $Oabc$, a cărui suprafaţă este egală cu suprafaţa limitată de curba *2* şi de axa absciselor, ne dă mărimea $\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$, adică media pătratelor valorilor curentului i; înălţimea Oa reprezintă deci mărimea I^2, pătratul valorii eficace a curentului i.

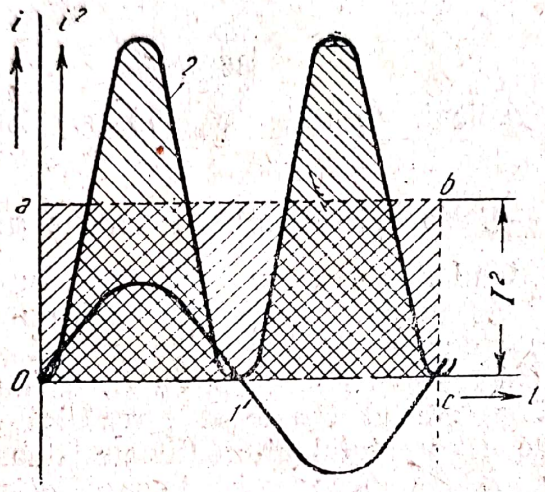


Fig. 8-17. Curba curentului alternativ şi a pătratului acestuia

În mod analog, se obţine valoarea medie a f.e.m. şi a tensiunii alternative ale căror expresii sînt, respectiv,

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt} \qquad (8\text{-}18)$$

şi

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt}\,. \qquad (8\text{-}19)$$

În cazul particular al curentului sinusoidal (fig. 8-17), avem

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)\,;$$

deci

$$\int_0^T i^2\,dt = I_m^2\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{I_m^2}{2}\int_0^T [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)]\,dt =$$

$$= \frac{I_m^2}{2}\int_0^T dt - \frac{I_m^2}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi)\,dt = \frac{I_m^2}{2}\,T\,,$$

ultima integrală fiind egală cu zero.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizînd relaţia (8-17), obţinem pentru valoarea eficace a curentului sinusoidal expresia

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,I_m \cdot \qquad (8\text{-}20)$$

În mod analog, valoarea eficace a f.e.m., respectiv a tensiunii sinusoidale, este

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,E_m \qquad (8\text{-}21)$$

si

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,U_m \cdot \qquad (8\text{-}21\,a)$$

În practica industrială folosindu-se, de regulă, valori eficace şi aparatele de măsură respective indicînd direct aceste valori, în cele ce urmează vom utiliza numai valorile eficace ale curentului, f.e.m. şi tensiunii, iar atunci cînd vor apare valorile lor maxime, vom întrebuinţa expresiile: $\sqrt{2}\,I$ pentru I_m, $\sqrt{2}\,E$ pentru E_m şi $\sqrt{2}\,U$ pentru U_m.

De asemenea, în reprezentările vectoriale vom utiliza numai valorile eficace ale mărimilor sinusoidale.

8-7. Valori medii în curent alternativ sinusoidal

Pe lîngă valorile examinate pînă acum şi anume: valoarea instantanee, valoarea maximă (amplitudinea) şi valoarea eficace, întîlnim uneori, în studiul curenţilor alternativi sinusoidali, şi noţiunea de *valoare medie*, înţelegînd prin aceasta valoarea medie într-o alternanţă (semiperioadă).

În cazul curentului alternativ, *se înţelege prin valoare medie raportul dintre cantitatea de electricitate care trece, într-un singur sens, printr-o secţiune transversală a unui conductor în intervalul unei alternanţe (semiperioade) şi durata acestei alternanţe.*

Prin urmare, conform acestei definiţii

$$I_{med} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt \cdot \qquad (8\text{-}22)$$

În acelaşi mod se defineşte valoarea medie a f.e.m. şi a tensiunii ale căror expresii sînt, respectiv,

$$E_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e\,dt \quad \text{şi} \quad U_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u\,dt \cdot$$

Valoarea medie într-o alternanţă a unei mărimi sinusoidale poate fi reprezentată grafic ca înălţimea unui dreptunghi cu baza $\frac{T}{2}$, a cărui

suprafață este egală cu suprafața limitată de curba respectivă a mărimii și axa absciselor. În fig. 8-18 se arată cele două suprafețe echivalente în cazul curentului alternativ sinusoidal. Integrînd relația (8-22), obținem

$$I_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t\,dt = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0{,}637\, I_m \cdot \quad (8\text{-}23)$$

Prin urmare, valoarea medie a curentului alternativ sinusoidal într-o semiperioadă, în limitele de variație a curentului de la zero pînă la următoarea valoare zero, reprezintă $\frac{2}{\pi}$ din amplitudine.

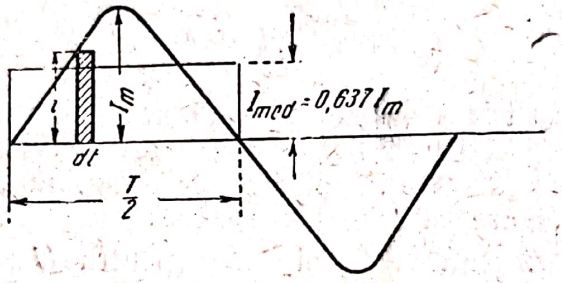


Fig. 8-18. Valoarea medie a curentului alternativ

În mod analog se obține valoarea medie a f.e.m. și a tensiunii alternative sinusoidale pentru care avem, respectiv,

$$E_{med} = \frac{2}{\pi} E_m \approx 0{,}637\, E_m \quad (8\text{-}24)$$

și

$$U_{med} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0{,}637\, U_m \cdot \quad (8\text{-}24\,a)$$

Ținînd seama că $E_m = \omega \Phi$ (vezi par. 8-2), relația (8-24) devine

$$E_{med} = \frac{2}{\pi} E_m = \frac{2}{\pi} \omega \Phi = \frac{4\pi}{\pi} f \Phi = 4 f \Phi$$

în cazul unei singure spire și

$$E_{med} = 4 f w \Phi \quad (8\text{-}25)$$

în cazul general, al unui circuit cu w spire.

Valoarea medie într-o perioadă întreagă a unei mărimi alternative sinusoidale este zero.

Raportul dintre valoarea eficace și valoarea medie a unei mărimi alternative, depinde de forma curbei și se numește *factor de formă* a curbei acelei mărimi.

Pentru o f.e.m. alternativă sinusoidală, factorul de formă, pe care îl notăm cu k_f, este

$$k_f = \frac{E}{E_{med}} = \frac{\frac{E_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} E_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 \cdot \quad (8\text{-}26)$$

G.S.

Raportul dintre valoarea maximă a unei mărimi alternative și valoarea eficace a acelei mărimi se numește *factor de amplitudine*.

Pentru o f.e.m. alternativă sinusoidală, factorul de amplitudine, pe care îl notăm cu k_a, este

$$k_a = \frac{E_m}{E} = \frac{\sqrt{2}E}{E} = \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot \qquad (8\text{-}27)$$

Pentru curbele avînd o formă mai ascuțită decît sinusoida (de pildă triunghiul și cuspidele sinusoidale și eliptice), $k_f > 1{,}11$ și $k_a > 1{,}41$; pentru curbele avînd o formă mai plată decît sinusoida (de pildă dreptunghiul, semicercul sau semielipsa), $k_f < 1{,}11$ și $k_a < 1{,}41$.

Cu ajutorul factorului de formă a curbei f.e.m. putem exprima valoarea eficace a unei f.e.m. în funcție de valoarea maximă a fluxului care o induce prin relația

$$E = k_f\, E_{med} = 4\, k_f\, w\, f\, \Phi \cdot \qquad (8\text{-}28)$$

În cazul cînd f.e.m. are o formă sinusoidală, $k_f = 1{,}11$ și relația precedentă devine

$$E = 4\, k_f\, w\, f\, \Phi = 4{,}44\, w\, f\, \Phi \cdot \qquad (8\text{-}29)$$

Exemplul 8-4. Se cere valoarea maximă și cea medie a unui curent alternativ sinusoidal, pe care, măsurîndu-l cu un ampermetru, obținem 50 A.

Soluția: Valoarea maximă este $I_m = \sqrt{2}\, I = 1{,}41 \cdot 50 = 70{,}5$ A, iar valoarea medie

$$I_{med} = \frac{I}{k_f} = \frac{50}{1{,}11} = 45 \text{ A} \cdot$$

8-8. Rezistența în curent alternativ. Efectul pelicular

Experimental se constată că rezistența conductoarelor metalice este mai mare în curent alternativ decît în curent continuu. Cauza acestui fenomen se atribuie faptului că, în curent alternativ, distribuția curentului nu este uniformă în secțiunea transversală a conductorului, ci tinde să se concentreze către suprafața conductorului, de unde rezultă o mărire corespunzătoare a rezistenței. Această tendință a curentului alternativ de a se deplasa către suprafața conductorului poartă numele de *efect pelicular*. Fenomenul mai este cunoscut și sub numele de *efect skin*, de la cuvîntul englez care înseamnă piele.

Efectul pelicular este o consecință a inducției electromagnetice produse de cîmpul magnetic variabil din interiorul conductorului și mărirea corespunzătoare a rezistenței depinde de frecvența curentului alternativ, de conductanța specifică și de permeabilitatea magnetică a materialului din care este confecționat conductorul electric, precum și de diametrul secțiunii transversale a conductorului.

Mărirea rezistenței conductorului metalic, consecința efectului pelicular, se explică în felul următor:

Să presupunem că avem un conductor metalic liniar, de secțiune transversală circulară, pe care, prin suprafețe cilindrice coaxiale cu el,

Scanned with OKEN Scanner

îl împărţim într-o serie de elemente de conductor de secţiuni transversale echivalente şi de aceeaşi lungime ca şi conductorul dat (fig. 8-19). Elementul de conductor din mijloc va avea o secţiune transversală circulară, celelalte secţiuni inelare.

Dacă conductorul este parcurs de un curent continuu, densitatea de curent este aceeaşi pe toată suprafaţa sa, deci elementele de conductor vor avea aceeaşi densitate de curent şi, avînd secţiuni transversale echivalente, vor fi parcurse de curenţi egali.

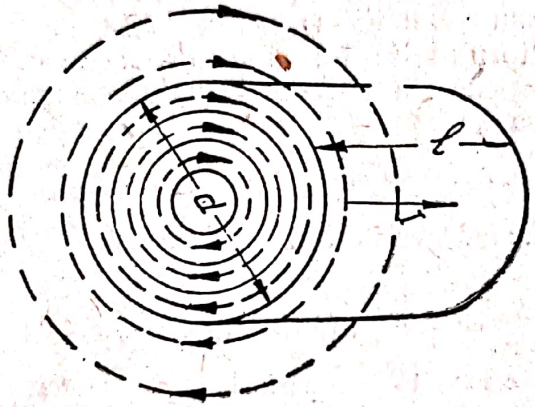


Fig. 8-19. Cîmpul magnetic produs de conductorul cilindric

Cîmpul magnetic produs de curentul total în exteriorul conductorului este acelaşi pentru toate elementele de conductor. În interiorul conductorului, cîmpul magnetic din jurul unui element este însă cu atît mai mare, cu cît elementul se găseşte mai aproape de axul conductorului, fiind maxim pentru elementul din mijloc. În curent continuu, această variaţie a cîmpului interior, de-a lungul secţiunii transversale, nu are nici o influenţă asupra curentului din conductor, deoarece cîmpul şi fluxul conductorului rămîn constante în timp.

În cazul cînd curentul este alternativ, cîmpurile şi fluxurile magnetice, care iau naştere în jurul elementelor de conductor, vor fi de asemenea alternative şi, în consecinţă, potrivit legii inducţiei electromagnetice, în fiecare element ia naştere cîte o f.e.m. de autoinducţie. Ca orice f.e.m. de autoinducţie, aceste f.e.m. se opun variaţiei curentului în circuit şi efectul lor este cu atît mai accentuat, cu cît elementul conductor se găseşte mai aproape de axul conductorului, deci cu cît fluxul alternativ al elementului este mai mare. Ca urmare, distribuţia curentului în secţiunea transversală a conductorului nu se mai face uniform, ci densitatea de curent variază între o valoare minimă, în axul conductorului, şi o valoare maximă, la periferia lui. Secţiunea utilă a conductorului este mai mică şi, în consecinţă, rezistenţa lui mai mare. Rezistenţa în curent alternativ se numeşte *rezistenţă activă*, iar rezistenţa în curent continuu, *rezistenţă ohmică*. Rezistenţa activă se obţine împărţind pierderile de

putere, care au loc în conductorul de secțiune mare parcurs de curentul alternativ, prin pătratul valorii eficace a curentului.

La frecvența industrială de 50 Hz, rezistența activă este practic egală cu rezistența ohmică cînd conductoarele au secțiuni normale și sînt confecționate din materiale neferomagnetice.

Raportul dintre rezistența activă R și rezistența ohmică R_0 a unui conductor se numește *coeficient pelicular* și se notează cu ξ. Prin urmare,

$$\xi = \frac{R}{R_0}.$$

Coeficientul pelicular este dat, în curba din fig. 8-20, în funcție

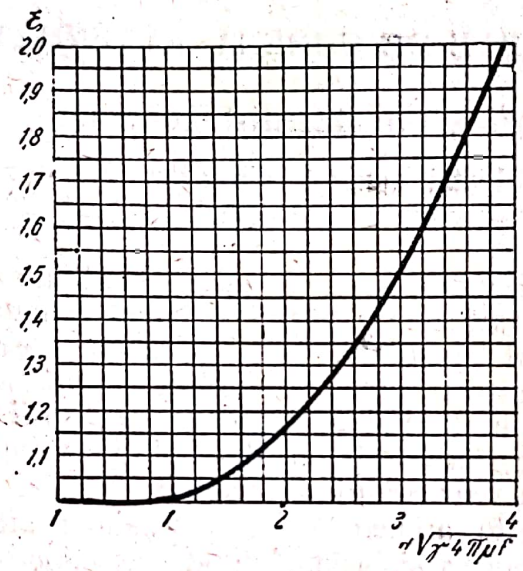


Fig. 8-20. Curba de variație a coeficientului pelicular

de produsul $d\sqrt{\gamma 4\pi\mu f}$, în care d reprezintă diametrul conductorului, γ conductanța specifică, μ permeabilitatea magnetică a materialului din care este confecționat conductorul și f, frecvența curentului din conductor. În calculul acestui produs, d se exprimă în cm, γ în $\frac{\text{cm}}{\Omega \cdot \text{cm}^2}$, μ în H/cm, iar f în Hz.

Exemplul 8-6. Să se determine, procentual, cu cît este mai mare rezistența activă a unui conductor de cupru, de un diametru de 12,4 mm ($S = 120$ mm^2), parcurs de un curent alternativ cu o frecvență de 200 Hz, față de rezistența ohmică a aceluiași conductor.

Soluția: Se determină, cu ajutorul curbei din fig. 8-22, coeficientul pelicular al conductorului pentru $d\sqrt{\gamma 4\pi\mu f} = 1{,}24 \times$
$\times \sqrt{58 \cdot 10^4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200} \approx 1{,}5$.

Rezultă că

$$\xi = \frac{R}{R_0} = 1{,}07, \text{ deci } R = 1{,}07\, R_0.$$

Rezistența activă este cu 7% mai mare decît rezistența ohmică.

CAPITOLUL IX

CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV

9-1. Considerații generale

În orice circuit electric există, simultan, rezistența R, inductanța L și capacitatea C, parte concentrate, parte repartizate de-a lungul circuitului.

Cînd circuitul este alimentat în curent continuu sub tensiune constantă, curentul din circuit este constant și energia înmagazinată în cîmpul magnetic și electric al circuitului este constantă. Rezultă că în regimul permanent de funcționare nu apar parametrii L și C ai circuitului. Acești parametri apar numai în timpul regimurilor tranzitorii ale curentului continuu, corespunzătoare închiderii și deschiderii circuitului sau a unei variații a f.e.m. sau a curentului din circuit.

Cînd circuitul este alimentat de o tensiune alternativă, în circuit apare un curent alternativ și, odată cu el, un cîmp electric și un cîmp magnetic variabil, iar în circuit iau naștere f.e.m. de autoinducție.

Prin urmare, în regimul permanent al funcționării circuitelor de curent alternativ apar fenomene mai complicate decît în circuitele de curent continuu. Aceste fenomene devin și mai complicate în regimurile tranzitorii ale curentului alternativ.

Într-un circuit de curent alternativ izolat intervin, simultan, toți parametrii R, L și C ai circuitului. Prin circuit izolat se înțelege circuitul asupra căruia nu se exercită nici o acțiune electromagnetică din partea altor circuite sau din partea unei porțiuni a circuitului însuși asupra altei porțiuni a lui. În cazul contrar, printre parametri circuitului va face parte și inductanța mutuală M. În anumite condiții, unii din acești parametri sînt însă așa de mici încît influența lor este neglijabilă și nu ținem seama de ei în calcule. Astfel, întîlnim cazuri particulare de circuite de curent alternativ care au numai rezistență, deci la care neglijăm inductanța și capacitatea lor, sau numai capacitate, neglijîndu-le rezistența și inductanța, sau care au doi din acești parametri, dacă neglijăm pe al treilea.

Cazul general al circuitelor de curent alternativ este acela cînd trebuie să ținem seama, simultan, de rezistența, inductanța și capacitatea circuitului.

În cele ce urmează, vom examina, pe rînd, circuitele caracteristice de curent alternativ, în ipoteza că parametri circuitului sînt concentrați.

Scanned with OKEN Scanner

9-2. Circuit cu rezistenţă

Să aplicăm o tensiune sinusoidală $u = \sqrt{2}\,U \sin \omega t$ la bornele unui circuit în care ţinem seama numai de rezistenţa sa R (fig. 9-1). Conform legii lui Ohm aplicată valorilor instantanee, valoarea curentului care apare în circuit este dată de relaţia

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\sqrt{2}\,U \sin \omega t}{R} = \frac{\sqrt{2}\,U}{R} \sin \omega t$$

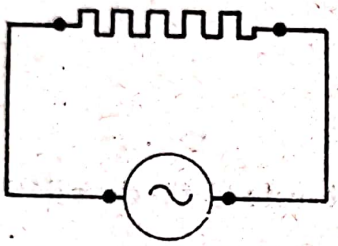


Fig. 9-1. Circuit cu rezistenţă

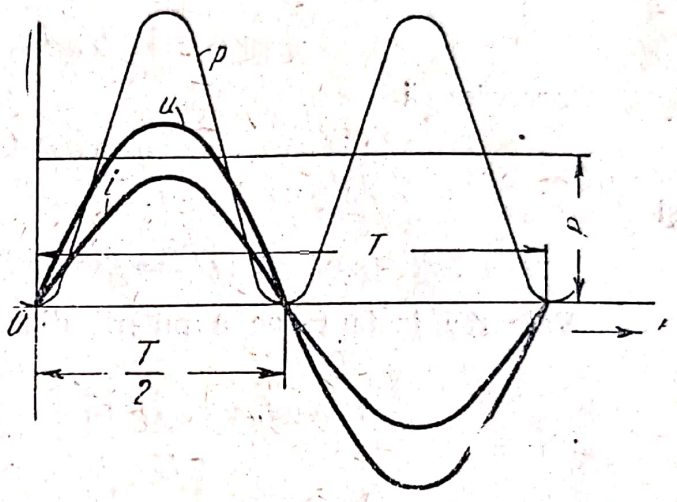


Fig. 9-2. Diagramele de variaţie ale tensiunii, curentului şi puterii într-un circuit cu rezistenţă

sau

$$i = \sqrt{2}\,I \sin \omega t = I_m \sin \omega t\,, \qquad (9\text{-}1)$$

dacă notăm cu

$$I = \frac{U}{R} \qquad (9\text{-}2)$$

valoarea eficace a curentului din circuit.

Prin urmare, în circuit apare un curent alternativ sinusoidal, a cărei valoare instantanee este dată de relaţia (9-1) şi a cărei valoare eficace, de relaţia (9-2). Curentul fiind în fază cu tensiunea, diagrama panoramică a celor două mărimi se prezintă ca în fig. 9-2, iar cea vectorială, ca în fig. 9-3.

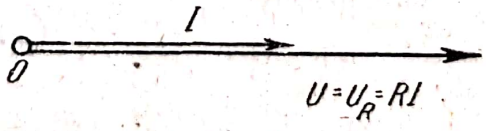


Fig. 9-3. Diagrama vectorială a circuitului cu rezistenţă

Dacă un circuit de rezistenţă R este parcurs de un curent alternativ sinusoidal

$$i = \sqrt{2}\,I \sin \omega t\,,$$

în circuit are loc o cădere de tensiune, a cărei valoare instantanee este

$$u_R = R\,i = \sqrt{2}\,I \sin \omega t \cdot \tag{9-3}$$

Notînd cu

$$U_R = R\,I, \tag{9-4}$$

valoarea eficace a căderii de tensiune, rezultă că între bornele circuitului avem o tensiune alternativă sinusoidală, în fază cu curentul, dată de relația

$$u_R = \sqrt{2}\,U_R \sin \omega t \cdot \tag{9-5}$$

Observăm că

$$u_R = u$$

și

$$U_R = U = RI \cdot$$

Valoarea instantanee a puterii din circuit este dată de relația

$$p = u\,i = \sqrt{2}\,U \sin \omega t \sqrt{2}\,I \sin \omega t = \\ = 2\,U\,I \sin^2 \omega t \cdot \tag{9-6}$$

Rezultă că această putere este mereu pozitivă și variază (după curba arătată în fig. 9-2) cu o frecvență dublă decît tensiunea aplicată.

9-3. Circuit cu inductanță

În schemele circuitelor electrice, inductanțele sînt reprezentate convențional prin simbolul arătat în fig. 9-4.

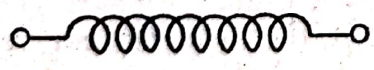


Fig. 9-4. Reprezentarea convențională a inductanțelor

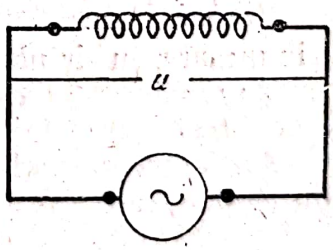


Fig. 9-5. Circuit cu inductanță

Să aplicăm o tensiune sinusoidală $u = \sqrt{2}\,U \sin \omega t$ unui circuit de inductanță L și de rezistență și capacitate neglijabile (fig. 9-5). Tensiunea aplicată fiind alternativă, în circuit va apare un curent variabil care va produce o forță electromotoare de autoinducție dată de relația

$$e_L = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \cdot \tag{9-7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd circuitului legea a doua a lui Kirchhoff și ținînd seama, pe lîngă tensiunea u aplicată bobinei, și de f.e.m. de autoinducție e_L produsă prin variația curentului, putem scrie

$$u - L\frac{di}{dt} = 0 ,$$

deoarece am presupus rezistența circuitului neglijabilă.

Din relația precedentă rezultă

$$u = L\frac{di}{dt} ,$$

de unde

$$di = \frac{1}{L} u\, dt . \tag{9-8}$$

Valoarea curentului din circuit se obține prin integrarea relației (9-8). Vom avea

$$i = \frac{1}{L}\int u\, dt = \frac{1}{L}\int \sqrt{2}\, U \sin \omega t\, dt = \frac{\sqrt{2}\, U}{L}\int \sin \omega t\, dt .$$

Ținînd seama că

$$\int \sin \omega t\, dt = -\frac{1}{\omega}\cos \omega t = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) ,$$

obținem pentru curentul din circuit

$$i = \frac{\sqrt{2}\, U}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Notînd cu

$$I = \frac{U}{\omega L} \tag{9-9}$$

valoarea eficace a curentului din circuit, avem

$$i = \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) . \tag{9-10}$$

Prin urmare, curentul care străbate circuitul este un curent alternativ sinusoidal, de amplitudine $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$, decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în întîrziere față de tensiunea aplicată la borne (fig. 9-6 și 9-7).

Cînd cunoaștem curentul $i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$ care străbate un circuit de inductanță L, căderea de tensiune u_L provocată prin trecerea curentului este dată, conform relației (9-8), de expresia sinusoidală

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L \sqrt{2}\, I \cos \omega t = \omega L \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) , \tag{9-11}$$

a cărei valoare eficace este

$$U_L = \omega L I \cdot \qquad (9\text{-}12)$$

Observăm că tensiunea u_L este egală și în opoziție de fază cu f.e.m. de autoinducție e_L dată de relația (9-7). Prin urmare,

$$u_L = u = -e_L$$

sau

$$u_L = U = -E_L = \omega L I \cdot$$

Rezultă că f.e.m. de autoinducție este în întîrziere față de curentul

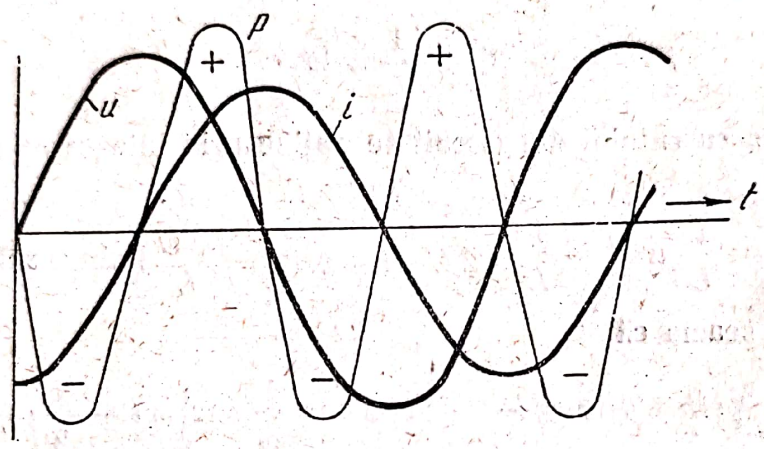


Fig. 9-6 Diagramele de variație ale tensiunii, curentului și puterii într-un circuit cu inductanță

din circuit cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 9-7) și echilibrează tensiunea la bornele circuitului, care este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ asupra curentului din circuit.

Din relația (9-12), rezultă că produsul ωL are dimensiunea unei rezistențe. Acest produs reprezintă rezistența reactivă a inductanței și poartă numele de *reactanță inductivă*.

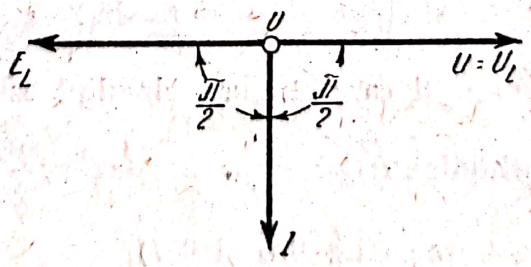


Fig. 9-7. Diagrama vectorială a unui circuit cu inductanță

Reactanțele inductive ale circuitelor electrice se notează cu X_L. Prin urmare,

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \cdot \qquad (9\text{-}13)$$

Reactanţa inductivă creşte proporţional cu frecvenţa curentului din circuit. Deci, prin aceeaşi inductanţă L, la tensiunea aplicată constantă, curentul este cu atît mai mic cu cît frecvenţa lui este mai mare.

Valoarea instantanee a puterii din circuit este

$$p = u\,i = 2\,U\,I \sin \omega\,t \sin\left(\omega\,t - \frac{\pi}{2}\right) = -\,2\,U\,I \sin \omega\,t \cos \omega\,t = \tag{9-14}$$

$$= -\,U\,I \sin 2\,\omega\,t \cdot$$

Prin urmare, această putere variază sinusoidal, cu o frecvenţă dublă decît a tensiunii aplicate, ceea ce rezultă şi din fig. 9-6.

Exemplul 9-1. O bobină de selfinducţie, cu o inductanţă $L = 0{,}0318$ H şi cu o rezistenţă activă neglijabilă, este alimentată cu o tensiune de 220 V, la frecvenţa $f = 50$ Hz. Se cere: *a)* reactanţa inductivă a bobinei; *b)* valoarea curentului eficace din bobină.

Soluţia:

$$a)\ X_L = \omega\,L = 2\,\pi\,f\,L = 3{,}14.0{,}0318 = 10\ \Omega \cdot$$

$$b)\ I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{10} = 22\ \text{A} \cdot$$

9-1. Circuit cu rezistenţă şi inductanţă legate în serie

Să presupunem un circuit electric cuprinzînd o rezistenţă R legată în serie cu o inductanţă L (fig. 9-8), pe care îl alimentează tensiunea

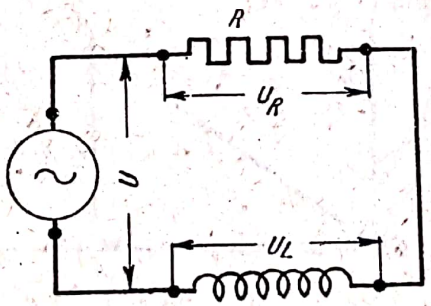


Fig. 9-8. Circuit cu rezistenţă şi inductanţă

alternativă sinusoidală u, de valoare eficace U. Dacă aplicăm circuitului a doua lege a lui Kirchhoff, putem scrie

$$u - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = R\,i\ ,$$

de unde

$$u = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\ \cdot$$

Membrul întîi al ecuaţiei de mai sus fiind o mărime alternativă sinusoidală, trebuie neapărat ca şi termenii din membrul al doilea să reprezinte mărimi sinusoidale. Prin urmare, curentul i este şi el o funcţie sinusoidală.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate deduce valoarea curentului i pe cale analitică, integrînd ecuația diferențială

$$Ri + L\frac{di}{dt} = u \cdot$$

Mult mai ușor se poate deduce valoarea lui i aplicînd metoda calculului grafico-analitic, cu ajutorul diagramei vectoriale.

Notînd cu u_R termenul Ri care, conform relației (9-3), reprezintă tensiunea alternativă la bornele rezistenței și cu u_L termenul $L\frac{di}{dt}$ care, conform relației (9-11), reprezintă tensiunea alternativă la bornele inductanței (fig. 9-8), avem

$$u = u_R + u_L \cdot \qquad (9\text{-}15)$$

Să presupunem că curentul sinusoidal din circuit are ca expresie

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$$

și să luăm faza lui ca origine de fază. Relația (9-15), dintre valorile instantanee, se exprimă vectorial prin ecuația

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L \cdot \qquad (9\text{-}16)$$

Construind diagrama vectorială corespunzătoare acestei ecuații, obținem triunghiul dreptunghic OAB (fig. 9-9), în care $U_R = RI$ este în

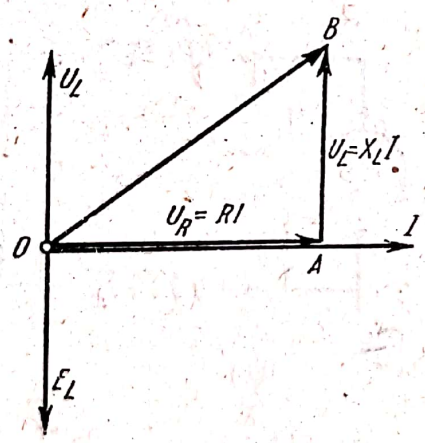


Fig. 9-9. Diagrama vectorială a circuitului cu rezistență și inductanță

fază cu curentul I, iar $U_L = \omega L I = X_L I$ este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în avans față de curent.

Componenta U_R, în fază cu curentul, se numește *componenta activă* a tensiunii aplicate și se notează, de regulă, cu U_a. Această componentă reprezintă căderea ohmică din circuit. Componenta U_L, în cuadratură față de curent, se numește *componenta reactivă* a tensiunii aplicate și se notează de regulă cu U_r. Conform celor stabilite în par. precedent, această com-

ponentă echilibrează f.e.m. de autoinducție E_L care apare în circuit. Fiind produsă prin trecerea curentului printr-o reactanță inductivă, tensiunea U_L *este componenta reactivă inductivă* a tensiunii aplicate.

Din triunghiul dreptunghic OAB rezultă

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \cdot$$

Ținînd seama de valorile componentelor U_R și U_L, această relație devine

$$U = \sqrt{R^2 I^2 + X_L^2 I^2} = I\sqrt{R^2 + X_L^2} ,$$

de unde rezultă valoarea curentului eficace din circuit

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot \qquad (9\text{-}17)$$

Unghiul de decalaj φ, dintre curent și tensiune, poate fi determinat prin tangenta lui care, după cum rezultă din triunghiul OAB, are ca valoare

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{X_L I}{RI} = \frac{X_L}{R} \cdot \qquad (9\text{-}18)$$

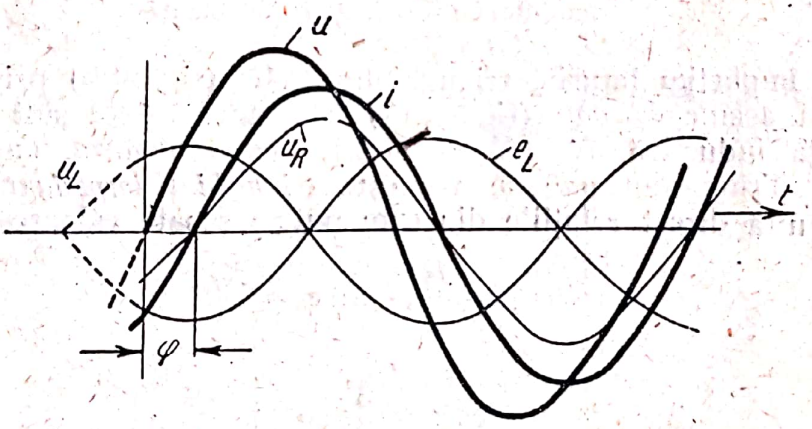


Fig. 9-10. Diagramele de variație ale tensiunilor și curentului într-un circuit cu rezistență și inductanță

Din diagrama vectorială se vede că vectorul tensiunii U este decalat cu unghiul φ înaintea curentului I. Prin urmare, în ipoteza făcută că luăm faza curentului drept origine de fază, tensiunea aplicată are ca expresie

$$U = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \varphi) \cdot$$

Dacă însă luăm, ca și pînă acum, tensiunea ca origine de fază, adică exprimăm tensiunea prin relația $u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$, expresia curentului din circuit ia forma

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \varphi) , \qquad (9\text{-}19)$$

în care valoarea eficace I este dată de relația (9-17), iar decalajul φ, de relația (9-18).

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 9-10 sînt reprezentate, prin sinusoidele respective, diagramele de variație ale tensiunilor și curentului din circuit.

Dacă în expresia (9-17) notăm radicalul de la numitor cu Z

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}\ , \qquad (9\text{-}20)$$

această expresie se simplifică, devenind

$$I = \frac{U}{Z}\ . \qquad (9\text{-}21)$$

Mărimea Z, dată de relația (9-20), care are dimensiunea unei rezistențe, se numește *impedanța* circuitului și se măsoară în ohmi.

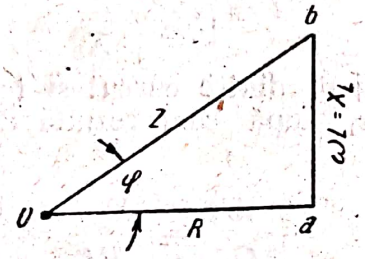


Fig. 9-11. Triunghiul impedanței circuitului cu rezistență și inductanță

Dacă împărțim laturile triunghiului OAB (fig. 9-9) prin I, obținem triunghiului asemenea oab (fig. 9-11), ale cărui catete sînt rezistența R și reactanța inductivă X_L ($X_L = \omega L$), iar ipotenuza, impedanța Z a circuitului. Triunghiul oab se numește *triunghiul impedanței* circuitului. Din el rezultă direct relațiile din care putem scoate valoarea decalajului

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z},\quad \sin\varphi = \frac{X_L}{Z} \qquad (9\text{-}22)$$

și

$$tg\,\varphi = \frac{X_L}{Z}\ .$$

Exemplul 9-2. O bobină cu o rezistență de 50 ohmi și o inductanță de 0,08 H este alimentată de o rețea de 380 V și 50 Hz. Se cere: *a)* impedanța bobinei; *b)* valoarea eficace a curentului din bobină; *c)* decalajul dintre tensiunea aplicată și curent și *d)* expresia valorii instantanee a curentului, în ipoteza că se ia ca origine de fază, faza tensiunii aplicate bobinei.

Soluția:

a) $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{50^2 + (314 \cdot 0{,}08)^2} \approx 56\ \Omega$;

b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{380}{56} \approx 6{,}8\ \text{A}$;

c) $\text{tg}\,\varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{25{,}12}{50} \approx 0{,}502$, $\varphi = 26^\circ 40' \approx 0{,}47$ radiani ;

d) $i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} \cdot 6{,}8 \sin(\omega t - 0{,}47)\ \text{A}$.

Scanned with OKEN Scanner

9-5. Circuit cu capacitate

Să examinăm cazul unui circuit electric care conține numai capacitatea C, celelalți doi parametri fiind neglijabili (fig. 9-12). Armăturile condensatorului fiind despărțite printr-un dielectric, rezistența dintre ele este practic infinită ($R_C = \infty$). Dacă supunem circuitul cu condensator unei tensiuni constante de curent continuu, curentul în circuit, dat de legea lui Ohm, este zero

$$I = \frac{U}{R_C} = \frac{U}{\infty} = 0 \cdot$$

Supunînd circuitul unei tensiuni alternative, condensatorul din circuit se va încărca și descărca periodic, cu frecvența tensiunii aplicate, și în circuit va apare un curent alternativ.

Să presupunem că tensiunea aplicată circuitului este sinusoidală

$$u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t \cdot \qquad (9\text{-}23)$$

Notînd cu q cantitatea variabilă de electricitate cu care se încarcă condensatorul, putem scrie, conform relației (5-18) aplicată valorilor instantanee,

$$q = Cu \cdot \qquad (9\text{-}24)$$

Cantitatea de electricitate dq absorbită sau debitată de condensator într-un interval de timp infinit mic dt, este dată de relația

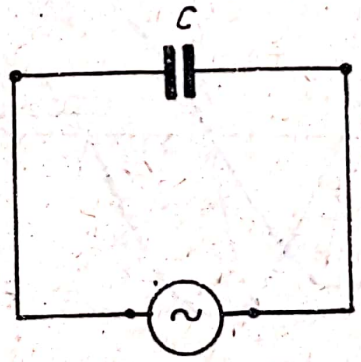


Fig. 9-12. Circuit cu capacitate

$$dq = i\, t, \qquad (9\text{-}25)$$

în care i este curentul variabil din circuit.

Diferențiind relația (9-24), obținem

$$dq = C\, du \cdot \qquad (9\text{-}24a)$$

Din relațiile (9-24 a) și (9-25), rezultă

$$i = C \frac{du}{dt} \qquad (9\text{-}26)$$

sau, ținînd seama că, derivînd relația (9-23), se obține

$$\frac{du}{dt} = \omega \sqrt{2}\, U \cos \omega t = \omega \sqrt{2}\, U \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

expresia curentului din circuit devine

$$i = \omega C \sqrt{2}\, U \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Notînd cu

$$I = \omega C U \qquad (9\text{-}27)$$

valoarea eficace a curentului din circuit, expresia precedentă ia forma

$$i = \sqrt{2}\, I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Prin urmare, curentul care apare în circuit are o formă sinusoidală ca și tensiunea aplicată circuitului și se găsește decalat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii aplicate (fig. 9-13 și 9-14). Amplitudinea curentului este $I_m = C \omega U_m$.

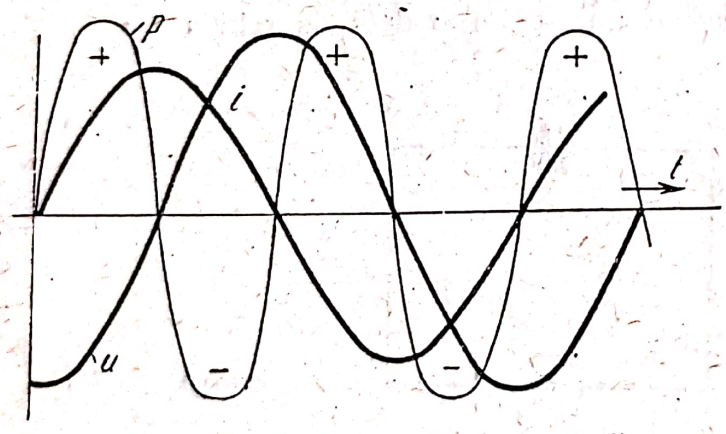


Fig. 9-13. Diagramele de variație ale tensiunii, curentului și puterii într-un circuit cu capacitate

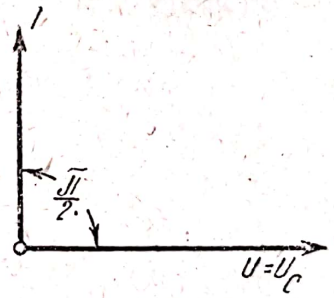


Fig. 9-14. Diagrama vectorială a unui circuit cu capacitate

Expresia (9-27) se poate pune și sub forma

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{X_C}. \qquad (9\text{-}27a)$$

Mărimea

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \pi f C}, \qquad (9\text{-}28)$$

care are dimensiunea unei rezistențe, reprezintă rezistența reactivă a capacității și poartă numele de *reactanță capacitivă.*

Reactanța capacitivă variază invers proporțional cu frecvența f a curentului. Urmează că, la aceeași capacitate C și la tensiune aplicată constantă, curentul prin circuit este cu atît mai mare cu cît frecvența este mai mare.

Dacă cunoaștem curentul $i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$ care străbate un condensator, căderea de tensiune, produsă prin trecerea curentului prin condensator, rezultă din relația (9-26)

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\, dt = \frac{\sqrt{2}\, I}{C}\int \sin \omega t\, dt = \frac{\sqrt{2}\, I}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9\text{-}29)$$

Dacă notăm cu

$$U = \frac{I}{\omega C}$$

valoarea eficace a căderii de tensiune, avem

$$u_C = \sqrt{2}\, U \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9\text{-}29a)$$

Prin urmare, căderea de tensiune reprezintă o funcție alternativă sinusoidală, la fel ca și curentul care o produce, și este decalată față de curent cu $\frac{\pi}{2}$ în întîrziere. Amplitudinea ei este $\frac{\sqrt{2}\, I}{\omega C}$.

Rezultă că

$$u_C = u,$$

deci

$$U_C = U = I \frac{1}{\omega C}. \qquad (9\text{-}30)$$

Valoarea instantanee a puterii din circuit este dată de relația

$$p = ui = 2\, UI \sin \omega t \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\, U\, I \sin \omega t \cos \omega t = \qquad (9\text{-}31)$$

$$= U\, I \sin 2\omega t.$$

Ca și în cazul cînd circuitul conține numai inductanță, puterea instantanee variază sinusoidal, cu o frecvență dublă decît a tensiunii aplicate. Curba sa de variație este redată în fig. 9-13.

Exemplul 9-3. La bornele unui generator, a cărui tensiune este 220 V și frecvența 50 Hz, este legat un condensator de capacitate $C = 60$ μF. Se cere: *a)* reactanța capacitivă a circuitului și *b)* valoarea curentului din circuit.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția:

a) $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 60} \cdot \frac{10^6}{18 \cdot 840} = 53\ \Omega$;

b) $I = \frac{220}{X_C} = 4{,}15\ \text{A}$.

9-6. Circuit cu rezistență și capacitate

Să presupunem existența circuitului din fig. 9-15, format dintr-o rezistență R și o capacitate C, alimentat cu tensiunea alternativă sinusoidală u, de valoare eficace U. În circuit va apare un curent alternativ i.

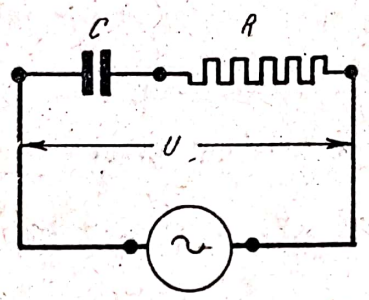


Fig. 9-15. Circuit cu rezistență și capacitate

Tensiunea instantanee se poate descompune în două componente, una u_R, la bornele rezistenței, a doua u_C, la bornele capacității. Vom avea

$$u = u_R + u_C \cdot \qquad (9\text{-}32)$$

Ținînd seama de relațiile (9-3) și (9-29 a), rezultă

$$u = R\,i + \frac{1}{C}\int i\,dt \cdot \qquad (9\text{-}32a)$$

Membrul întîi al relației precedente fiind o funcție sinusoidală, trebuie ca și termenii din membrul al doilea să fie funcții sinusoidale. Prin urmare, curentul i care apare în circuit are o formă periodică sinusoidală. Să presupunem că acest curent este dat de expresia

$$i = \sqrt{2}\,I \sin \omega t \qquad (9\text{-}33)$$

și că luăm curentul ca origine de fază. Relația (9-32) se poate exprima vectorial prin ecuația

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C\ , \qquad (9\text{-}34)$$

în care $U_R = RI$ este *componenta activă*, în fază cu curentul, a tensiunii U, iar $U_C = \frac{I}{\omega C}$ este *componenta reactivă capacitivă*, decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului.

În fig. 9-16 este reprezentată diagrama vectorială, exprimată prin ecuația (9-34), care ne dă triunghiul dreptunghic OAB. Din acest triunghi obținem

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{(RI)^2 + \left(\frac{I}{\omega C}\right)^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

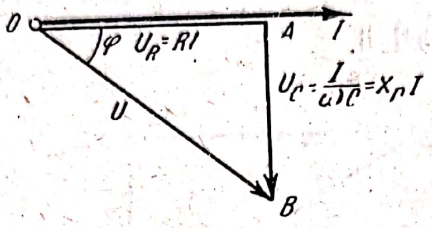


Fig. 9-16. Diagrama vectorială a circuitului cu rezistență și capacitate

de unde

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \qquad (9\text{-}35)$$

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (9\text{-}36)$$

este impedanța circuitului.

În fig. 9-17 sînt reprezentate diagramele de variație ale tensiunilor și curentului.

Dacă împărțim laturile triunghiului OAB prin I, obținem triunghiul

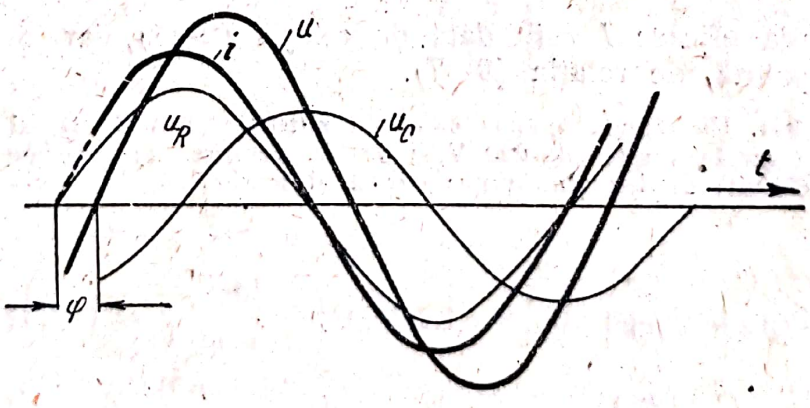


Fig. 9-17. Diagramele de variație ale tensiunilor și curentului într-un circuit cu rezistență și capacitate

dreptunghic asemenea oab (fig. 9-18), ale cărui catete sînt date de rezistența R și reactanța capacitivă X_C, iar ipotenuza de impedanță Z. Este triunghiul impedanței acestui circuit.

Comparînd triunghiul impedanței circuitului conținînd rezistență și inductanță (fig. 9-11), cu triunghiul impedanței circuitului conținînd rezistență și capacitate (fig. 9-18), se constată că reactanța inductivă este decalată față de rezistența circuitului cu $\frac{\pi}{2}$ înainte, iar reactanța capacitivă, cu $\frac{\pi}{2}$ înapoi. De aceea se consideră reactanța inductivă ca pozitivă, iar cea capacitivă ca negativă.

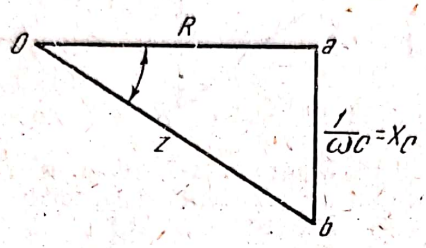


Fig. 9-18. Triunghiul impedanței circuitului cu rezistență și capacitate

Unghiul de decalaj dintre curent și tensiune este dat, prin tangenta lui, de relația

$$tg\,\varphi = -\frac{X_C}{R}. \qquad (9\text{-}37)$$

În aceste condiții, plecînd de la ipoteza că curentul în circuit este luat ca origine de fază [relația (9-33)], tensiunea la bornele circuitului este

$$u = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t - \varphi).$$

Dacă luăm tensiunea ca origine de fază, curentul din circuit ia forma

$$i = \sqrt{2}\,I \sin(\omega t + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \qquad (9\text{-}38)$$

în care valoarea eficace I este dată de relația (9-35), iar decalajul φ, în valoare absolută, de relația (9-37).

Exemplul 9-4. Un circuit compus dintr-o rezistență $R = 50\ \Omega$ și o capacitate de 60 μ F, este legat la o rețea de 220 V și 50 Hz. Se cere: *a*) impedanța circuitului; *b*) curentul în circuit; *c*) decalajul dintre curent și tensiune.

Soluția:

$$a)\ Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{50^2 + \left(\frac{10^6}{314 \cdot 60}\right)^2} = 72{,}9\ \Omega\ ;$$

$$b)\ I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{72{,}9} = 3{,}01\ \text{A}\ ;$$

$$c)\ tg\,\varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{53{,}07}{50} = 1{,}04,\ \text{deci}\ \varphi = 0{,}805\ \text{radiani}.$$

Curentul este în avans față de tensiunea aplicată cu $\varphi = 0{,}805$ radiani.

Scanned with OKEN Scanner

9-7. Circuit cu rezistență, inductanță și capacitate legate în serie

Să presupunem cazul cel mai general cînd circuitul conține o rezistență R, o inductanță L și o capacitate C legate în serie (fig. 9-19) și să presupunem că acest circuit este alimentat de o tensiune alternativă sinusoidală $u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$. Se cere să se determine valoarea curentului i care ia naștere în circuit.

Vom scrie că tensiunea u este egală cu suma căderilor de tensiune în cele trei receptoare

$$u = u_R + u_L + u_C$$

sau

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\, dt. \qquad (9\text{-}3)$$

Vectorial, ecuația precedentă devine

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C .$$

Căderea de tensiune U_R, componenta activă a tensiunii, este în fază

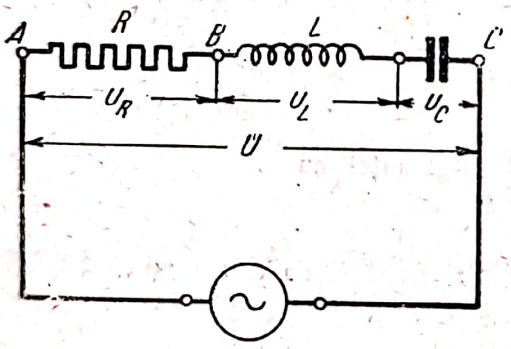


Fig. 9-19. Circuit cu rezistență, inductanță și capacitate

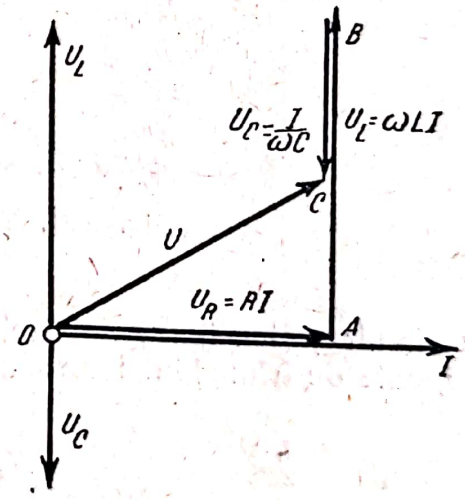


Fig. 9-20. Diagrama tensiunilor cînd $U_L > U_C$

cu curentul I; căderea U_L, componenta reactivă inductivă a tensiunii, este decalată în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de curent, iar căderea U_C, componenta reactivă capacitivă a tensiunii, este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului din circuit.

În fig. 9-20 am construit diagrama vectorială a căderilor de tensiune, luînd curentul ca origine de fază, în ipoteza că $U_L > U_C$.

Din triunghiul OAC rezultă

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} .$$

Ţinînd seama de relaţiile (9-4), (9-12) şi (9-31), obţinem

$$U = \sqrt{(R\,I)^2 + \left(\omega L\,I - \frac{I}{\omega C}\right)^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I\,Z. \tag{9-40}$$

În acest caz, impedanţa Z a circuitului este dată de relaţia

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ . \tag{9-41}$$

Ea rezultă direct din triunghiul impedanţei (fig. 9-21), care se obţine împărţind cu I laturile triunghiului tensiunii. Decalajul φ dintre curentul

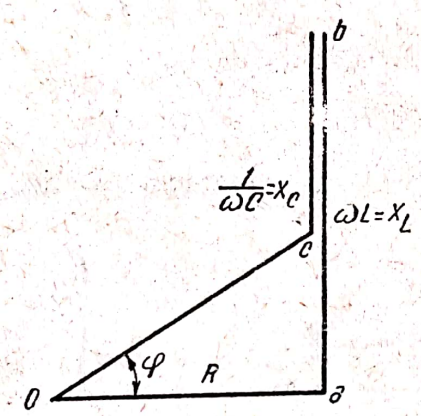


Fig. 9-21. Triunghiul impedanţei cu $X_L > X_C$

din circuit şi tensiunea aplicată se obţine printr-una din următoarele relaţii, date de triunghiul impedanţei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\ ; \tag{9-42}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\ ; \tag{9-43}$$

$$\sin\varphi = \frac{X_L - X_C}{Z} = \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot \tag{9-44}$$

În cazul examinat, cu $U_L > U_C$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, cu $X_L > X_C$, decalajul φ este pozitiv şi curentul din circuit este în întîrziere faţă de tensiunea aplicată.

Dacă $U_L = U_C$ sau $X_L = X_C$, decalajul φ este egal cu zero și curentul este în fază cu tensiunea la bornele circuitului. Este cazul rezonanței de tensiune pe care îl vom examina în par. 9-10. Dacă $U_L < U_C$ sau $X_L < X_C$, decalajul φ este negativ și curentul este în avans asupra tensiunii aplicate. Diagrama vectorială a tensiunilor corespunzătoare acestui caz este reprezentată în fig. 9-22, iar triunghiul impedanței în fig. 9-23.

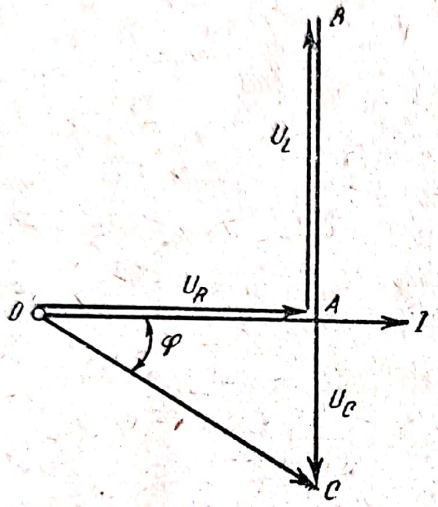


Fig. 9-22. Diagrama tensiunilor cînd $U_C > U_L$

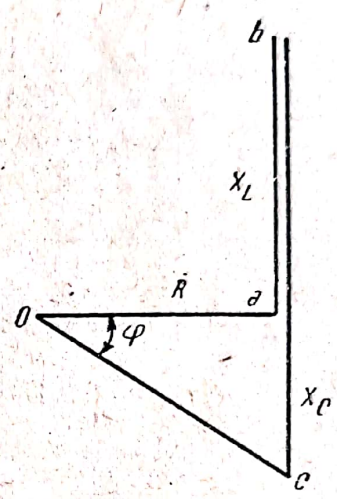


Fig. 9-23. Triunghiul impedanței cu $X_C > X_L$

Diagramele vectoriale au fost construite luîndu-se curentul ca origine de fază, adică plecîndu-se de la ipoteza că valoarea lui instantanee este dată de relația

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot$$

Se obține astfel pentru tensiunea aplicată la borne atunci cînd $U_L > U_C$ expresia

$$u = \sqrt{2} Z I \sin (\omega t + \varphi) = \sqrt{2} U \sin (\omega t + \varphi) \cdot$$

Dacă luăm însă ca origine de fază, faza tensiunii aplicate, adică dacă pornim de la expresia

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t,$$

curentul care apare în circuit, în același caz cînd $U_L > U_C$, este dat de relația

$$i = \frac{\sqrt{2} U}{Z} \sin (\omega t - \varphi) = \sqrt{2} I \sin (\omega t - \varphi), \qquad (9\text{-}45)$$

în care Z este dat de relația (9-41), iar decalajul φ, de relația (9-42). Unghiul φ poate avea valori pozitive sau negative, după cum X_L este mai mare sau mai mic decît X_C.

Exemplul 9-5. Un generator de curent alternativ a cărui tensiune este 380 V și frecvență 50 Hz, este legat pe un circuit format dintr-o rezistență $R = 40\ \Omega$, o inductanță $L = 0{,}51$ H și o capacitate $C = 29\ \mu$ F, legate în serie. Se cere să se calcu-

leze: *a*) reactanța inductivă a circuitului; *b*) reactanța capacitivă; *c*) impedanța; *d*) curentul în circuit; *e*) componenta activă U_R a tensiunii aplicate; *f*) componenta reactivă inductivă a tensiunii corespunzătoare inductanței L; *g*) componenta reactivă capacitivă a tensiunii, corespunzătoare capacității C; *h*) tg φ și decalajul φ între curent și tensiunea aplicată.

Soluția:

a) $X_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}51 \approx 160\ \Omega$.

b) $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 29} \approx 110\ \Omega$.

c) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{40^2 + (160 - 110)^2} \approx 64\ \Omega$.

d) $I = \frac{U}{Z} = \frac{380}{64} \approx 5{,}94$ A.

e), *f*) și *g*) $U_R = R\,I \approx 40 \cdot 5{,}94 = 238$ V; $U_L = X_L I = 160 \cdot 5{,}94 = 950$ V; $U_C = X_C I = 110 \cdot 5{,}94 = 654$ V.

h) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{50}{40} = 1{,}25$, $\varphi = 51^\circ 20'$.

9-8. Legarea în serie a mai multor rezistențe și reactanțe inductive și capacitive

Să analizăm cazul unui circuit de curent alternativ format din mai multe receptoare legate în serie, fiecare receptor dispunînd de cîte o rezistență și o reactanță inductivă sau capacitivă. Ne propunem să determinăm tensiunea la bornele circuitului cînd receptoarele sînt alimentate de un curent alternativ sinusoidal $i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$.

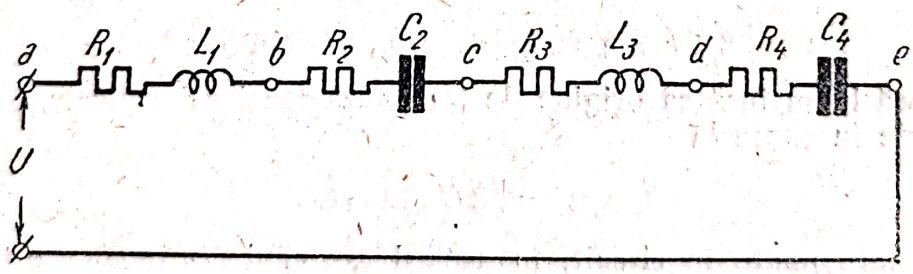


Fig. 9-24. Receptoare diferite, legate în serie

Să presupunem că circuitul (fig. 9-24) este compus din patru receptoare, montate între punctele *ab*, *bc*, *cd* și *de*. Prin trecerea curentului, în fiecare receptor se produce o cădere de tensiune activă în rezistența respectivă, în fază cu curentul din circuit, și o cădere de tensiune reactivă în inductanța sau capacitatea respectivă, cea dintîi decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului, iar a doua decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului.

Pentru fiecare receptor în parte, de pildă pentru receptorul cuprins între punctele *cd*, avem

$$U_3 = \sqrt{U_{R3}^2 + U_{L3}^2} \tag{9-46}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{X_{L3}}{R_3} \,. \tag{9-47}$$

Tensiunea totală U la bornele circuitului este dată de suma vectorială a tensiunilor la bornele receptoarelor (sau suma vectorială a tuturor componentelor active și reactive de tensiune din circuit), adică

$$\overline{U} = \overline{U_1} + \overline{U_2} + \overline{U_3} + \overline{U_4} \,.$$

Se obține astfel diagrama poligonală din fig. 9-25.

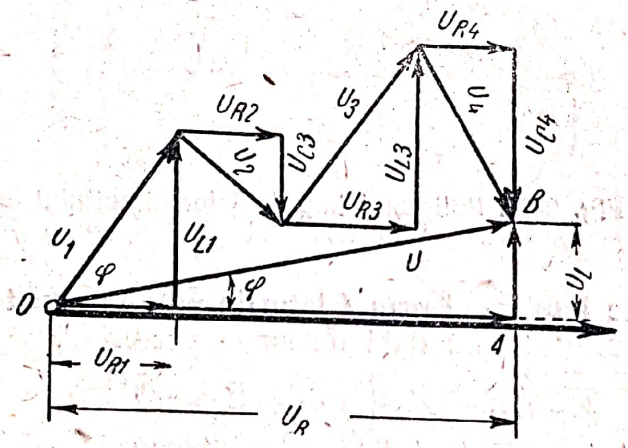


Fig. 9-25. Diagrama vectorială a tensiunilor din circuitul serie reprezentat în fig. 9-24

În cazul general a n receptoare legate în serie, tensiunea la bornele circuitului este

$$\overline{U} = \sum \overline{U}_k \,.$$

Valoarea eficace a tensiunii totale U a circuitului rezultă din triunghiul OAB a cărui catetă OA, egală cu *suma aritmetică* a componentelor active ale tensiunilor diverselor receptoare, reprezintă componenta activă a tensiunii circuitului și a cărui catetă AB, egală cu *suma algebrică* a componentelor reactive ale tensiunilor diverselor receptoare, reprezintă componenta reactivă a tensiunii circuitului.

Notînd cu R rezistența totală a circuitului dată de relația

$$R = \sum R_k$$

și cu X reactanța totală a circuitului dată de relația

$$X = \sum X_k \,,$$

avem

$$U = I\sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_k)^2} \quad . \tag{9-48}$$

Impedanţa întregului circuit este

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_k)^2} \quad . \tag{9-49}$$

În fig. 9-26 este reprezentat poligonul impedanţelor din circuit

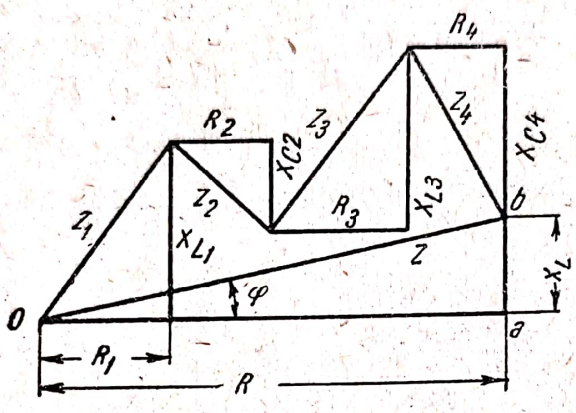


Fig. 9-26. Poligonul impedanţelor circuitului din fig. 9-24

care se poate obţine împărţind prin I laturile poligonului tensiunilor. Impedanţa totală a circuitului este dată de suma vectorială

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \cdots + \overline{Z}_n = \sum \overline{Z}_k \, ,$$

de unde rezultă că impedanţa totală este totdeauna mai mică decît suma aritmetică a impedanţelor receptoarelor.

Decalajul curentului faţă de tensiune rezultă din relaţia

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\sum X_k}{\sum R_k} \tag{9-50}$$

sau din relaţia

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad . \tag{9-51}$$

Dacă se cunoaşte tensiunea la bornele circuitului

$$u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$$

şi se cere curentul în circuit, valoarea lui este dată de relaţia

$$i = \sqrt{2}\, I \sin (\omega t - \varphi) \, ,$$

în care valoarea eficace I a curentului rezultă din relaţia (9-49)

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{(\sum R_k)^2 + (\sum X_k)^2}} \, , \tag{9-52}$$

iar decalajul φ, dintr-una din relaţiile (9-50) sau (9-51).

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 9-6 Cele patru receptoare din circuitul electric reprezentat în fig. 9-24 au următorii parametri: $R_1 = 6\ \Omega$, $L_1 = 0{,}048$ H, $R_2 = 4\ \Omega$, $C_2 = 636\ \mu$F, $R_3 = 3\ \Omega$, $L_3 = 0{,}0255$ H, $R_4 = 5\ \Omega$, $C_4 = 455\ \mu$F. Circuitul este alimentat cu o tensiune alternativă sinusoidală de 380 V şi 50 Hz. Să se determine: *a)* curentul din circuit; *b)* decalajul φ dintre curent şi tensiunea aplicată; *c)* tensiunile la bornele diverselor receptoare; *d)* decalajul dintre tensiunile receptoarelor şi curentul din receptoare.

Soluţia: a) Curentul este dat de relaţia $I = \frac{U}{Z}$, în care

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + (X_{1L} - X_{2C} + X_{3L} - X_{4C})^2}\ ,$$

$$X_{1L} = \omega L_1 = 314 \cdot 0{,}048 \approx 15\ \Omega\ ;\ X_{2C} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{10^6}{314 \cdot 636} \approx 5\ \Omega\ ;$$

$$X_{3L} = 314 \cdot 0{,}0255 = 8\ \Omega\ ;\ X_{4C} = \frac{10^6}{314 \cdot 554} = 7\ \Omega\ ;$$

$$Z = \sqrt{(6 + 4 + 3 + 5)^2 + (15 - 5 + 8 - 7)^2} = \sqrt{18^2 + 11^2} = 21{,}1\ \Omega\ ,$$

deci

$$I = \frac{380}{21{,}1} = 18\ \text{A}.$$

b) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sum X_k}{\sum R_k} = \frac{11}{18} = 0{,}611$, $\cos\varphi = \frac{\sum R_k}{Z} = \frac{18}{21{,}1} = 0{,}853$,

$$\varphi = 31^\circ 20'\ ;\ \sin\varphi = \frac{\sum X_k}{Z} = \frac{11}{21{,}1} = 0{,}521\ .$$

c) $U_1 = I Z_1 = 18 \cdot \sqrt{6^2 + 15^2} = 18 \cdot 16{,}15 = 290{,}7$ V.

$U_2 = 18 \cdot \sqrt{4^2 + (-5)^2} = 18 \cdot 6{,}403 = 115{,}25$ V.

$U_3 = 18 \cdot \sqrt{3^2 + 8^2} = 18 \cdot 8{,}544\ 153{,}8 =$ V.

$U_4 = 18 \cdot \sqrt{5^2 + (-7)^2} = 18 \cdot 8{,}602 = 154{,}8$ V.

d) $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_{1L}}{R_1} = \frac{15}{6} = 2{,}5$, $\varphi_1 = 68^\circ 10'$.

$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{X_{2C}}{R_2} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$, $\varphi_2 = -51^\circ 20'$.

$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{8}{3} = 2{,}667$, $\varphi_3 = 69^\circ 30'$.

$\operatorname{tg}\varphi_4 = -\frac{7}{5} = -1{,}4$, $\varphi_4 = -54^\circ 30'$.

Scanned with OKEN Scanner

9-9. Puterea instantanee și puterea medie în curent alternativ sinusoidal

Produsul dintre valorile instantanee ale tensiunii și curentului poartă numele de *valoarea instantanee* a puterii sau, mai pe scurt, *putere instantanee* și se notează cu p

$$p = u\,i\ .$$

În curent alternativ, cei doi factori ai puterii variind simultan, rezultă că puterea instantanee este o mărime variabilă, așa cum s-a arătat în treacăt, în par. 9-2, 9-3 și 9-5. Această situație conduce la necesitatea de a se adopta, ca putere în curent alternativ, *puterea medie* în timpul unei perioade, care corespunde energiei dezvoltate în timpul perioadei împărțită prin durata acesteia. Notăm această putere medie cu P.

Prin urmare, conform definiției puterea medie în curent alternativ este

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u\,i\,\mathrm{d}t\ . \qquad (9\text{-}53)$$

În cele ce urmează vom presupune că cei doi factori ai puterii instantanee sînt mărimi sinusoidale. În aceste condiții, vom determina cu ajutorul relației (9-53) expresia puterii medii pentru următoarele trei ipoteze asupra decalajului φ dintre curent și tensiune, care acoperă toate posibilitățile practice: cînd $\varphi = 0$, cînd $\varphi = \mp\frac{\pi}{2}$ și cînd $\varphi \neq 0$ și $\neq \mp\frac{\pi}{2}$.

a) După cum am arătat în par. 9-2, $\varphi = 0$ atunci cînd circuitul cuprinde practic numai rezistență, deci curentul este în fază cu tensiunea (fig. 9-2 și 9-3). În acest caz, conform relației (9-6) puterea instantanee este

$$p = 2\,U\,I\sin^2\omega t$$

și relația (9-53) devine

$$P = \frac{1}{T}2\,U\,I\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2\,U\,I}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\,\omega t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{2\,U\,I}{T}\cdot\frac{T}{2} = U\,I\,; \qquad (9\text{-}54)$$

deoarece

$$\int_0^T \cos 2\,\omega\,t\,\mathrm{d}t = 0\ .$$

Prin urmare, dacă curentul alternativ sinusoidal este în fază cu tensiunea care îl produce, puterea medie se exprimă, ca și puterea în curent continuu, prin produsul dintre tensiune și curent, ambele exprimate în valori eficace.

În fig. 9-2 puterea medie este reprezentată grafic prin înălțimea dreptunghiului cu baza T a cărui suprafață este egală cu suprafața limitată de curba puterii instantanee și de axa abscielor.

Un curent în fază cu tensiunea aplicată se numește *curent activ* sau *curent watat* și se notează cu I_a.

b) Curentul este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii atunci cînd circuitul conține numai reactanță inductivă (par. 9-3) sau cînd conține ambele reactanțe, însă $X_L > X_C$; el este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii cînd circuitul conține numai reactanță capacitivă (par. 9-5) sau cînd conține ambele reactanțe, însă $X_C > X_L$ In toate aceste cazuri, rezistența circuitului este presupusă neglijabilă.

După cum rezultă din relațiile (9-14) și (9-31), puterea instantanee poate fi pusă sub forma

$$p = \mp U I \sin 2\omega t$$

și relația (9-53) devine

$$P = \mp \frac{1}{T} U I \int_0^T \sin 2\omega t \, dt = 0 \quad . \qquad (9\text{-}55)$$

Prin urmare, *cînd curentul este decalat cu* $\mp \frac{\pi}{2}$ *față de tensiunea aplicată, puterea medie din circuit este nulă.* Această concluzie rezultă clar și din curbele de variație a puterii instantanee reprezentate în fig. 9-6 și 9-13.

Un curent decalat cu $\mp \frac{\pi}{2}$ față de tensiunea aplicată circuitului poartă numele de *curent reactiv* sau *curent dewatat* și se notează cu I_r. Cînd curentul reactiv este decalat în urma tensiunii, avem un *curent reactiv inductiv* sau, mai pe scurt, un *curent inductiv;* cînd curentul reactiv este decalat înaintea tensiunii, avem un *curent reactiv capacitiv,* mai pe scurt, un *curent capacitiv.*

c) Cînd circuitul cuprinde rezistență și reactanță, curentul este decalat cu un unghi oarecare $\mp \varphi$ față de tensiunea aplicată și puterea instantanee este dată de relația

$$p = u\,i = 2\,U I \sin \omega t \sin (\omega t \mp \varphi), \qquad (9\text{-}56)$$

în care semnul negativ se referă la cazul cînd în circuit predomină reactanța inductivă, iar semnul pozitiv, cînd predomină reactanța capacitivă.

Relația precedentă a puterii instantanee poate fi pusă sub forma

$$p = U I \cos \varphi - U I \cos (2\omega t \mp \varphi) \qquad (9\text{-}57)$$

și relația (9-53) a puterii medii devine

$$P = \frac{1}{T} U I \cos \varphi \int_0^T dt - \frac{1}{T} U I \int_0^T \cos (2\omega t \mp \varphi)\, dt = U I \cos \varphi \ , \qquad (9\text{-}58)$$

deoarece rezultatul celei de a doua integrale este nul.

Prin urmare, *puterea medie din circuit este egală cu produsul valorilor eficace ale tensiunii și curentului înmulțit cu factorul numeric* $\cos \varphi$.

Scanned with OKEN Scanner

Factorul $\cos\varphi$ poartă numele de *factor de putere* al circuitului și valoarea lui poate varia de la zero la ∓ 1.

Relația (9-58) este generală și se aplică și cazurilor particulare, examinate mai sus. Pentru $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ și obținem relația (9-54); pentru $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$ și obținem relația (9-55).

În fig. 9-27 sînt reprezentate diagramele tensiunii, curentului și puterii în cazul cînd curentul este decalat în urma tensiunii. Semnul pozitiv

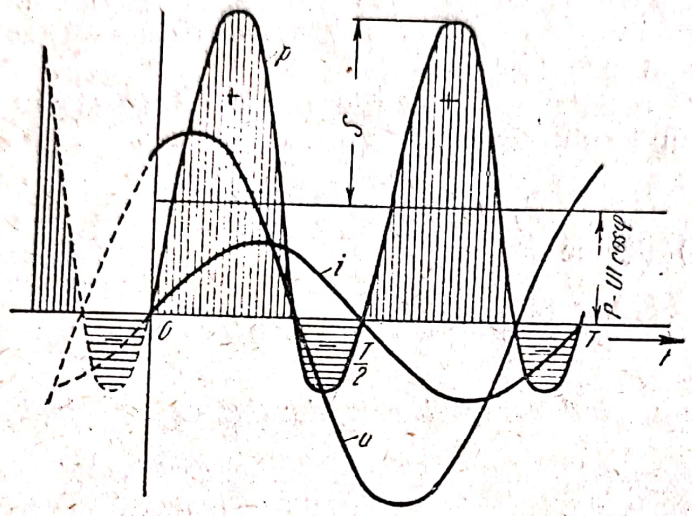


Fig. 9-27. Diagramele de variație ale tensiunii, curentului și puterii într-un circuit de curent alternativ

al puterii instantanee arată că circuitul lucrează în regim de receptor, adică primește energie de la rețea sau de la generator. Semnul negativ al puterii instantanee arată că circuitul lucrează ca generator, înapoind energie în rețeaua la care este conectat sau generatorului care îl alimentează. Aceste observații se aplică și diagramelor puterilor instantanee din fig. 9-2, 9-6 și 9-13.

d) În cazul unui circuit cu rezistență în care predomină reactanța inductivă, deci în care decalajul φ al curentului este în întîrziere (fig. 9-28*a*), curentul poate fi descompus în două componente: o componentă

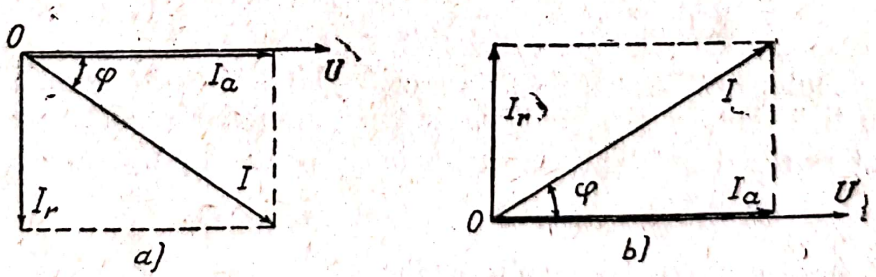


Fig. 9-28. Componentele curentului alternativ sinusoidal:
a) în cazul decalajului φ inductiv; *b*) în cazul decalajului φ capacitiv

activă $I_a = I\cos\varphi$, în fază cu tensiunea, și una reactivă inductivă $I_r = I\sin\varphi$, decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii. Dacă în circuitul cu re-

zistenţă predomină reactanţa capacitivă, adică φ este în avans (fig. 9-28b), componenta reactivă este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii aplicate, deci este o componentă capacitivă.

9-10. Puterea activă, reactivă şi aparentă

Să înmulţim curentul şi cele două componente ale sale din fig. 9-28 *a* şi 9-28 *b* cu valoarea tensiunii eficace U. Vom obţine (fig. 9-29*a* şi 9-29*b*) trei expresii ale puterii care au următoarele semnificaţii:

1) $P = P_a = U I_a = U I \cos \varphi$ care reprezintă *puterea activă* din circuit şi corespunde componentei active a curentului. Această putere se mai numeşte şi *putere watată* sau *putere reală* şi se măsoară în waţi sau în multipli acestuia kW şi MW.

Puterea activă este identică cu ceea ce, în par. precedent, am numit putere medie.

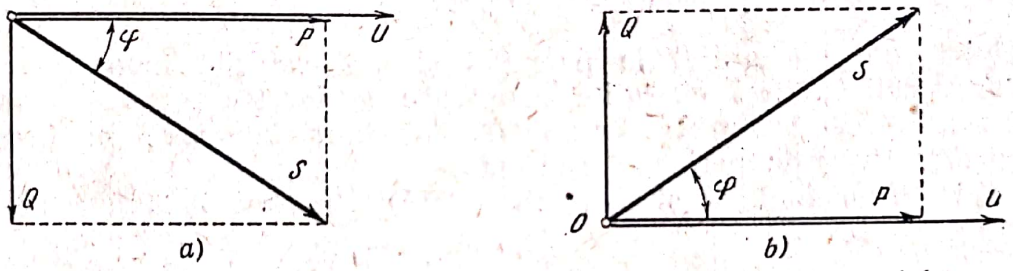


Fig. 9-29. Componentele puterii în curent alternativ sinusoidul:
a) cînd φ este inductiv; *b*) cînd φ este capacitiv

2) $Q = U I_r = U I \sin \varphi$ reprezintă *puterea reactivă* din circuit şi corespunde componentei reactive a curentului. Deoarece puterea medie dată de un curent decalat cu $\mp \frac{\pi}{2}$ faţă de tensiunea aplicată este nulă, puterea reactivă mai poartă şi denumirea de *putere fictivă* sau *putere dewatată* şi se măsoară în unitatea *volt-amper reactiv* (var) sau în multipli acestuia: kvar şi Mvar.

Unitatea var a fost propusă de savantul romîn Acad. *Prof. C. Budeanu* şi adoptată de Comisia Electronică Internaţională.

3) $S = UI$, reprezintă rezultanta puterilor active şi reactive din circuit şi corespunde curentului rezultant. Această putere se numeşte *putere aparentă* şi se măsoară în unitatea *volt-amper* (VA) sau în multipli acestuia: kVA şi MVA.

După cum rezultă din fig. 9-29a şi 9-29b, puterea aparentă, puterea activă şi puterea reactivă sînt legate prin relaţia

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \,. \qquad (9\text{-}60)$$

Prin urmare, puterea activă P şi cea reactivă Q pot fi privite drept componente ale puterii aparente S.

Componenta activă a curentului produce puterea activă din circuit. Componenta reactivă inductivă a curentului serveşte pentru crearea cîmpurilor magnetice iar puterea reactivă respectivă corespunde energiei magnetice necesare acestor cîmpuri. Componenta reactivă capacitivă a curen-

tului servește pentru crearea cîmpurilor electrice iar puterea respectivă corespunde energiei electrice necesare acestor cîmpuri.

Unghiul φ se consideră pozitiv cînd curentul din circuit este decalat în urma tensiunii și negativ cînd este decalat înaintea tensiunii aplicate circuitului.

Expresia puterii reactive

$$Q = S \sin \varphi = U I \sin \varphi \qquad (9\text{-}61)$$

arată că această putere este pozitivă și constituie o *putere reactivă inductivă* atunci cînd curentul este decalat în urma tensiunii și este negativă și constituie *o putere reactivă capacitivă,* cînd curentul este decalat înaintea tensiunii.

Din fig. 9-29 rezultă că factorul de putere al circuitului poate fi pus și sub forma

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \cdot \qquad (9\text{-}62)$$

După cum s-a arătat în par. 9-3 și 9-5, valorile instantanee ale puterilor reactive, deci energiile magnetice și electrice corespunzătoare acestor puteri, sînt funcții sinusoidale, a căror integrare în decursul unui număr întreg de perioade este nulă.

Utilizînd mărimile P și S, relația (9-56) a puterii instantanee devine

$$p = P - S \cos (2\omega t \mp \varphi) \qquad (9\text{-}63)$$

sau

$$p = P - p' , \qquad (9\text{-}64)$$

în care

$$p' = - S \cos (2\omega t \mp \varphi) \cdot \qquad (9\text{-}65)$$

Puterea p' reprezintă deci componenta alternativă a puterii instantanee, amplitudinea ei fiind puterea aparentă S. Din fig. 9-27 rezultă modul cum variază puterea instantanee p (ordonatele curbei p față de axa absciselor) și puterea alternativă p (ordonatele curbei p față de dreapta $P = UI \cos \varphi = \text{const}$).

Exemplul 9-7. Un generator de curent alternativ, cu o tensiune între borne de 220 V și o frecvență de 50 Hz, debitează pe un circuit cu o rezistență de 15 Ω și o inductanță de 0,0382 H. Să se determine puterea activă, reactivă și aparentă debitată de generator.

Soluția: Utilizăm formulele $P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$ și $S = UI$.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{\sqrt{15^2 + (314 \cdot 0{,}0382)^2}} = \frac{220}{\sqrt{15^2 + 12^2}} = \frac{220}{19{,}2} = 11{,}45 \text{ A} \cdot$$

Factorul de putere $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{15}{19{,}2} = 0{,}784$; $\sin \varphi = \sqrt{1 - 0{,}788^2} = 0{,}625$;

$$P = 220 \cdot 11{,}45 \cdot 0{,}781 = 1\,967 \text{ W} = 1{,}067 \text{ kW};$$

$$Q = 220 \cdot 11{,}45 \cdot 0{,}625 = 1\,574 \text{ var} = 1{,}574 \text{ kvar};$$

$$S = 220 \cdot 11{,}45 = 2\,519 \text{ VA} = 2{,}519 \text{ kVA} \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

9-11. Rezonanța tensiunilor

Fenomenul rezonanței tensiunilor apare în circuitele sau porțiunile de circuite de curent alternativ care au reactanțe inductive și capacitive legate în serie (fig. 9-30). Impedanța unui asemenea circuit este dată de relația

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \ ,$$

în care R reprezintă suma rezistențelor, X_L suma reactanțelor inductive și X_C suma reactanțelor capacitive din circuit.

La o tensiune U dată, curentul în circuit este

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot \qquad (9\text{-}66)$$

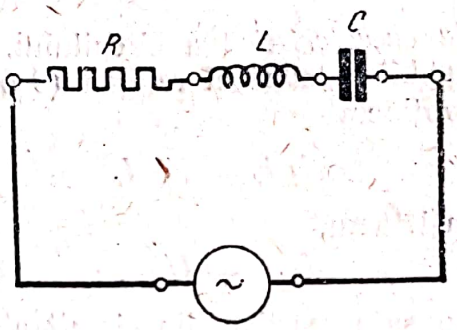


Fig. 9-30. Circuit cu rezistență, reactanță inductivă și reactanță capacitivă legate în serie

Într-un asemenea circuit rezonanța tensiunilor apare atunci cînd, prin variația parametrilor circuitului, se ajunge ca

$$(X_L - X_C) = 0$$

sau

$$X_L = X_C \cdot \qquad (9\text{-}67)$$

Prin urmare, la rezonanța tensiunilor realizată prin condiția $X_L = X_C$ impedanța circuitului, pe care o notăm cu Z_{rez}, atinge valoarea minimă

$$Z_{rez} = R \ ,$$

iar intensitatea eficace a curentului în circuit I_{rez} valoarea maximă

$$I_{rez} = \frac{U}{R} \ , \qquad (9\text{-}68)$$

ca și cum am avea un circuit de curent continuu.

Condiția de rezonanță, exprimată prin relația (9-67), se poate pune sub forma

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \ ,$$

de unde

$$\omega^2 CL = 1 \cdot \qquad (9\text{-}69)$$

Această condiție poate fi satisfăcută menținînd parametri L și C constanți și variind pulsația ω prin variația frecvenței f a tensiunii care alimentează circuitul. Pulsația de rezonanță, pe care o notăm cu ω_r, rezultă din relația precedentă.

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{9-70}$$

iar frecvența necesară este

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{9-71}$$

Relația

$$\frac{1}{\omega_r C} = \omega_r L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c \tag{9-72}$$

se numește *impedanța caracteristică* a circuitului.

Dacă înmulțim ambii membri ai relației (9-67) cu valoarea I_r a curentului din circuit, obținem

$$X_L I_r = X_C I_r$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$U_{Lrez} = U_{Crez}. \tag{9-73}$$

Cele două componente reactive din circuit ale tensiunii aplicate sînt egale și în opoziție de fază, cea inductivă decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în avans față de curent iar cea capacitivă, cu $\frac{\pi}{2}$ în întîrziere față de curent. Aceste

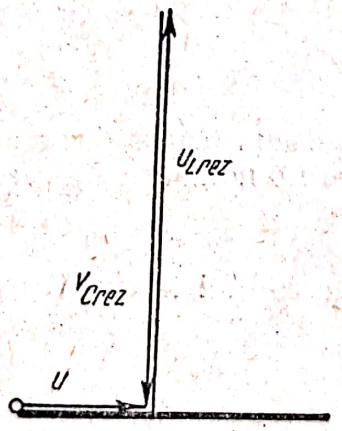


Fig. 9-31. Diagrama tensiunilor la rezonanță

două componente se anulează și rămîne numai componenta activă U_R a tensiunii aplicate, în fază cu curentul. Vom avea

$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_{Lrez}} - \overline{U_{Crez}} = \overline{U_R} = \overline{R I_{rez}}$$

și diagrama tensiunilor prezintă aspectul din fig. 9-31.

Raportul dintre tensiunea la bornele circuitului și oricare din tensiunile reactive este

$$\frac{U}{U_{Lrez}} = \frac{RI_{rez}}{X_L I_{rez}} = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{Z_c};$$

urmează că

$$U_{Lrez} = U\frac{X_L}{R} = U\frac{Z_c}{R}.$$

Cînd $Z_c > R$, tensiunea inductivă U_L și cea capacitivă U_C, egală cu ea, sînt de $\frac{Z_c}{R}$ ori mai mari decît tensiunea U aplicată la bornele circuitului. Prin urmare, la rezonanța de tensiune, în diferitele porțiuni ale circuitului pot să apară tensiuni mai mari decît tensiunea aplicată la bornele acestuia.

Dacă $Z_c \gg R$, avem

$$U_{Lrez} = -U_{Crez} \gg U$$

și tensiunile care apar la bornele inductanței și capacității pot atinge valori periculoase pentru izolația bobinelor și dielectricul condensatoarelor.

La rezonanță tensiunile U_L și U_C fiind egale și de semn contrar, rezultă că puterile instantanee corespunzătoare sînt, în orice moment, egale și de semn contrar, adică

$$p_L = -p_C.$$

Aceasta înseamnă că, odată cu variația curentului, energia cîmpului magnetic crește în contul descreșterii energiei cîmpului electric și reciproc. Puterea activă furnizată circuitului servește numai pentru acoperirea consumului de energie prin efect Joule-Lenz în rezistența activă a circuitului.

Energia maximă înmagazinată în cîmpul magnetic este, conform relației (7-45),

$$W_L = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L (\sqrt{2} I)^2 = L I^2, \qquad (9\text{-}74)$$

iar cea înmagazinată în cîmpul electric este, conform relației (5-23),

$$W_C = \frac{1}{2} C U_{mC}^2 = \frac{1}{2} C (\sqrt{2} U_C)^2 = C U_C^2 = \frac{1}{\omega^2 C} I^2. \qquad (9\text{-}75)$$

Condiția de rezonanță, dată de relația (9-69), poate fi obținută și dacă, ω și C fiind constante, se variază inductanța L pînă cînd

$$L = L_r = \frac{1}{\omega^2 C} \qquad (9\text{-}76)$$

sau, dacă ω și L fiind constante, se variază capacitatea C pînă cînd

$$C = C_r = \frac{1}{\omega^2 L}. \qquad (9\text{-}77)$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest din urmă procedeu se utilizează, pe scară largă, la reglajul aparatelor de radio al căror circuit oscilant este acordat, prin variația ca-

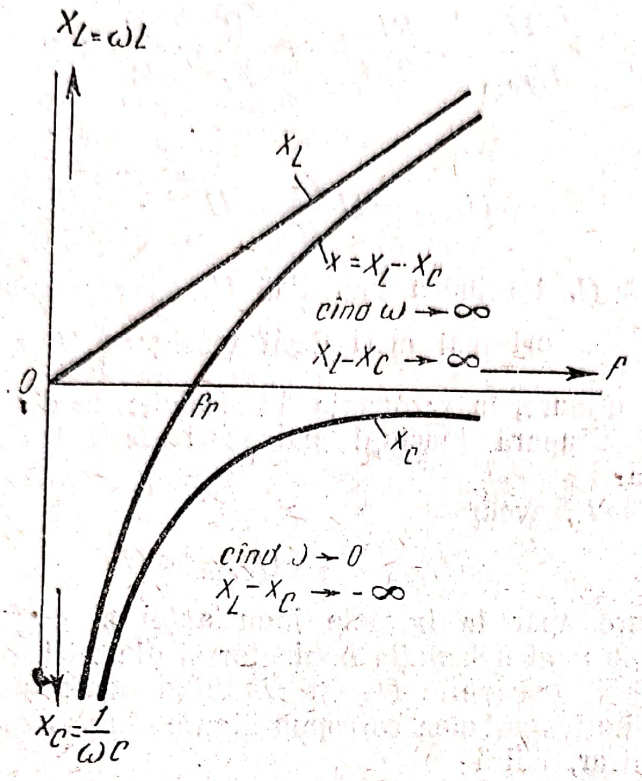


Fig. 9-32. Diagramele de variație ale reactanțelor în funcție de frecvența tensiunii aplicate

pacității unui condensator variabil, pînă cînd circuitul intră în rezonanță cu frecvența undei receptoare, a cărei amplificare se urmărește.

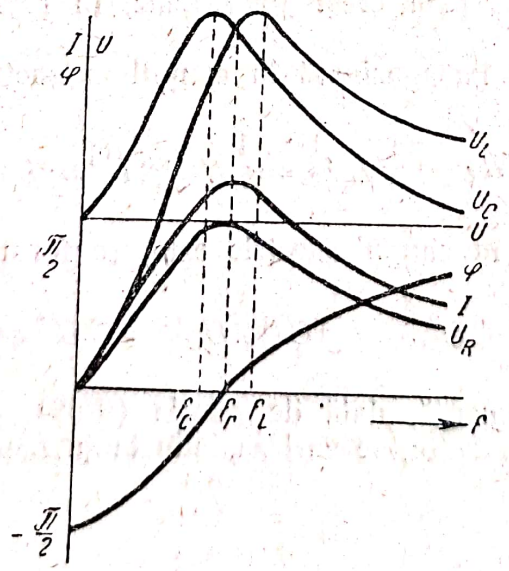


Fig. 9-33. Diagramele de variație ale tensiunilor, curentului și decalajului, în funcție de frecvența tensiunii aplicate

În fig. 9-32 sînt reprezentate curbele de variație ale reactanțelor în funcție de frecvența f a tensiunii aplicate iar în fig. 9-33, curbele de

variație ale tensiunilor, curentului și decalajului în funcție de aceeași frecvență.

În fig. 9-34 sînt redate curbele de variație ale curentului în funcție de frecvența f pentru două valori ale raportului $\frac{R}{Z_c}$ și anume pentru $\frac{R}{Z_c} = 0{,}1$ și $\frac{R}{Z_c} = 0{,}5$. Pentru a se încadra curbele în întregime în diagramă, frecvența a fost calculată în unități relative $\frac{f}{f_r}$ pînă la frecvența de rezo-

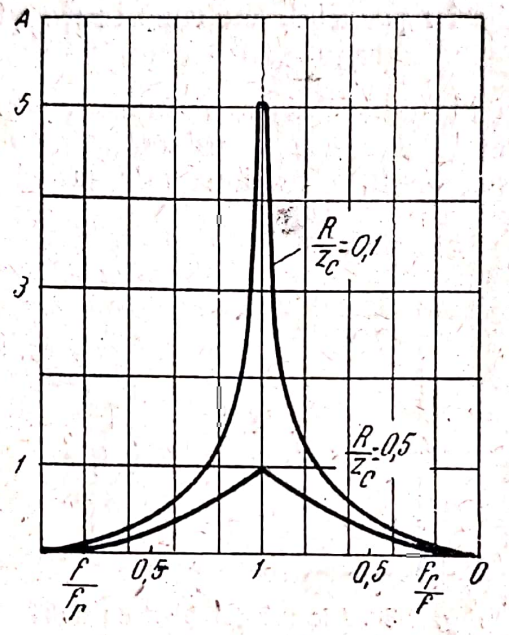


Fig. 9-34. Diagramele de variație ale curentului în funcție de frecvența tensiunii aplicate

nanță f_r și în unități relative $\frac{f_r}{f}$ dincolo de frecvența de rezonanță. Din curbe se vede că cu cît raportul $\frac{R}{Z_c}$ este mai mic, cu atît valoarea maximă a curentului de rezonanță este mai mare, deci cu atît fenomenul rezonanței se manifestă mai puternic și în limite ale frecvențelor mai strînse.

Exemplul 9-8. Un generator de curent alternativ alimentează un circuit electric cu o tensiune de 220 V și 50 Hz. Circuitul are o rezistență de 2 Ω, o capacitate de 100 μF și o inductanță variabilă legate în serie. Să se determine: a) valoarea inductanței pentru care apare în circuit fenomenul rezonanței; b) curentul de rezonanță; c) tensiunea inductivă U_L și cea capacitivă U_C și d) energia înmagazinată în cîmpurile electrice și magnetice respective.

Soluția: a) Se aplică relația (9-76),

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{10}{314^2 \cdot 100} = 0{,}1014 \text{ H} = 101{,}4 \text{ mH};$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{2} = 110$ A ;

c) $U_L = \omega L I = 314 \cdot 101{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \approx 2\,502$ V,

$U_C = \frac{1}{\omega C} I = \frac{10^6}{314 \cdot 100} \cdot 110 \approx 3\,502$ V ;

d) $W_L = L I^2 = 101{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 110^2 \approx 1\,226{,}9$ J ,

$W_C = C U_C^2 \approx 1\,226{,}9$ J.

9-12. Circuite în paralel, cu rezistențe și reactanțe legate în serie

Să examinăm cazul unui circuit complex compus din două ramuri legate în paralel, formate din cîte o rezistență și o inductanță legate în serie (fig. 9-35), alimentat cu o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t .$$

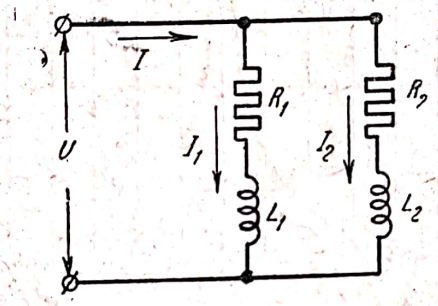


Fig. 9-35. Circuit complex cu două ramuri în paralel

Curenții care apar în cele două ramuri ale circuitului sînt dați de relațiile

$$i_1 = \sqrt{2}\, I_1 \sin (\omega t - \varphi_1)$$

și

$$i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \sin (\omega t - \varphi_2),$$

în care valorile eficace I_1 și I_2 sînt

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} . \tag{9-78}$$

Impedanțele Z_1 și Z_2 ale celor două ramuri sînt date respectiv de relațiile

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}$$

și

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2} .$$

Valorile inverse ale impedanțelor, adică mărimile $\frac{1}{Z_1}$ și $\frac{1}{Z_2}$ se nu-

mesc *admitanţele* circuitelor respective şi se notează cu literele Y_1 şi Y_2, în general cu Y.

Prin urmare, relaţiile (9-78) devin

$$I_1 = Y_1 U \quad \text{şi} \quad I_2 = Y_2 U \cdot \tag{9-79}$$

Decalajele inductive φ_1 şi φ_2 ale curenţilor din ramuri faţă de tensiunea aplicată rezultă din expresiile tangentelor respective

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{L1}}{R_1} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_{L2}}{R_2} \cdot$$

Aplicînd legea întîia a lui Kirchhoff valorilor instantanee ale curenţilor unuia din nodurile circuitului complex, se obţine valoarea instantanee a curentului total din porţiunea de circuit neramificat

$$i = i_1 + i_2 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t - \varphi_2) = \tag{9-80}$$
$$= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi) \cdot$$

Valoarea eficace I a curentului total din relaţia precedentă se poate determina grafic construindu-se diagrama vectorială din fig. 9-36, în care tensiunea, comună celor două circuite în paralel, a fost luată ca origine de fază.

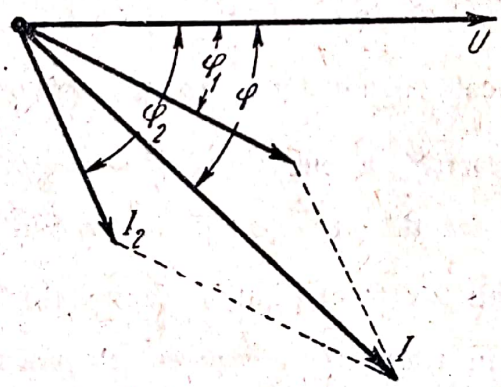


Fig. 9-36. Diagrama vectorială a circuitului din fig. 9-34.

Tot din diagramă, se poate obţine pe cale grafică şi decalajul φ al curentului total faţă de tensiunea aplicată. După cum se vede, decalajul φ este inductiv.

Analitic, curentul I se determină observînd, din diagrama vectorială (fig. 9-36), că

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \tag{9-81}$$

iar unghiul φ din relaţia

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2} \cdot \tag{9-82}$$

Scanned with OKEN Scanner

Metoda analitică pentru determinarea curentului I și a decalajului φ devine greoaie atunci cînd avem de-aface cu un număr mare de ramuri în paralel. Calculul se simplifică însă considerabil dacă folosim admitanțele în locul impedanțelor.

În acest scop, observăm că în fiecare ramură în paralel a circuitului curentul respectiv este format din două componente: una *activă*, în fază cu tensiunea aplicată, și una *reactivă*, decalată cu $\frac{\pi}{2}$ față de tensiunea aplicată.

Astfel, în cazul examinat mai sus componenta activă a curentului din prima ramură este dată de relația

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = \frac{U}{Z_1} \cdot \frac{R_1}{Z_1} = U \frac{R_1}{Z_1^2} = U G_1 , \qquad (9\text{-}83)$$

în care mărimea $G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}$ se numește *conductanța* ramurii respective a circuitului.

La fel se obține componenta activă a curentului din cea de a doua ramură care este dată de relația

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = U G_2 ,$$

în care $G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}$ este conductanța acestei ramuri a circuitului.

Componenta reactivă a curentului din prima ramură, care conține inductanța L_1, este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii aplicate. Dacă în loc de inductanță circuitul ar fi conținut o capacitate, componenta reactivă a curentului ar fi fost în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de tensiunea aplicată. Prin urmare, componenta reactivă a tensiunii din această ramură este

$$I_{r1} = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{Z_1} \cdot \frac{X_1}{Z_1} = U \frac{X_1}{Z_1^2} = U B_1 . \qquad (9\text{-}84)$$

Mărimea $B_1 = \frac{X_1}{Z_1^2}$ se numește *susceptanța* primei ramuri de circuit.

La fel se obține componenta reactivă a curentului din al doilea circuit în paralel, care este dată de relația

$$I_{r2} = I_2 \sin \varphi_2 = U B_2 ,$$

în care $B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2}$ este susceptanța acestui circuit.

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 9-37 am reprezentat diagrama curenţilor I_1 şi I_2 şi componentele lor active şi reactive. După cum rezultă din diagramă,

$$I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{r1}^2} = U\sqrt{G^2{}_1 + B^2{}_1} \qquad (9\text{-}85)$$

şi

$$I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_{r2}^2} = U\sqrt{G_2^2 + B_2^2}\,. \qquad (9\text{-}86)$$

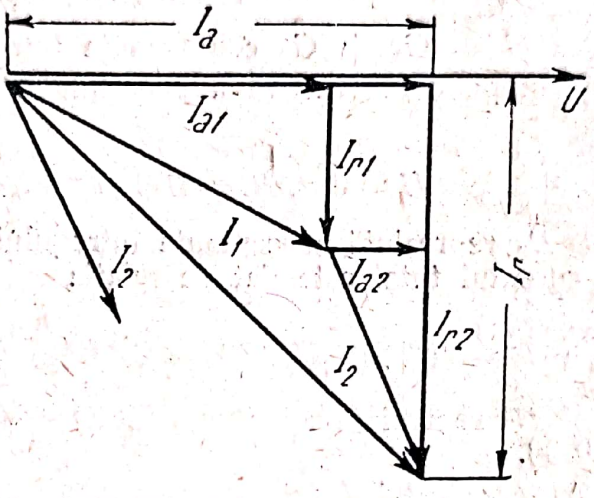


Fig. 9-37. Diagrama vectorială a curenţilor şi a componentelor acestora, corespunzătoare circuitului din fig. 9-35

Din relaţiile (9-79), (9-85) şi (9.86) rezultă că

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} \quad \text{şi} \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}\,. \qquad (9\text{-}87)$$

Prin urmare, admitanţa, conductanţa şi susceptanţa dintr-un circuit sînt

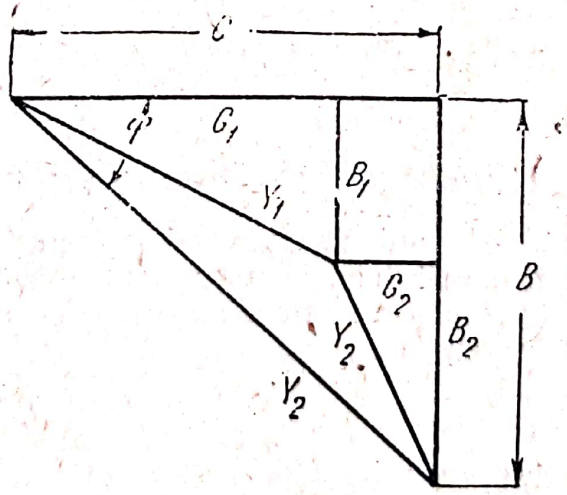


Fig. 9-38. Triunghiul admitanţei circuitului din fig. 9-35

legate între ele ca laturile unui triunghi dreptunghic. Un asemenea triunghi se numeşte *triunghiul admitanţei* circuitului.

În fig. 9-38 au fost reprezentate triunghiurile admitanțelor celor două ramuri în paralel examinate mai sus. Aceste triunghiuri se pot deduce din triunghiurile curenților (fig. 9-37) prin împărțirea laturilor acestora cu tensiunea U.

După cum rezultă din fig. 9-37, componenta activă a curentului total este dată de ecuația

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = UG_1 + UG_2 = U(G_1 + G_2) = UG,$$

în care am notat cu $G = G_1 + G_2$ conductanța întregului circuit.

De asemenea, componenta reactivă a curentului total este dată de ecuația

$$I_r = I_{r1} + I_{r2} = UB_1 + UB_2 = U(B_1 + B_2) = UB,$$

în care $B = B_1 + B_2$ reprezintă susceptanța întregului circuit.

Prin urmare, curentul total este dat de relația

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{(UG)^2 + (UB)^2} = U\sqrt{G^2 + B^2} = UY \qquad (9\text{-}88)$$

în care $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ reprezintă admitanța întregului circuit, așa cum rezultă și din fig. 9-38.

Decalajul φ al curentului I față de tensiunea aplicată este dat de relația

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{G}$$

și acest decalaj este în întîrziere.

Puterea activă a circuitului este

$$P = UI_a = U \cdot UG = U^2 G; \qquad (9\text{-}89)$$

puterea reactivă

$$Q = UI_r = U \cdot UB = U^2 B \qquad (9\text{-}90)$$

și puterea aparentă,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2\sqrt{G^2 + B^2} = U^2 Y. \qquad (9\text{-}91)$$

În cazul general al unui circuit avînd n ramuri în paralel, fiecare ramură compusă dintr-o rezistență și o reactanță inductivă sau capacitivă, curentul total se determină prin cele două componente ale sale, componenta activă dată de relația

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} + \cdots + I_{an} = \sum I_{ak} = U\sum G_k \qquad (9\text{-}92)$$

și componenta reactivă dată de relația

$$I_r = I_{r1} + I_{r2} + \cdots + I_{rn} = \sum I_{rk} = U\sum B_k. \qquad (9\text{-}93)$$

Valoarea curentului total este dată de ecuația

$$I = \sqrt{(\sum I_{ak})^2 + (\sum I_{rk})^2} = U\sqrt{(\sum G_k)^2 + (\sum B_k)^2}, \qquad (9\text{-}94)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar unghiul de decalaj φ, dintre curentul total şi tensiunea aplicată circuitului, rezultă din expresia

$$tg\,\varphi = \frac{I_r}{I_a} = \frac{\sum B_k}{\sum G_k} \cdot \qquad (9\text{-}95)$$

În relaţiile de mai sus trebuie să ţinem seama că în ramurile în care reactanţa este capacitivă, componenta reactivă a curentului este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de tensiunea aplicată, deci susceptanţa $B_C = -\frac{X_C}{Z^2}$ este negativă. Prin urmare, $\sum B_k$ poate fi pozitivă sau negativă sau, potrivit relaţiei (9-95), curentul total în întîrziere sau în avans faţă de tensiunea aplicată după cum predomină, în ramurile în paralel ale circuitului, susceptanţele inductive sau cele capacitive.

Dacă notăm cu B_L susceptanţa inductivă totală a circuitului (suma susceptanţelor inductive ale ramurilor în paralel) şi cu B_C, susceptanţa capacitivă a circuitului (suma susceptanţelor capacitive ale ramurilor în paralel), avem: $\sum B_k = B_L - B_C$. În aceste condiţii, cînd $B_L > B_C$, $tg\,\varphi > 0$ şi curentul este defazat în urma tensiunii aplicate (decalaj inductiv), iar cînd $B_C > B_L$, $tg\,\varphi < 0$ şi curentul este defazat înaintea tensiunii aplicate (decalaj capacitiv).

Exemplul 9-9. Se dă circuitul cu două ramuri în paralel din fig. 9-35, în care $R_1 = 2\ \Omega$, $X_{L_1} = 4\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $X_{L_2} = 5\ \Omega$. Circuitul este alimentat cu o tensiune alternativă sinusoidală de 220 V. Se cere: *a*) curenţii I_1 şi I_2 din ramurile în paralel şi curentul total I; *b*) unghiurile de decalaj dintre curenţi şi tensiunea aplicată şi *c*) puterile active şi reactive din circuit.

Soluţia: a) Se aplică relaţiile (9-85), (9-86) şi (9-88), în care

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{2}{2^2 + 4^2} = 0{,}1 \text{ siemens (S)}; \quad B_1 = \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = \frac{4}{20} = 0{,}2\ \text{S},$$

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = 0{,}224\ \text{S} \cdot$$

$$I_1 = U Y_1 = 220 \cdot 0{,}224 = 49{,}28\ \text{A} \cdot$$

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{3}{3^2 + 5^2} = \frac{3}{34} = 0{,}0882\ \text{S}; \quad B_2 = \frac{X_{L2}}{Z_2^2} = \frac{5}{34} = 0{,}147\ \text{S} \cdot$$

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2} = \sqrt{0{,}0882^2 + 0{,}147^2} = 0{,}1714\ \text{S} \cdot$$

$$I_2 = U Y_2 = 220 \cdot 0{,}1714 = 37{,}71\ \text{A} \cdot$$

Conductanţa întregului circuit $G = G_1 + G_2 = 0{,}1 + 0{,}0882 = 0{,}1882\ \text{S} \cdot$

Scanned with OKEN Scanner

Susceptanța întregului circuit $B = B_1 + B_2 = 0{,}2 + 0{,}147 = 0{,}347$ S.

Admitanța întregului circuit $Y = \sqrt{G^2 + B^2} =$

$$= \sqrt{0{,}1882^2 + 0{,}347^2} = 0{,}3\,947 \text{ S}.$$

$$I = 220 \cdot 0{,}3946 = 86{,}83 \text{ A}.$$

b) Decalajul curenților din circuit față de tensiunea aplicată este dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{B_k}{G_k}.$$

Vom avea

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2; \quad \varphi_1 = 63^\circ\,26'.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{0{,}147}{0{,}0882} = 1{,}644; \quad \varphi = 58^\circ\,40'.$$

Decalajul curentului total față de tensiune este dat de relația (9-89)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_1 + B_2}{G_1 + G_2} = \frac{0{,}2 + 0{,}147}{0{,}1 + 0{,}0882} = \frac{0{,}347}{0{,}1882} = 1{,}842; \quad \varphi = 61^\circ\,30'.$$

c) $P = U^2 G = 220^2\, 0{,}1882 = 9\,108$ W $\approx 9{,}11$ kW.

$Q = U^2 B = 220^2\, 0{,}347 = 16\,794{,}8$ var $\approx 16{,}8$ kvar.

$S = U^2 Y = 220^2\, 0{,}3947 = 19\,103{,}5$ VA $\approx 19{,}1$ kVA.

9-13. Rezonanța curenților

Fenomenul rezonanței curenților apare în circuitele de curent alternativ cu ramuri în paralel în care în unele ramuri reactanța este inductivă iar în alte ramuri reactanța este capacitivă.

Într-un asemenea circuit, curentul total în porțiunea neramificată a circuitului este dat de relația

$$I = UY,$$

în care admitanța totală a circuitului Y este

$$Y = \sqrt{(\Sigma G)^2 + (\Sigma B)^2}$$

iar decalajul dintre curent și tensiunea aplicată poate fi obținut din expresia tangentei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Sigma B}{\Sigma G}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să examinăm cazul unui circuit cu două ramuri în paralel (fig. 9-39), primul avînd rezistența R_1 și reactanța inductivă X_{L1}, cel de al doilea rezistența R_2 și reactanța capacitivă X_{2C} În acest caz, susceptanțele

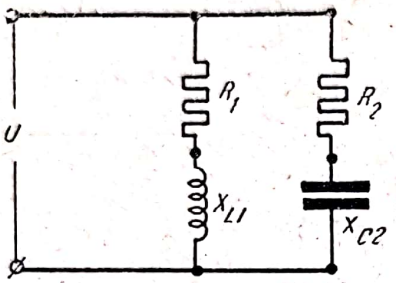


Fig. 9-39. Circuit complex cu una din ramuri cu reactanță inductivă, a doua cu reactanță capacitivă

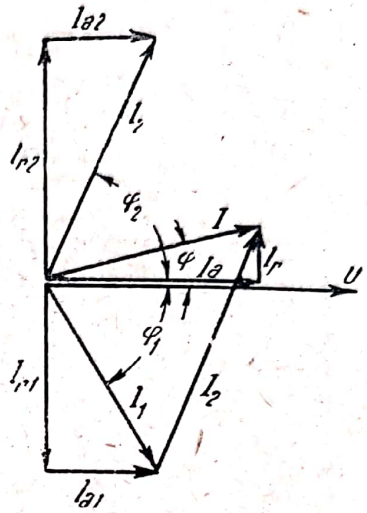


Fig. 9-40. Diagrama vectorială a curenților cînd $B_L < B_C$

B_L și B_C au semne contrarii și anume, în diagramele curenților și în poligonul admitanțelor B_L este pozitiv iar B_C, negativ. În consecință

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B_L - B_C}{G} \quad . \qquad (9\text{-}96)$$

Urmează că decalajul φ este negativ atunci cînd $B_L < B_C$ (fig.

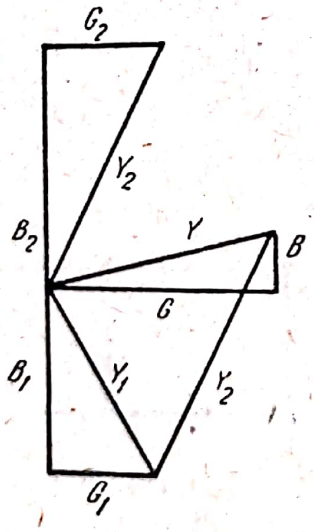


Fig. 9-41. Poligonul conductanțelor corespunzător diagramei din fig. 9-40

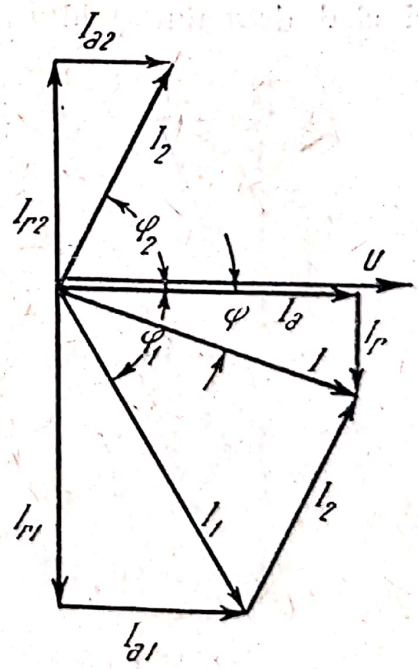


Fig. 9-42. Diagrama vectorială a curenților, cînd $B_L > B_C$

9-40), este pozitiv atunci cînd $B_L > B_C$ (fig. 9-42) și, în fine, este zero atunci cînd $B_L = B_C$ (fig. 9-44). În figurile 9-41, 9-43 și 9-45 sînt

reprezentate poligoanele conductanţelor corespunzătoare, cazurilor $B_L < B_C$, $B_L > B_C$ şi $B_L = B_C$.

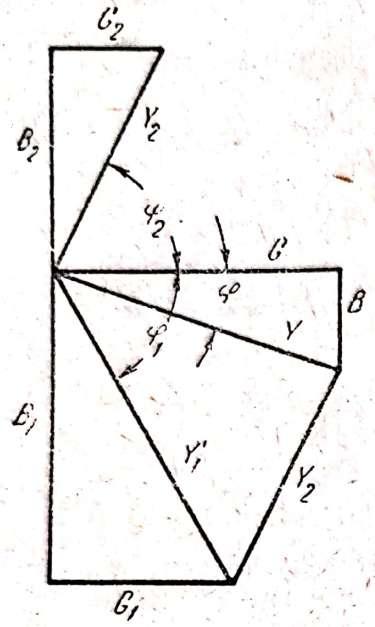


Fig. 9-43. Poligonul conductanţelor corespunzător diagramei din fig. 9-42

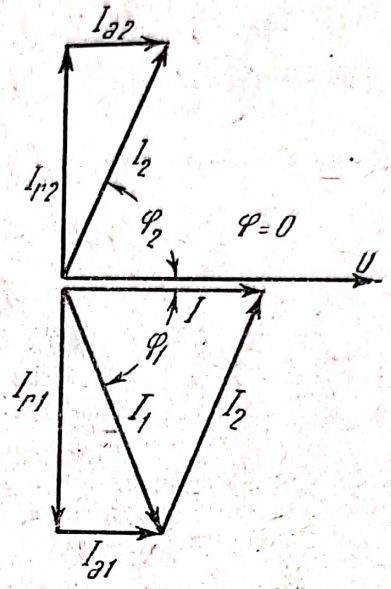


Fig. 9-44. Diagrama vectorială a curenţilor, cînd $B_L = B_C$

Fenomenul rezonanţei curenţilor din circuit apare atunci cînd, variind parametri circuitului, ajungem la egalitatea

$$B_L = B_C, \tag{9-97}$$

deci cînd decalajul φ al curentului I este zero.

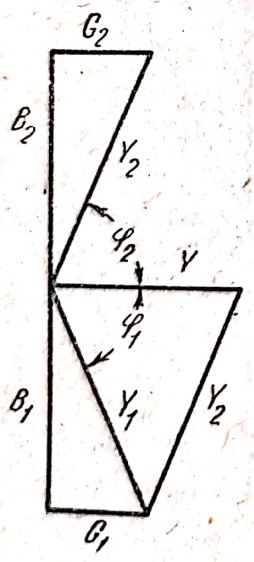


Fig. 9-45. Poligonul conductanţelor corespunzător diagramei din fig. 9-44

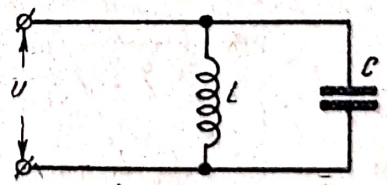


Fig. 9-46. Circuitul complex cu $R_1 = R_2 \approx 0$

Curenţii reactivi, inductivi şi capacitivi ai circuitului fiind în opoziţie de fază, iar la rezonanţă fiind şi egali între ei, vom avea

$$I_L = -I_C,$$

deci

$$I_L + I_C = 0$$

și curentului total din circuit este

$$I = I_a = UG = U(G_1 + G_2)\cdot$$

Ținînd seama că

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} \quad \text{și} \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2},$$

rezultă că, atunci cînd rezistențele R_1 și R_2 sînt reduse, curentul total I este mic, în timp ce curenții reactivi din circuit

$$I_{r1} = I_L = -I_{r2} = -I_C$$

care sînt dați de relațiile

$$I_{r1} = UB_1 = \frac{U \cdot X_L}{Z_1^2}$$

și

$$I_{r2} = UB_2 = \frac{U \cdot X_C}{Z_2^2},$$

pot atinge valori importante cînd reactanțele circuitului sînt mari în raport cu rezistențele.

Dacă $R_2 = R_1 \approx 0$ (fig. 9-46), rezonanța curenților apare cînd

$$\omega^2 LC = 1,$$

adică în aceleași condiții ca și rezonanța tensiunilor în circuitele în care L și C sînt legate în serie. Într-adevăr, dacă $R_2 = R_1 \approx 0$ avem

$$B_L = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{\omega L}{0 + (\omega L)^2} = \frac{1}{\omega L}$$

și

$$B_C = \frac{X_C}{Z_2^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{0 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \omega C\cdot$$

Prin urmare, ținînd seama de condiția rezonanței dată de relația (9-97), rezultă că

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C,$$

de unde

$$\omega^2 LC = 1\cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se dă L și C, rezonanța are loc atunci cînd pulsația atinge valoarea

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{9-98}$$

adică atunci cînd frecvența este

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{9-99}$$

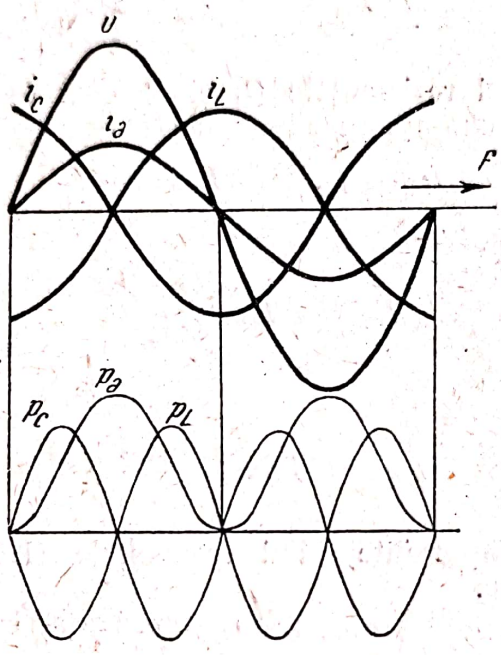


Fig. 9-47. Diagramele de variație ale curenților, puterilor și tensiunii, cînd R_1 și $R_2 \neq 0$

În aceste relații ω_r este pulsația de rezonanță iar f_r frecvența de rezonanță.

În fig. 9-47 sînt reprezentate diagramele de variație ale curenților,

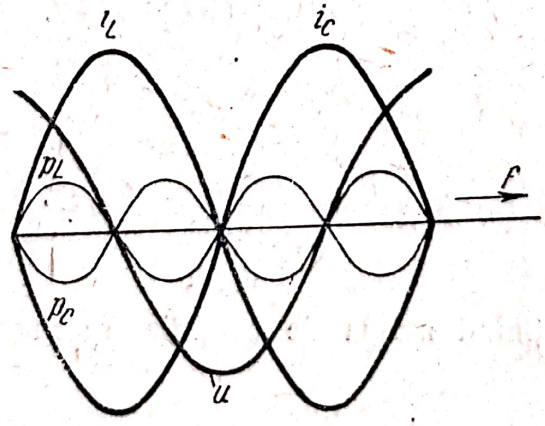


Fig. 9-48. Diagramele de variație ale curenților, puterilor și tensiunii cînd $R_1 = R_2 \approx 0$

puterii și tensiunilor în funcție de frecvența tensiunii aplicate în cazul cînd rezistențele R_1 și R_2 sînt diferite de zero, iar în fig. 9-48 sînt re-

prezentate aceleași diagrame, în cazul cînd $R_1 = R_2 \approx 0$. În acest din urmă caz avem

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = 0 \quad \text{și} \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = 0$$

și conductanța circuitului este nulă $G = G_1 + G_2 = 0$.

Componenta activă a curentului total

$$I_a = UG = 0$$

este și ea nulă și, deoarece

$$B = B_L - B_C = 0,$$

urmează că admitanța circuitului

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = 0,$$

iar impedanța

$$Z = \frac{1}{Y} = \infty .$$

Prin urmare, cînd $R_1 = R_2 \approx 0$ curentul total I la rezonanță este nul

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

deși în ramurile în paralel există curenții $I_L = UB_L$ și $I_C = UB_C$, egali și în opoziție de fază (fig. 9-49). Propriu-zis în cele două circuite

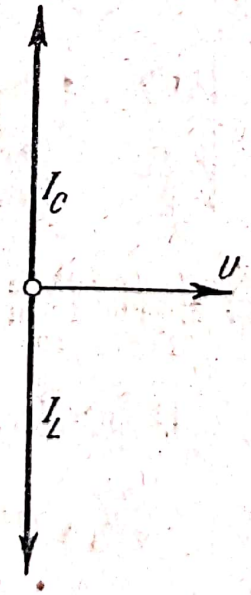


Fig. 9-49. Diagrama curenților la rezonanță, cînd $R_1 = R_2 \approx 0$

în paralel circulă același curent $I_1 = I_2 = I_L = I_C$. Ele constituie un circuit oscilant unic, compus dintr-o inductanță legată în serie cu o capa-

citate (vezi par. 9-14). La rezonanță puterile reactive Q_L și Q_C sînt egale și de semn contrar, deoarece

$$Q_L = U^2 B_L$$

și

$$Q_C = U^2 B_C$$

și susceptanțele B_L și B_C sînt egale și de semn contrar.

Rezultă că energia maximă înmagazinată în cîmpul magnetic al inductanței este egală cu energia maximă înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului. Deci între cele două cîmpuri magnetic și electric ale

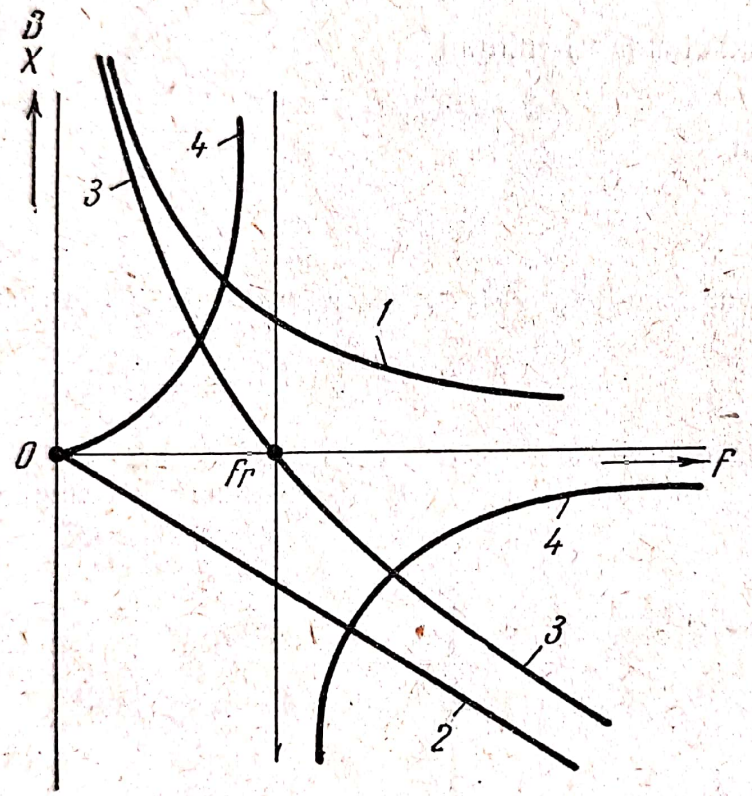


Fig. 9-50. Diagramele de variație ale reactanțelor și susceptanțelor circuitului din fig. 9-45, cînd $R_1 = R_2 \approx 0$

sistemului are loc un schimb de energie, ale cărei valori maxime sînt date de relațiile

$$W_L = L I_1^2 \quad \text{și} \quad W_C = C U^2 = \frac{1}{\omega^2 \cdot C} I_2^2 , \qquad (9\text{-}100)$$

în care

$$W_L = W_C .$$

Dacă R_1 și $R_2 \neq 0$, energia primită de circuit se consumă prin efect Joule-Lenz în rezistențele R_1 și R_2. Dacă $R_1 = R_2 \approx 0$, energia furnizată

circuitului este zero și în circuit nu există decît energie oscilantă între cîmpul magnetic al inductanței și cel electric al condensatorului a cărei valoare maximă este dată de relația (9-100). Cînd $u = \sqrt{2}U$ și $i_2 = i_1 = 0$, întreaga energie din circuit este concentrată în cîmpul electric al condensatorului. Cînd $i_2 = i_1 = \sqrt{2}I_1 = \sqrt{2}I_2$ și $u = 0$, întreaga energie este concentrată în cîmpul magnetic al inductanței.

În fig. 9-50 sînt reprezentate curbele reactanțelor și susceptanțelor circuitului din fig. 9-46, în care $R_1 = R_2 \approx 0$, în funcție de frecvența tensiunii aplicate. Se vede că susceptanța inductivă are forma unei hiperbole echilaterale asimptotă la axele de coordonate (curba *1*), căci

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi f L}$$

variază invers proporțional cu frecvența. Susceptanța capacitivă

$$B_C = \omega C = 2\pi f C$$

variind proporțional cu frecvența are forma unei linii drepte care trece prin originea axelor de coordonate și este situată sub axa absciselor (curba *2*), căci valorile susceptanței capacitive sînt tot timpul negative. Susceptanța întregului circuit este reprezentată prin curba *3*, dată de suma algebrică a ordonatelor curbelor *1* și *2*, căci

$$B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C.$$

Curba *3* intersectează axa absciselor în punctul corespunzător frecvenței de rezonanță f_r.

Reactanța X a întregului circuit fiind, în cazul considerat ($R_1 = R_2 \approx 0$), o mărime inversă susceptanței B, ea are forma curbelor *4* și *4'*, la frecvența de rezonanță devenind infinită. La o altă scară a absciselor aceleași curbe reprezintă variația susceptanțelor circuitului în funcție de pulsația tensiunii aplicate.

Exemplul 9-10. O bobină, a cărei inductanță este $L = 2$ mH și a cărei rezistență este neglijabilă, este legată în paralel cu o capacitate $C = 20\,\mu$F. La bornele comune se aplică o tensiune alternativă sinusoidală de 10 V. Să se determine: *a*) valoarea frecvenței pentru care apare în circuit fenomenul rezonanței curenților; *b*) valoarea eficace a curentului din circuitul comun al bobinei și condensatorului.

Soluția: Conform relației (9-99) avem

$$a)\ f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\cdot 10^{-3}\cdot 20\cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{2\pi\cdot 2} = 796 \text{ Hz};$$

$$b)\ I_L = I_C = \frac{U}{\omega L} = U\omega C = \frac{10}{2\pi\cdot 796\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 1 \text{ A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

9-14. Circuit oscilant

Să presupunem că avem circuitul din fig. 9-51, compus dintr-o bobină de rezistență R și inductanță L legată în serie cu un condensator de capacitate C. Un întrerupător K permite închiderea și deschiderea circuitului.

Să presupunem circuitul deschis și să încărcăm condensatorul cu o tensiune U_m de la o sursă de curent continuu. În dielectricul condensatorului se înmagazinează energia cîmpului electric dată de relația

$$\frac{1}{2} CU_m^2.$$

Să închidem acum circuitul și să studiem fenomenele care apar în circuit.

La închiderea circuitului condensatorul începe să se descarce și în circuit apare un curent variabil i. Energia condensatorului se con-

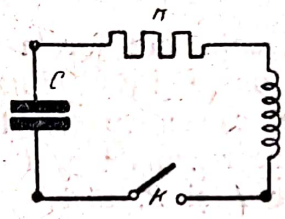


Fig. 9-51. Circuit oscilant, compus din rezistență, inductantă și capacitate, legate în serie

sumă în parte prin efect Joule-Lenz în rezistența bobinei, restul se acumulează sub formă de energie magnetică în inductanța bobinei.

Într-un interval de timp dt, energia cîmpului electric al condensatorului scade cu cantitatea

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} Cu_C^2\right)}{dt} dt = Cu_C \frac{du_C}{dt} dt.$$

În același interval de timp dt, în rezistența bobinei se consumă prin efect Joule-Lenz o cantitate de energie egală cu

$$Ri^2\, dt,$$

iar în cîmpul magnetic al inductanței se acumulează o energie dată de relația

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} L i^2\right)}{dt} dt = L i \frac{di}{dt} dt.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece din exterior nu avem nici un aport de energie, trebuie ca

$$Cu_C \frac{du_C}{dt}\,dt + R\,i^2\,dt + L\,i\,\frac{di}{dt}\,dt = 0\,.$$

Curentul i din circuit rezultă din relaţia

$$i = \frac{du}{dt} = \frac{-\,dCu_C}{dt} = -\,C\frac{du_C}{dt}\,. \qquad (9\text{-}102)$$

Semnul minus din această relaţie ţine seama că tensiunea între bornele condensatorului micşorîndu-se, du_C este negativ.

Din ultimele două relaţii obţinem următoarea expresie

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}\,u_C = 0\,. \qquad (9\text{-}103)$$

Prin urmare, variaţia tensiunii la bornele capacităţii este dată de o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea. Pentru a rezolva această ecuaţie, să substituim pe u_C prin

$$u_C = k\cdot e^{\lambda t}\,. \qquad (9\text{-}104)$$

Diferenţiind de două ori relaţia (9-104), obţinem expresiile

$$\frac{du_C}{dt} = k\lambda\,e^{\lambda t} \quad \text{şi} \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} = k\lambda^2\lambda t$$

pe care introducîndu-le în ecuaţia (9-103) împreună cu relaţia (9-104) obţinem

$$k\lambda^2\,e^{\lambda t} + \frac{R}{L}\,k\,\lambda\,e^{\lambda t} + \frac{1}{LC}\,k\,e^{\lambda t} = 0\,,$$

de unde

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0\,. \qquad (9\text{-}105)$$

Am obţinut astfel *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei diferenţiale (9-103), ale cărei rădăcini sînt

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,, \qquad (9\text{-}106)$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,. \qquad (9\text{-}107)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (9-103) este

$$u_C = k_1\,e^{\lambda_1 t} + k_2\,e^{\lambda_2 t}\,. \qquad (9\text{-}108)$$

După mărimea parametrilor din circuit pot interveni două cazuri:

1-ul caz $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$. În acest caz ne servim de soluţia generală (9-108),

în care ambii exponenți sînt negativi, deoarece, potrivit ecuațiilor (9-106) și (9-107), al doilea termen din membrul doi este mai mic decît primul termen. Prin urmare, tensiunea scade continuu de la valoarea maximă U_m la zero, iar curentul păstrează mereu același sens.

Avem de-a face cu o descărcare a condensatorului, deci o variație a mărimior u_C și i *aperiodică.*

2-lea caz $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$. Să notăm

$$\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = j\,\omega_0, \qquad (9\text{-}109)$$

în care

$$j = \sqrt{-1}.$$

De asemenea să notăm

$$\frac{R}{2L} = \alpha \qquad (9\text{-}110)$$

și, pentru simplificare, să facem următoarele înlocuiri:

$$-\alpha + j\,\omega_0 = p_1$$

și (9-111)

$$-\alpha - j\,\omega_0 = p_2.$$

În acest caz, soluția generală a ecuației (9-103) este dată de relația

$$u_C = k_1\, e^{p_1 t} + k_2\, e^{p_2 t},$$

care, aplicînd formula lui Euler, ia forma

$$u_C = e^{-\alpha t}(k_3\, j \sin \omega_0 t + k_4 \cos \omega_0 t). \qquad (9\text{-}112)$$

Constantele de integrare k_3 și k_4 se determină din condițiile inițiale. În momentul închiderii întrerupătorului, deci la $t=0$, tensiunea $u_C = U_m$, iar curentul în circuit $i=0$. Cu aceste condiții obținem expresia

$$u_C = \frac{U_m}{\omega_0} e^{-\alpha t}\,(\alpha \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t)$$

care poate fi pusă sub forma

$$u_C = \frac{U_m\, e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}} \sin\,(\omega_0 t + \varphi), \qquad (9\text{-}113)$$

în care

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega_0}{\alpha}. \qquad (9\text{-}114)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, descărcarea condensatorului și variația tensiunii și curentului din circuit este *oscilatorie.*

Dacă ținem seamă de relația (9-102) precum și de faptul că, potrivit relațiilor (9-109) și (9-110),

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

obținem pentru curentul din circuit relația

$$i = \frac{U_m e^{-\alpha t}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \sin \omega_0 t \cdot \qquad (9\text{-}115)$$

Numitorul membrului al doilea al acestei expresii, care conține parametri R, L și C, poartă numele de *impedanța caracteristică* a circuitului oscilant. Notăm această impedanță cu Z_c. Deci

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}} \cdot \qquad (9\text{-}116)$$

Din relațiile (9-113) și (9-115) rezultă că atît tensiunea din circuit cît și curentul variază cu frecvența

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

care, ținînd seama de relația (9-109), are ca valoare

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \qquad (9\text{-}117)$$

Frecvența f_0 și pulsația ω_0 se numesc *frecvență proprie,* respectiv *pulsație proprie* a circuitului oscilant.

Frecvența proprie f_0 diferă de frecvența de rezonanță f_r a circuitului, a cărei valoare, dată de relația (9-99), este

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

cu atît mai mult, cu cît rezistența R a circuitului este mai mare. Mărirea rezistenței R a circuitului oscilant atrage după sine, potrivit relației (9-111), o scădere a frecvenței proprii f_0. La o anumită valoare a rezistenței R, care satisface relația

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0,$$

frecvența proprie a circuitului se anulează, procesul descărcării condensatorului încetează de a mai fi oscilator și devine *aperiodic*. Cădem peste cazul întîi de mai sus, cînd $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{CL}$. Tensiunea și curentul din circuit variază și ele aperiodic.

Scanned with OKEN Scanner

Factorul $e^{-\alpha t}$ care apare în relațiile (9-113) și (9-115) face ca amplitudinea tensiunii și a curentului să descrească cu timpul după o funcție exponențială. Asemenea oscilații se numesc *oscilații amortizate*. Descreșterea amplitudinilor se face cu atît mai repede, cu cît rezistența R a circuitului este mai mare, căci, conform relației (9-110), α crește proporțional cu R.

În fig. 9-52 sînt reprezentate curbele care reprezintă oscilațiile amortizate ale tensiunii și curentului din circuitul oscilant cu rezistență.

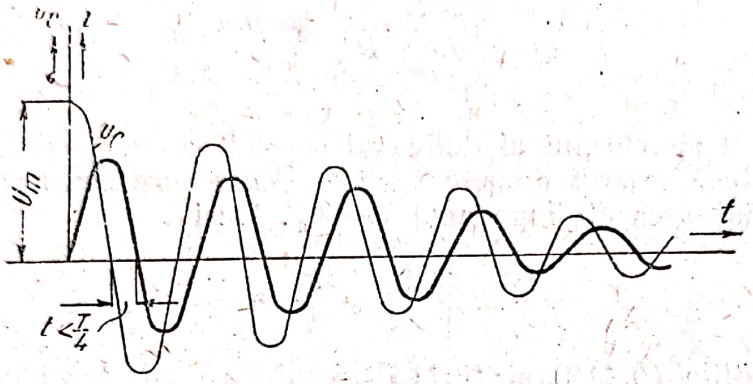


Fig. 9-52. Oscilații amortizate

Dacă circuitul oscilant este lipsit de rezistență, adică dacă $R=0$, valorile lui ω_0 și α [relațiile (9-109) și (9-110)] devin

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (9\text{-}118)$$

și

$$\alpha = 0 .$$

Urmează că

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} = \infty ,$$

deci tensiunea este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului din circuit.

În aceste condiții, relațiile (9-113) și (9-115) devin

$$u_C = U_m \cos \omega_0 t \qquad (9\text{-}119)$$

și

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \sin \omega_0 t . \qquad (9\text{-}120)$$

Prin urmare, cînd rezistența circuitului oscilant este neglijabilă impedanța caracteristică devine egală cu $\sqrt{\frac{L}{C}}$ iar pulsația proprie și frecvența

proprie devin egale cu pulsația de rezonanță, respectiv cu frecvența de rezonanță a circuitului, adică

$$\omega_0 = \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

și

$$f_0 = f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} .$$

În fig. 9-53 sînt reprezentate oscilațiile neamortizate ale tensiunii și

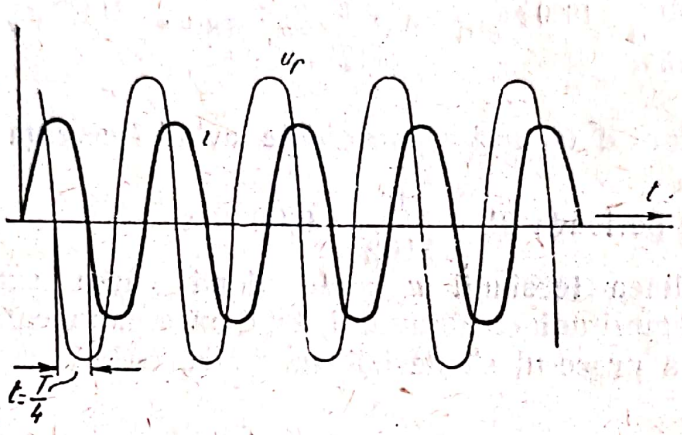


Fig. 9-53. Oscilații neamortizate

ale curentului unui circuit electric oscilant a cărui rezistență este nulă. Curentul este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în întîrziere față de tensiunea din circuit.

Exemplul 9-11. Să se determine expresia analitică a variației tensiunii și curentului într-un circuit oscilant compus dintr-o bobină, cu o rezistență de 15 Ω și o inductanță de 5 mH, legată în serie cu un condensator, cu o capacitate de 4 μ F. Condensatorul este încărcat cu o tensiune inițială $Um = 200$ V. Să se determine, de asemenea și rezistența pentru care procesul oscilatoriu devine aperiodic.

Soluția: Se determină mai întîi valorile mărimilor care intră în relațiile (9-113) și (9-115),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4} - \frac{15^2}{4 \cdot 5^2 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{47{,}75 \cdot 10^6} = 6\,910 \frac{1}{s} ;$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{15}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1\,500 \frac{1}{s} ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0}{a} = \frac{6\,910}{1\,500} = 4{,}606 ; \varphi = 77°45' ;$$

$$\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} = \sqrt{1 - \frac{15^2 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}} = \sqrt{1 - 0{,}045} = 0{,}977\ \Omega ;$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{4} - \frac{15}{4}} \approx 34{,}55\ \Omega .$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$u_C = \frac{200}{0{,}977}\, e^{-1500\,t} \sin\left(360°\frac{t}{T} + 77°45'\right) = 204{,}7\, e^{-1500\,t} \times$$

$$\times \sin\left(360°\,\frac{t}{T} + 77°45'\right)$$

și

$$i = \frac{200}{34{,}55} e^{-1500\,t} \sin 360°\,\frac{t}{T} = 5{,}789\; e^{-1500\,t} \sin 860°\,\frac{t}{T}\,.$$

S-au obținut două curbe sinusoidale avînd frecvența $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{6\,910}{6{,}28} =$

$= 1102$ Hz și perioada $T = \frac{1}{1102} = 0{,}0009$ s.

Amplitudinea tensiunii u_C scade după curba exponențială $204{,}7 \times$ $\times e^{-1500\,t}$, iar amplitudinea curentului, după curba exponențială $5{,}789\; e^{-1500\,t}$.

Pentru ca procesul să devină aperiodic, trebuie ca $\omega_0 = 0$, deci

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0, \text{ de unde}$$

$$R = \sqrt{\frac{4L^2}{LC}} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4}} = \sqrt{5\,000} \approx 71\,\Omega\,.$$

Prin urmare, pentru ca procesul să devină aperiodic trebuie ca

$$R \geq 71\ \Omega\,.$$

9-15. Circuit mixt de curent alternativ

Într-un circuit mixt de curent alternativ unele impedanțe sînt legate în serie, iar altele în derivație. În fig. 9-54 este reprezentat un asemenea circuit mixt simplu, compus din două impedanțe Z_2 și Z_3, legate în derivație, fiecare din ele compusă dintr-o rezistență și o reactanță, ansamblul acestor impedanțe fiind legat în serie cu impedanța Z_1 compusă din rezistența R_1 și reactanța X_1.

Să aplicăm la bornele unui asemenea circuit mixt o tensiune alternativă sinusoidală și să determinăm curenții și tensiunile care apar în diversele porțiuni ale circuitului. În acest scop porțiunea ramificată a circuitului, care poate fi compusă din două sau mai multe ramuri în paralel, se înlocuiește cu o impedanță echivalentă. În modul acesta transformăm circuitul mixt într-un circuit serie echivalent, în care toate impedanțele sînt legate în serie (fig. 9-55).

Pentru determinarea impedanței echivalente a ansamblului ramurilor în paralel se calculează, mai întîi, admitanța echivalentă a acestui ansamblu.

Scanned with OKEN Scanner

Avem, pentru fiecare ramură în parte, conductanța și susceptanța respectivă

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} \; ; \quad B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2}$$

și

$$G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} \; ; \quad B_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} \; .$$

Conductanța și susceptanța grupului de ramuri în paralel sînt date de relațiile

$$G_{23} = G_2 + G_3$$

și

$$B_{23} = B_2 + B_3 .$$

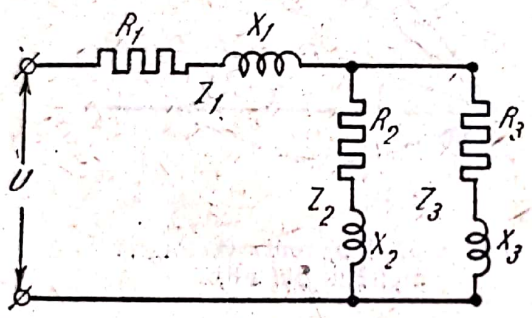


Fig. 9-54. Circuit mixt de curent alternativ

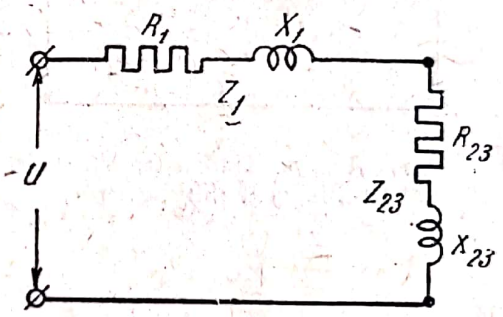


Fig. 9-55. Prima fază a transformării circuitului mixt din fig. 9-54

Obținem astfel admitanța grupului

$$Y_{23} = \sqrt{G_{23}^2 + B_{23}^2}$$

și, cu ajutorul ei, impedanța echivalentă a grupului

$$Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} .$$

Rezistența echivalentă și reactanța echivalentă a grupului de ramuri în paralel rezultă din relațiile

$$R_{23} = G_{23} \cdot Z_{23}^2$$

și

$$X_{23} = B_{23} \cdot Z_{23}^2 \; .$$

În modul acesta, circuitul real din fig. 9-54 se înlocuiește prin circuitul echivalent din fig. 9-55, compus din impedanțele Z_1 și Z_{23} legate în serie.

Rezistența circuitului echivalent este

$$R = R_1 + R_{23} ,$$

reactanța,

$$X = X_1 + X_{23} ,$$

iar impedanța,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} .$$

În fig. 9-56 am reprezentat circuitul echivalent unic, cu o singură impedanță Z și rezistențele R și X.

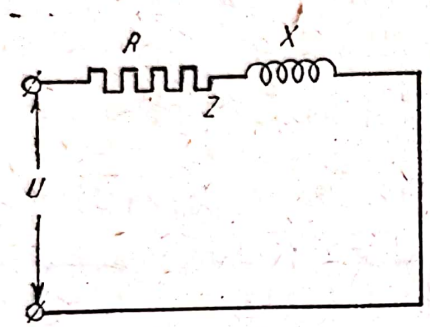


Fig 9-56. A doua fază a transformării circuitului mixt din fig. 9-54

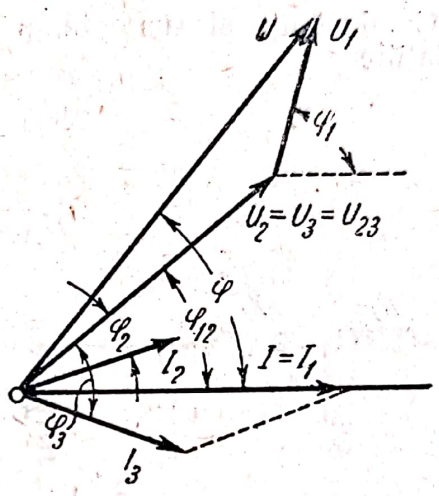


Fig. 9-57. Diagrama vectorială a circuitului mixt

Curentul în acest circuit, care este în același timp și curentul care parcurge porțiunea neramificată a circuitului mixt real, este

$$I = I_1 = \frac{U}{Z} .$$

Decalajul dintre acest curent și tensiunea aplicată este dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} .$$

Urmează că tensiunea la bornele impedanței Z_1 (căderea de tensiune în porțiunea circuitului mixt corespunzătoare acestei impedanțe) este

$$U_1 = Z_1 \, I = Z_1 \, I_1 .$$

Unghiul de decalaj între curentul I_1 și tensiunea U_1, rezultă din relația

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} .$$

La bornele comune ale grupului de circuite legate în paralel, de impedanță echivalentă Z_{23}, vom avea o tensiune

$$U_2 = U_3 = U_{23} = Z_{23} \, I .$$

Scanned with OKEN Scanner

Între curentul $I=I_1$ și tensiunea U_{23}, există un decalaj dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi_{23} = \frac{X_{23}}{R_{23}} .$$

Curenții din ramurile în paralel rezultă din relațiile

$$I_2 = \frac{U_{23}}{Z_2} = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{U_2}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}}$$

și

$$I_3 = \frac{U_{23}}{Z_3} = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{U_3}{\sqrt{R_3^2 + X_3^2}} ,$$

iar decalajele respective sînt date de relațiile

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{X_3}{R_3} .$$

Puterea activă totală din circuit este

$$P = UI \cos \varphi ,$$

iar puterea reactivă,

$$Q = UI \sin \varphi .$$

Puterile active și reactive din ramurile în paralel sînt, respectiv,

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 ,$$

$$Q_2 = U_2 I_2 \sin \varphi_2$$

și

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 ,$$

$$Q_3 = U_3 I_3 \sin \varphi_3 .$$

Scanned with OKEN Scanner

Odată mărimile circuitului determinate analitic, se poate construi diagrama vectorială a circuitului mixt respectiv, reprezentată în fig. 9-57, care trebuie să verifice rezultatele calculului.

Exemplul 9-12. Se dă circuitul mixt, reprezentat în fig. 9-58 și se cere să se determine curenții și tensiunile din diferitele porțiuni ale circuitului, fiind date: $U = 220$ V, $R_2 = 1\ \Omega$, $X_2 = 1{,}5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $X_3 = -3\ \Omega$, $R_1 = 0{,}5\ \Omega$, $X_1 = 2\ \Omega$.

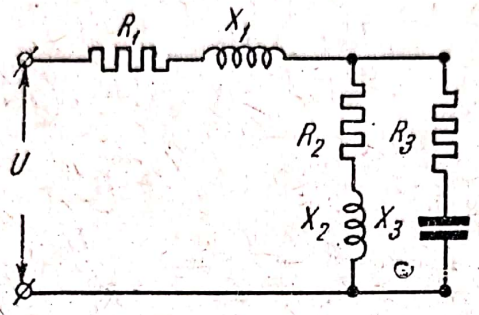


Fig. 9-58. La exemplul 9-12

Soluția:

$$Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2 = 1^2 + 1{,}5^2 = 3{,}25\ \Omega^2;$$

$$Z_3^2 = R_3^2 + X_3^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13\ \Omega^2;$$

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{1}{3{,}25} = 0{,}308\ \text{S};$$

$$B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} = \frac{1{,}5}{3{,}25} = 0{,}461\ \text{S};$$

$$G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{2}{13} = 0{,}154\ \text{S};$$

$$B_3 = \frac{X_3}{Z_3^2} = -\frac{3}{13} = -0{,}230\ \text{S};$$

$$G_{23} = G_2 + G_3 = 0{,}308 + 0{,}154 = 0{,}462\ \text{S};$$

$$B_{23} = B_2 + B_3 = 0{,}461 - 0{,}230 = 0{,}231\ \text{S};$$

$$Y_{23} = \sqrt{G_{23}^2 + B_{23}^2} = \sqrt{0{,}462^2 + 0{,}231^2} = 0{,}516\ \text{S};$$

$$Z_{23} = \frac{1}{Y_{23}} = \frac{1}{0{,}516} = 1{,}936\ \Omega;$$

$$R_{23} = Z_{23}^2 \cdot G_{23} = 3{,}75 \cdot 0{,}462 = 1{,}733\ \Omega;$$

$$X_{23} = Z_{23}^2 \cdot B_{23} = 3{,}75 \cdot 0{,}231 = 0{,}866\ \Omega;$$

$$R = R_1 + R_{23} = 0{,}5 + 1{,}733 = 2{,}233\ \Omega;$$

$$X = X_1 + X_{23} = 2{,}0 + 0{,}866 = 2{,}856\ \Omega;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2{,}223^2 + 2{,}866^2} = 3{,}633\ \Omega\ ;$$

$$I = I_1 = \frac{U}{X} = \frac{220}{3{,}63} = 60{,}6\ \text{A}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{2{,}866}{2{,}233} = 1{,}283\ ;\quad \varphi = 52°3'42''\ ;$$

$$U_1 = I_1 Z_1 = I_1\sqrt{0{,}5^2 + 2^2} = I_1\sqrt{0{,}25 + 4} = 60{,}6 \cdot 2{,}061 = 124{,}9\ \text{V}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{2}{0{,}5} = 4\ ;\quad \varphi_1 = 75°46'\ ;$$

$$U_{23} = U_2 = U_3 = I Z_{23} = 60{,}6 \cdot 1{,}936 = 117{,}3\ \text{V}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{23} = \frac{X_{23}}{R_{23}} = \frac{0{,}866}{1{,}733} = 0{,}5\ ;\quad \varphi_{23} = 26°30'40''\ ;$$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_2} = \frac{117{,}3}{\sqrt{3{,}25}} = \frac{117{,}3}{1{,}803} = 65{,}06\ \text{A}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5\ ;\quad \varphi_2 = 56°15'20''\ ;$$

$$I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{117{,}3}{\sqrt{13}} = \frac{117{,}3}{3{,}606} = 32{,}5\ \text{A}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{X_3}{R_3} = -\frac{3}{2} = -1{,}5\ ;\quad \varphi_3 = -56{,}15'20''\ .$$

9-16. Importanța tehnico-economică a factorului de putere

Potrivit celor expuse în par. 9-10 puterea activă într-un circuit de curent alternativ poate fi exprimată prin relația

$$P = S\cos\varphi\ , \qquad (9\text{-}121)$$

adică prin produsul dintre puterea aparentă $S = UI$ din circuit și factorul de putere $\cos\varphi$ al circuitului. Rezultă că la o putere aparentă a circuitului dată, puterea activă este cu atît mai redusă, cu cît valoarea factorului de putere este mai scăzută.

Generatoarele electrice și transformatoarele, care produc, respectiv transformă energia electrică, motoarele și, în general, toate aparatele receptoare de curent electric sînt caracterizate prin valorile eficace maxime ale tensiunii și ale curentului sub care pot funcționa timp îndelungat fără a se deteriora. Aceste valori eficace maxime se numesc *tensiune nominală* (U_n), respectiv *curent nominal* (I_n).

Asemenea valori maxime ale tensiunii și ale curentului de funcționare, determinate din considerații constructive și de exploatare, le întîlnim, de asemenea, la liniile de transport și la rețelele de distribuție.

În aceste condiții *puterea aparentă nominală* a mașinilor și aparatelor de curent alternativ este

$$S_n = U_n I_n \cdot$$

Să presupunem un generator de curent alternativ, funcționînd cu puterea sa aparentă nominală pe o rețea la care sînt cuplate diverse receptoare.

Dacă factorul de putere al rețelei este egal cu unu ($\cos \varphi = 1$), puterea activă maximă a generatorului este egală cu puterea sa aparentă nominală, căci

$$P = U_n I_n \cos \varphi = U_n I_n = S_n \cdot$$

În această situație, capacitatea generatorului este utilizată în întregime.

Dacă rețeaua pe care debitează generatorul are un factor de putere sub unu ($\cos \varphi < 1$), puterea sa activă, dată de relația

$$P = S_n \cos \varphi , \qquad (9\text{-}122)$$

scade proporțional cu valoarea factorului de putere.

Aceleași concluzii se aplică și transformatoarelor electrice, precum și liniilor de transport și distribuție. Capacitatea de încărcare a acestora variază proporțional cu factorul de putere.

Factorul de putere depinde de tipul și de modul de exploatare al receptoarelor electrice. Prin urmare, generatoarele, transformatoarele, liniile de transport și rețelele de distribuție pot fi folosite rațional numai atunci cînd instalațiile receptoare de energie electrică au un factor de putere cît mai apropiat de unitate.

Să presupunem un receptor de energie care funcționează cu o putere activă constantă și cu tensiunea la borne constantă, însă sub diverse valori ale factorului său de putere. Să notăm cu I_1 curentul absorbit de receptor din rețea la $\cos \varphi_1 = 1$ și cu I_2 la $\cos \varphi_2 < 1$. Vom avea relația

$$P = U\, I_1 \cos \varphi_1 = U\, I_2 \cos \varphi_2 ,$$

de unde deducem că

$$I_2 = I_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = I_1 \frac{1}{\cos \varphi_2} \cdot \qquad (9\text{-}123)$$

Prin urmare, pentru aceeași putere activă curentul absorbit de receptor din rețea variază invers proporțional cu factorul de putere, valoarea minimă a acestui curent corespunzînd unui factor de putere egal cu unitatea.

Trecerea curentului electric prin înfășurarea generatorului (circuitul său electric), prin înfășurările electrice ale transformatoarelor din rețea și prin conductoarele care leagă centrala electrică cu receptorul de energie produce o pierdere de putere prin efect Joule-Lenz.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de notațiile precedente, puterea pierdută prin efect Joule-Lenz, cînd $\varphi_1 = 0$, deci $\cos \varphi_1 = 1$, se poate exprima prin relația

$$\Delta P_1 = R I_1^2 ,$$

în care R este rezistența echivalentă a circuitelor parcurse de curent.

Cînd puterea activă a receptorului rămîne constantă, la diverse valori ale factorului de putere diferite de unitate, de pildă pentru $\cos \varphi_2$, vom avea

$$\Delta P_2 = R I_2^2 ,$$

și, ținînd seama de relația (9-123),

$$\Delta P_2 = R I_1^2 \frac{1}{\cos \varphi_2^2} = \Delta P_1 \frac{1}{\cos \varphi_2^2} . \qquad (9\text{-}124)$$

Rezultă că la o putere activă constantă a receptorului de energie pierderile de putere prin efect Joule-Lenz cresc invers proporțional cu pătratul factorului de putere.

Prin urmare, un factor de putere mic:

— reduce capacitatea de încărcare a centralelor electrice și a rețelelor de transport și distribuție;

— mărește pierderile de putere în generatoare, transformatoare și în rețelele de transport și distribuție.

Principalele cauze care produc reducerea factorului de putere sînt:

a) motoarele asincrone, al căror factor de putere variază cu încărcarea motorului. La mersul în gol al motorului (fără sarcină utilă), $\cos \varphi$ este de 0,2-0,3, iar la sarcină nominală, de 0,75-0,92. Aceasta înseamnă că aceste motoare absorb din rețea un curent cu atît mai inductiv, cu cît motorul funcționează mai neîncărcat.

b) transformatoarele electrice, în special cele de sudură;

c) cuptoarele electrice;

d) rețelele de distribuție aeriene întinse.

Ameliorarea factorului de putere se poate obține prin mijloace naturale și prin mijloace artificiale. Mijloacele naturale constau în utilizarea rațională a receptoarelor electrice și în justa dimensionare a circuitului lor magnetic; mijloacele artificiale, care trebuie să intervină numai după epuizarea mijloacelor naturale, constau în furnizarea energiei reactive necesare prin dispozitive locale corespunzătoare (condensatoare statice, compensatoare sincrone și compensatoare de fază de diferite tipuri).

În cadrul mijloacelor naturale este necesar ca receptoarele care își primesc energia reactivă necesară creerii cîmpului lor magnetic din rețeaua de curent alternativ (motoarele asincrone, transformatoarele etc.) să funcționeze întotdeauna la sarcina nominală. În acest scop, trebuiesc evitate perioadele lungi de mers în gol (fără sarcină) sau la sarcină redusă, deoarece, în aceste cazuri, cea mai mare parte a curentului absorbit din rețeaua de alimentare este reactiv și, în consecință, factorul de putere este redus. În ce privește circuitul magnetic al receptoarelor, el trebuie să prezinte o reluctanță minimă, astfel încît componenta reactivă a curentului de alimentare, componenta care creează fluxul magnetic al receptorului, să fie cît mai mică.

Procedeul ameliorării factorului de putere cu ajutorul compensatoarelor sincrone îl vom analiza în vol. II al prezentului curs. În cele ce urmează, vom arăta rolul condensatoarelor în ameliorarea factorului de putere.

Să presupunem un generator de curent alternativ (fig. 9-59) care

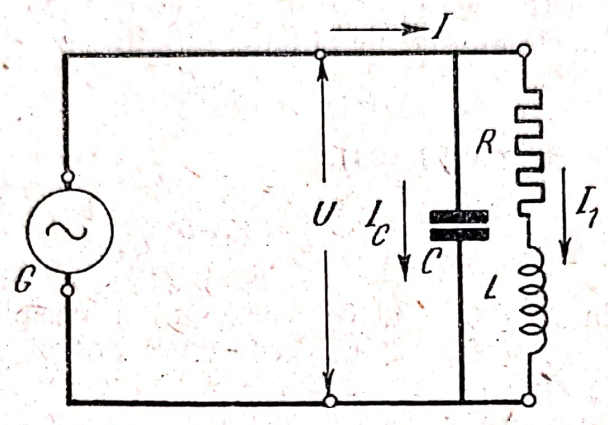


Fig. 9-59. Utilizarea condensatorului pentru îmbunătățirea factorului de putere

alimentează o rețea, de pildă rețeaua interioară a unei întreprinderi al cărui factor de putere trebuie ameliorat. Să notăm cu R și L rezistența și inductanța echivalentă a receptoarelor legate la această rețea, în care cuprindem și rezistența și reactanța proprie a rețelei.

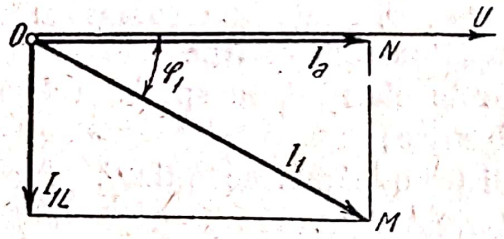


Fig. 9-60. Diagrama vectorială a rețelei al cărei curent are o componentă inductivă

Curentul absorbit de rețea este

$$I_1 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

și este decalat în urma tensiunii (fig. 9-60) cu unghiul φ_1, dat de relația

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{L R^2 + (\omega)^2}}. \qquad (9\text{-}125)$$

Puterea activă absorbită de rețea este

$$P = U I_1 \cos \varphi.$$

Dacă conectăm în paralel cu rețeaua condensatorul C, el absoarbe un curent

$$I_C = C\,\omega\,U\,,$$

decalat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii aplicate. Curentul total pe care generatorul îl furnizează circuitului, format din rețea și condensatorul în paralel, este

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_C\,.$$

În fig. 9-61, am reprezentat diagrama vectorială a acestor curenți.

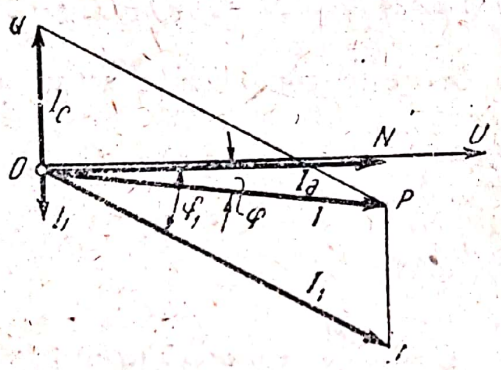


Fig. 9-61. Diagrama vectorială a rețelei precedente, după introducerea condensatorului cuplat în paralel

După cum rezultă din figură

$$I = \sqrt{(I_1 \cos\varphi_1)^2 + (I_1 \sin\varphi_1 - C\,\omega\,U)^2}\,.$$

În funcție de parametri circuitului mixt, relația precedentă devine

$$I = \frac{U}{Z^2}\sqrt{R^2 + (L\,\omega - Z^2\,C\,\omega)^2}\,. \qquad (9\text{-}126)$$

Factorul de putere al circuitului mixt, după cum rezultă din fig. 9-61, este

$$\cos\varphi = \frac{I_1 \cos\varphi_1}{I} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\,\omega - Z^2\,C\,\omega)^2}}\,. \qquad (9\text{-}127)$$

Prin urmare, se poate ridica acest factor la valoarea sa maximă ($\cos\varphi = 1$) dacă se alege C astfel încît

$$L\,\omega - Z^2\,C\,\omega = 0\,,$$

adică se calculează capacitatea condensatorului cu relația

$$C = \frac{L\,\omega}{Z^2} = \frac{L\,\omega}{R^2 + (L\,\omega)^2}\,. \qquad (9\text{-}128)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă nu cunoaştem parametri R şi L ai reţelei ci numai puterea activă P şi decalajul φ_1 al reţelei necompensate şi ne propunem să obţinem prin compensare, cu ajutorul condensatorului, un decalaj φ, procedăm în modul următor:

Din fig. 9-61 rezultă

$$MN = ON \operatorname{tg} \varphi_1$$

şi

$$PN = ON \operatorname{tg} \varphi .$$

Prin urmare

$$MP = OQ = MN - NP = ON(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi) .$$

Ţinînd seama că ON este componenta activă a curentului, obţinem

$$I_C = \frac{P}{U}(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi) = C \omega U ,$$

deci

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi) . \qquad (9\text{-}129)$$

Dacă urmărim obţinerea unui cos $\varphi = 1$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$ şi relaţia precedentă devine

$$C = \frac{P}{\omega U^2} \operatorname{tg} \varphi_1 . \qquad (9\text{-}130)$$

Exemplul 9-13. Reţeaua interioară a unei întreprinderi distribuie o putere de 300 kW, sub un $\cos \varphi_1 = 0{,}54$. Se cere să se calculeze capacitatea unei baterii de condensatoare care, conectată în paralel cu reţeaua, să ridice factorul de putere al acesteia la $\cos \varphi = 0{,}95$. Tensiunea reţelei este de 500 V, iar frecvenţa $f = 50$ Hz.

Soluţia: Se aplică relaţia (9-129). În acest scop, se calculează $\operatorname{tg} \varphi_1$ şi $\operatorname{tg} \varphi$ Se obţine

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 1{,}559 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \varphi = 0{,}329 .$$

Prin urmare

$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi) = \frac{300 \cdot 10^3}{314 \cdot 500^2}(1{,}559 - 0{,}329) = 47 \cdot 10^2 \, \mu F .$$

Bateria de condensatoare va trebui să aibă următoarele caracteristici:
Tensiunea de funcţionare: 500 V;
Capacitatea $C = 47.10^2 \, \mu F$;
Curentul nominal $I_{nC} = C \omega U = 47 \cdot 10^{-4} \cdot 314 \cdot 500 = 738$ A.

Scanned with OKEN Scanner

9-17. Fenomene tranzitorii la închiderea unui circuit cu rezistență și inductanță pe o tensiune alternativă

Am arătat în par. 7-10 că atunci cînd închidem un circuit electric, care conține o rezistență R și o inductanță L, pe o tensiune de c. c., curentul nu ia instantaneu valoarea finală, ci apare un regim tranzitoriu în care curentul crește de la zero la valoarea de regim permanent. Valoarea variabilă a curentului din timpul regimului tranzitoriu, dată de relația (7-42 a),

$$i = i_p + i_{tr} \tag{9-131}$$

se compune din curentul permanent $i_p = I = \frac{U}{R}$ peste care se suprapune curentul tranzitoriu $i_{tr} = -Ie^{-\frac{t}{\tau}}$, în care $\tau = \frac{L}{R}$ este constanta de timp a circuitului. Curentul tranzitoriu se amortizează după o curbă exponențială.

Relația (9-131) se aplică și la închiderea unui circuit cu rezistență și inductanță pe o tensiune alternativă, cu observația că curentul permanent i este un curent alternativ, iar curentul tranzitoriu este dat de relația

$$i_{tr} = -Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{9-132}$$

în care valoarea lui A depinde de valoarea instantanee a tensiunii alternative aplicate în momentul închiderii circuitului.

Să presupunem că aplicăm unui circuit, cuprinzînd rezistența R și inductanța L, o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \psi). \tag{9-133}$$

Curentul permanent din circuit este dat de relația

$$i_p = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \psi - \varphi), \tag{9-134}$$

în care

$$I = \frac{U}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

și

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}.$$

În momentul cînd închidem circuitul ($t = 0$), curentul în circuit este zero și relația (9-131) devine

$$0 = i_{p_0} + i_{tr_0},$$

de unde

$$i_{tr_0} = -i_{p_0}. \tag{9-135}$$

Curentul permanent în momentul închiderii circuitului este dat de relația (9-134) din care, făcînd $t=0$, obținem

$$i_{po}=\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\omega\cdot 0+\Psi-\varphi)=\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\Psi-\varphi)\cdot \qquad (9\text{-}136)$$

Rezultă ca valoare a curentului tranzitoriu în momentul închiderii circuitului

$$i_{tro}=-i_{po}=-\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\Psi-\varphi)\cdot \qquad (9\text{-}137)$$

Ținînd seama de relația (9-132), avem

$$i_{tro}=-A\,e^{-\frac{0}{\tau}}=-A\ ;$$

deci

$$A=-\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\Psi-\varphi)\cdot$$

Prin urmare, valoarea curentului tranzitoriu este

$$i_{tr}=-A\,e^{-\frac{t}{\tau}}=-\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Psi-\varphi)\ \cdot \qquad (9\text{-}138)$$

El atinge valoarea maximă în momentul închiderii, cînd $t=0$ deci cînd, potrivit relației (9-137), este egal cu valoarea, din acel moment, a curentului permanent și scade după o curbă exponențială, cu atît mai repede cu cît constanta de timp a circuitului

$$\tau=\frac{L}{R}$$

este mai mică, adică cu cît inductanța circuitului este mai mică și rezistența mai mare.

Curentul din circuit, în timpul regimului tranzitoriu, dat de relația (9-131), devine

$$i=i_p+i_{tr}=\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}\sin(\omega t+\Psi-\varphi)-\frac{\sqrt{2}\,U}{Z}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\Psi-\varphi)\ \cdot$$

Pentru a se obține curba de variație a curentului din circuit se procedează în modul următor:

Se construiește sinusoida tensiunii aplicate u și aceea a curentului permanent i_p (fig. 9-62). Din punctul care corespunde momentului închiderii circuitului ($t=0$), se poartă, în sens opus, valoarea curentului permanent i_{po} din acel moment, cunoscînd că $i_{tro}=-i_{po}$, și se construiește apoi curba $i_{tr}=-i_{po}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$. Se însumează ordonatele curbei curentului de regim permanent și ale curbei curentului tranzitoriu și se

obţin astfel ordonatele curentului i din circuit din perioada regimului tranzitoriu (curba îngroşată din fig. 9-62).

Dacă închiderea circuitului pe tensiunea sinusoidală are loc într-un moment cînd curentul permanent trece prin zero, curentul tranzitoriu şi

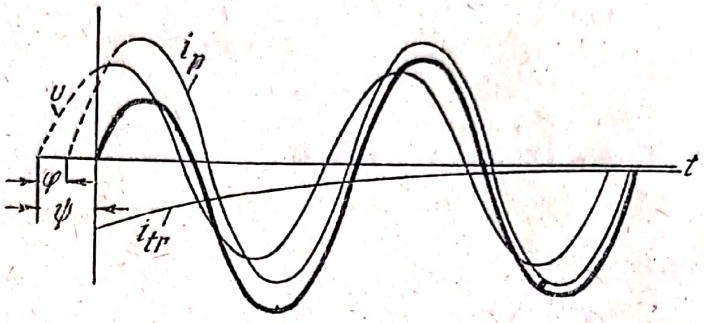


Fig. 9-62. Diagrama corespunzătoare conectării la o reţea de curent alternativ a unui circuit cu rezistenţă şi inductanţă, cînd $\Psi \neq \varphi$

regimul tranzitoriu nu mai apar şi în circuit ia naştere, din primul moment, regimul permanent (fig. 9-63). În acest caz avem

$$i_{tro} = -\frac{\sqrt{2}\,U}{Z} \sin(\Psi - \varphi) = 0,$$

de unde

$$\sin(\Psi - \varphi) = 0 \quad \text{sau} \quad \Psi - \varphi = 0 .$$

Rezultă că

$$\Psi = \varphi .$$

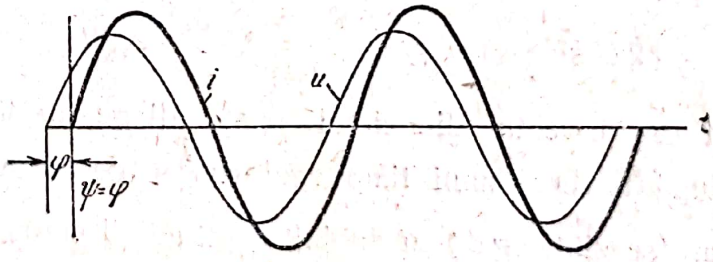


Fig. 9-63. Diagrama corespunzătoare conectării la o reţea de curent alternativ a unui circuit cu rezistenţă şi inductanţă, cînd $\Psi = \varphi$

Prin urmare, pentru a dispare regimul tranzitoriu, circuitul trebuie închis în momentul cînd tensiunea aplicată trece prin valoarea instantanee

$$u = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\,U \sin\varphi .$$

Dacă circuitul este închis în momentul cînd curentul permanent trece prin valoarea sa maximă, valoarea inițială a curentului tranzitoriu este maximă (fig. 9-64). În acest caz avem

$$i_{tro} = -\frac{\sqrt{2}U}{Z}\sin(\Psi - \varphi) = -\frac{\sqrt{2}U}{Z},$$

de unde

$$\sin(\Psi - \varphi) = 1 \quad \text{sau} \quad \Psi - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

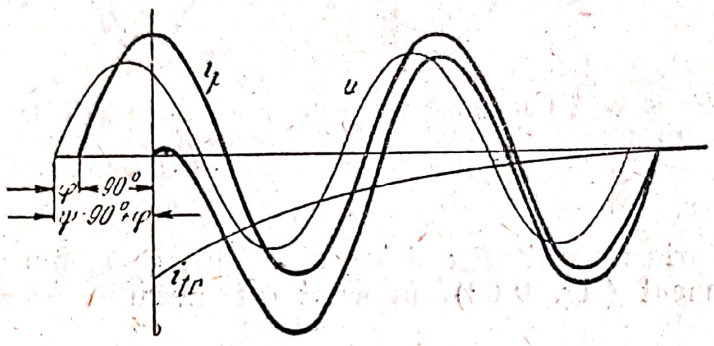


Fig. 9-64. Diagrama corespunzătoare conectării la o rețea de curent alternativ al unui circuit cu rezistență și inductanță, cînd

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Rezultă că

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

deci circuitul trebuie închis în momentul cînd tensiunea aplicată trece prin valoarea instantanee

$$u = \sqrt{2}U\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}U\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

În acest caz curentul din circuit poate atinge în timpul regimului tranzitoriu, după trecerea unui timp egal cu $\frac{T}{2}$ de la închiderea circuitului, o valoare sensibil egală cu dublul amplitudinii curentului permanent.

9-18. Fenomene tranzitorii la închiderea unui circuit cu rezistență și capacitate pe o tensiune alternativă

La închiderea unui circuit compus dintr-o rezistență R și un condensator de capacitate C pe o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi),$$

apare regimul tranzitoriu în care curentul din circuit este dat de aceeași relație (9-131) ca și în cazul precedent.

Scanned with OKEN Scanner

Aci fenomenul tranzitoriu este însă ceva mai complicat, căci pe lîngă cei doi curenți i_p și i_{tr}, componentele curentului din circuit, apar și două componente variabile ale tensiunii la bornele condensatorului, una permanentă u_{Cp} și cealaltă tranzitorie u_{Ctr}, astfel că tensiunea la aceste borne este

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ctr}. \tag{9-139}$$

În fiecare moment tensiunea aplicată acoperă căderea ohmică din circuit și echilibrează tensiunea de la bornele condensatorului. Prin urmare,

$$u = R\,i + u_C.$$

Ținînd seama de relațiile (9-131) și (9-139), ecuația precedentă devine

$$u = R\,i_p + R\,i_{tr} + u_{Cp} + u_{Ctr}. \tag{9-140}$$

În regimul permanent, cînd i_{tr} și u_{Ctr} sînt nule, avem

$$u = R\,i_p + u_{Cp}. \tag{9-141}$$

Scăzînd relația (9-141) din relația (9-140), obținem

$$0 = R\,i_{tr} - u_{Ctr},$$

de unde rezultă

$$i_{tr} = -\frac{u_{Ctr}}{R}. \tag{9-142}$$

Pe de altă parte, între curentul tranzitoriu i_{tr} și tensiunea tranzitorie la bornele condensatorului u_{Ctr} există, așa cum arătăm în par. 5-15, relația

$$i_{tr} = C\frac{du_{Ctr}}{dt}. \tag{9-143}$$

Din aceste ultime două relații rezultă

$$C\frac{du_{Ctr}}{dt} = -\frac{u_{Ctr}}{R},$$

de unde, prin separarea variabilelor, obținem expresia diferențială

$$\frac{du_{Ctr}}{u_{Ctr}} = -\frac{1}{RC}dt = -\frac{1}{\tau}dt,$$

în care $\tau = R\,C$ reprezintă constanta de timp a circuitului (par. 5-15).

Integrînd ecuația precedentă, obținem

$$ln\,u_{Ctr} = -\frac{t}{\tau} + ln\,K,$$

de unde rezultă

$$u_{Ctr} = K\,e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{9-144}$$

Scanned with OKEN Scanner

Constanța de integrare K se determină precum urmează: Curentul permanent din circuit este dat de expresia

$$i_p = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t + \Psi + \varphi) = \sqrt{2} I_p \sin(\omega t + \Psi + \varphi), \quad (9\text{-}145)$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

și

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Tensiunea permanentă la bornele condensatorului, parcurs de curentul i_p, este dată (vezi par. 9-5) de relația

$$u_{Cp} = \sqrt{2} I_p \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \Psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} \cos(\omega t + \psi + \varphi). \quad (9\text{-}146)$$

Urmează că tensiunea la bornele condensatorului, în perioada regimului tranzitoriu, este

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ctr} = -\frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} \cos(\omega t + \Psi + \varphi) + K e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

În momentul conectării ($t = 0$) tensiunea la bornele condensatorului fiind nulă ($u_{C0} = 0$), expresia precedentă devine

$$0 = -\frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} \cos(\omega \cdot 0 + \Psi + \varphi) + K e^{-\frac{0}{\tau}},$$

de unde obținem valoarea constantei de integrare

$$K = \frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} \cos(\Psi + \varphi).$$

Prin urmare, relația (9-144) care ne dă tensiunea tranzitorie la bornele condensatorului devine

$$u_{Ctr} = \frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Psi + \varphi), \quad (9\text{-}147)$$

iar tensiunea la bornele condensatorului în timpul perioadei tranzitorii,

$$u_C = u_{Cp} + u_{Ctr} = -\frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} \cos(\omega t + \Psi + \varphi) + \frac{\sqrt{2} I_p}{\omega C} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\Psi + \varphi). \quad (9\text{-}148)$$

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 9-65 sînt reprezentate curbele sinusoidale ale tensiunilor din circuit și anume tensiunea u aplicată circuitului, tensiunea totală u_C, tensiunea permanentă u_{Cp}, și tensiunea tranzitorie u_{Ctr} la bornele condensatorului și i_r, curentul permanent din circuit.

După cum rezultă din relația (9-142), în momentul închiderii circuitului pe tensiunea sinusoidală u, peste tensiunea permanentă sinusoidală de la bornele condensatorului se suprapune o tensiune tranzitorie care în

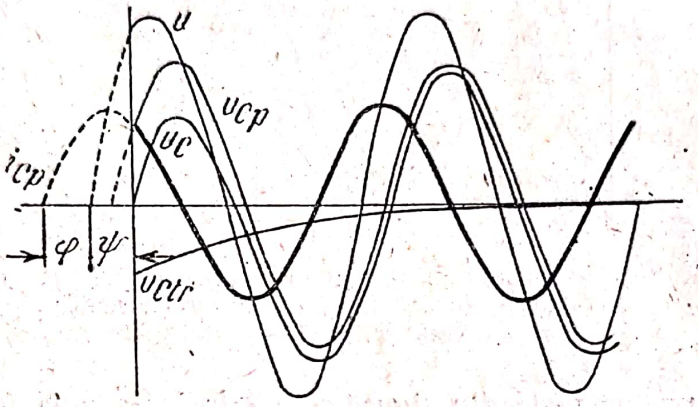


Fig. 9-65. Diagrama corespunzătoare cuplării la o rețea de curent alternativ a unui circuit cu rezistență și capacitate

momentul inițial are o valoare maximă, pentru a se amortiza apoi cu atît mai repede, cu cît constanta de timp $\tau = RC$ este mai mică. Valoarea tensiunii tranzitorii la armăturile condensatorului în momentul inițial este egală cu valoarea, în acel moment, a tensiunii permanente la bornele condensatorului.

În raport cu momentul închiderii circuitului, valoarea inițială a tensiunii tranzitorii poate avea valori diverse.

Dacă închidem circuitul în momentul în care tensiunea permanentă trece prin valoarea sa maximă, valoarea inițială a tensiunii tranzitorii la bornele condensatorului [relația (9-147)] este maximă și egală cu valoarea amplitudinii tensiunii permanente $\frac{\sqrt{2}I_p}{\omega C}$ căci, în acest caz,

$$\cos(\Psi + \varphi) = \pm 1 \quad \text{și} \quad \Psi + \varphi = 0 \text{ sau } \Psi + \varphi = \pi.$$

Rezultă pentru Ψ valorile

$$\Psi = -\varphi \quad \text{sau} \quad \Psi = \pi - \varphi.$$

Deci închiderea circuitului trebuie făcută, în acest caz, în momentul cînd valoarea instantanee a tensiunii aplicate este

$$u = \sqrt{2}U \sin(-\varphi) = -\sqrt{2}U \sin\varphi$$

sau

$$u = \sqrt{2}U \sin(\pi - \varphi) = \sqrt{2}U \sin\varphi.$$

Acest moment este reprezentat în fig. 9-66.

În fig. 9-67 sînt reprezentate, pentru acest caz, curbele după care variază tensiunile condensatorului din circuit și anume tensiunea rezultantă u_C, din regimul tranzitoriu, tensiunea permanentă u_{Cp} și tensiunea tranzitorie

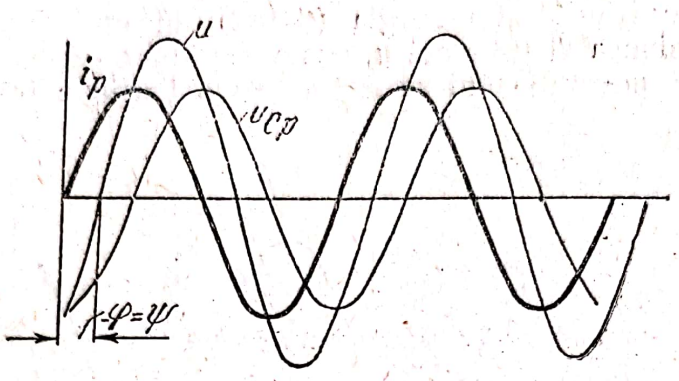


Fig. 9-66 Diagrama corespunzătoare cuplării la o rețea de curent alternativ a unui circuit cu rezistență și capacitate

u_{Ctr}. După cum se vede din figură, după trecerea unei jumătăți de perioadă valoarea maximă a tensiunii rezultante atinge practic dublul valorii tensiunii permanente la bornele condensatorului.

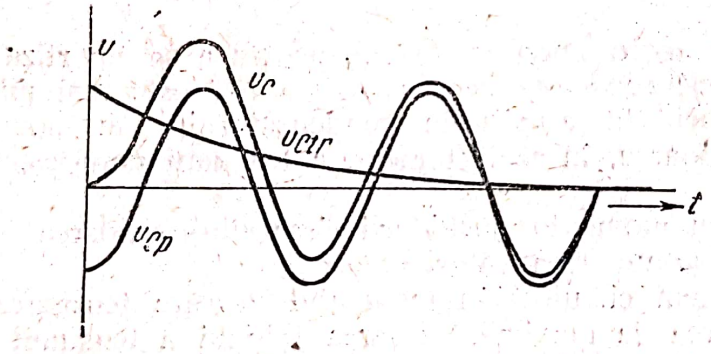


Fig. 9-67. Diagramele de variație a tensiunii circuitului cu rezistență și capacitate cuplat la o rețea de curent alternativ

Să examinăm acum cazul în care circuitul este închis într-un moment cînd tensiunea permanentă a condensatorului trece prin zero. În acest caz în circuit nu mai apare tensiunea tranzitorie, stabilindu-se, chiar de la început, tensiunea permanentă.

Pentru aceasta, trebuie ca în relația (9-148) să avem

$$\cos(\Psi + \varphi) = 0 \quad \text{sau} \quad \Psi + \varphi = \pm\frac{\pi}{2},$$

de unde rezultă

$$\Psi = +\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

În consecință, relația (9-148) devine

$$u_C = -\frac{\sqrt{2}I_p}{\omega C}\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}I_p}{\omega C}\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}I_p}{\omega C}\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) .$$

Să examinăm acum curenții din circuit în regimul tranzitoriu. Componenta tranzitorie a curentului este dată de relația (9-142)

$$i_{tr} = -\frac{u_{Ctr}}{R} = -\frac{\sqrt{2}I_p}{R\omega C}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Psi+\varphi) , \qquad (9\text{-}149)$$

iar componenta permanentă, de relația (9-145)

$$i_p = \sqrt{2}I_p \sin(\omega t + \Psi + \varphi).$$

Prin urmare, curentul în circuit în regimul tranzitoriu este

$$i = i_p + i_{tr} = \sqrt{2}I_p \sin(\omega t + \Psi + \varphi) - \sqrt{2}I_p \frac{1}{R\omega C}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\Psi+\varphi). \quad (9\text{-}150)$$

Rezultă că valoarea curentului din circuit este dată de suprapunerea peste curentul permanent a curentului tranzitoriu, care descreşte repede, după o curbă exponențială și care, în momentul inițial, are o valoare maximă.

Valoarea inițială maximă a curentului tranzitoriu depinde de momentul închiderii circuitului.

Dacă închiderea circuitului are loc în momentul cînd tensiunea permanentă a condensatorului trece prin valoarea sa maximă, adică cînd $\cos(\Psi+\varphi) = 1$, valoarea inițială a curentului tranzitoriu va atinge, de asemenea, valoarea maximă dată de relația

$$i_{tro} = -\frac{u_{Ctro}}{R} = -\frac{\sqrt{2}I_p}{\omega CR}e^{-\frac{0}{\tau}}\cos(\Psi+\varphi) = -\frac{\sqrt{2}I_p}{\omega CR} = -\frac{\sqrt{2}U_{Cp}}{R} .$$

Pe de altă parte, amplitudinea curentului permanent al circuitului este

$$\sqrt{2}I_p = \frac{\sqrt{2}U_p}{X_C} = \frac{\sqrt{2}U_p}{\frac{1}{\omega C}} .$$

Dacă comparăm valoarea maximă a componentei tranzitorii dată de penultima relație cu amplitudinea curentului permanent dată de ultima relație, constatăm că, la valori mici ale rezistenței R care constituie cazurile cele mai frecvente în practică, mărimea inițială a curentului tranzitoriu poate atinge valori reprezentînd un multiplu $\left(\frac{X_C}{R}\text{ ori}\right)$ al amplitudinii curentului permanent (fig. 9-68).

Dacă, din contra, închidem circuitul în momentul cînd tensiunea permanentă la bornele condensatorului este nulă, curentul tranzitoriu nu mai apare căci

$$i_{tro} = -\frac{u_{Ctro}}{R} = \frac{0}{R} = 0,$$

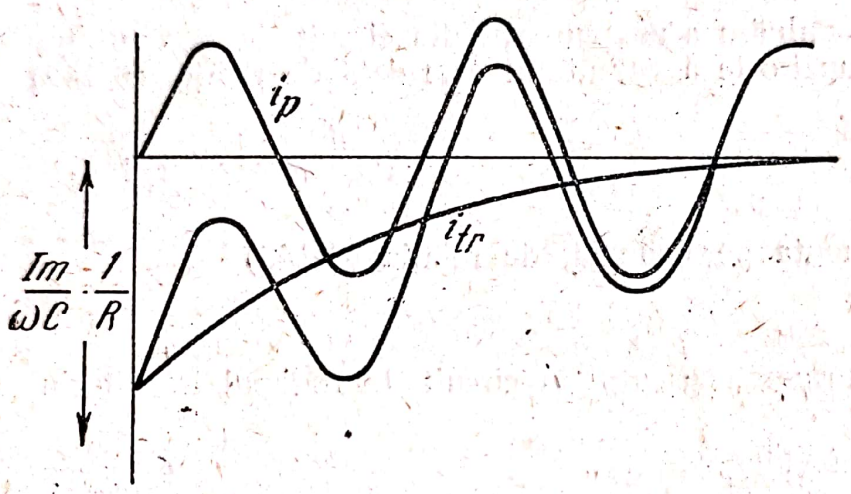


Fig. 9-68. Diagramele de variație ale curenților dintr-un circuit cu rezistență și capacitate la conectarea sa la o rețea de curent alternativ

și relația (9-131) devine $i = i_p$, adică curentul din circuit ia de la început valoarea permanentă.

CAPITOLUL X

METODA SIMBOLICA

10-1. Noţiuni şi definiţii

Rezolvarea problemelor de curent alternativ sinusoidal cu ajutorul diagramelor vectoriale nu dă întotdeauna satisfacţia deplină în ceea ce priveşte precizia din cauza erorilor inerente metodelor grafice. În afară de aceasta, în cazul circuitelor ramificate, diagramele vectoriale devin extrem de complicate.

În asemenea cazuri, problemele se rezolvă pe cale analitică. Un instrument matematic care uşurează mult calculul analitic al mărimilor vectoriale şi permite aplicarea la circuitele de curent alternativ a legilor lui Ohm şi Kirchhoff, sub aceeaşi formă sub care se aplică în curent

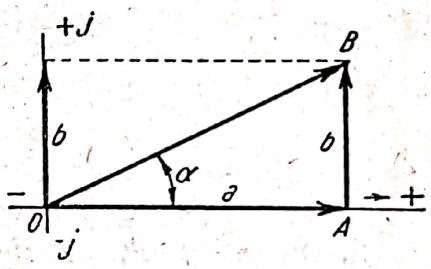


Fig. 10-1. Vector descompus în componente după axele de coordonate

continuu, este *metoda simbolică* care se bazează pe folosirea mărimilor complexe din matematici.

Prin *mărime complexă* sau *cantitate complexă* se înţelege o sumă algebrică formată dintr-un număr real şi un număr imaginar, acesta din urmă fiind rădăcina pătrată a unui număr negativ. Deci, conform definiţiei o mărime complexă se reprezintă numeric printr-o expresie de forma

$$a + \sqrt{-b^2} = a + \sqrt{-1} \cdot b = a + j\,b, \qquad (10\text{-}1)$$

în care a şi b sînt numere reale iar $j = \sqrt{-1}$ este unitatea imaginară

Dacă considerăm în plan două axe de coordonate (fig. 10-1), una a *numerelor reale,* cealaltă, rotită cu $\frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric faţă de

prima, a *numerelor imaginare*, o mărime complexă poate fi reprezentată grafic prin două segmente și anume: un segment care reprezintă numărul real, dispus în sensul pozitiv sau negativ al axei numerelor reale, după cum acest număr este pozitiv sau negativ, și un segment care reprezintă numărul imaginar, dispus în sensul pozitiv sau negativ al axei numerelor imaginare, după cum numărul imaginar este pozitiv sau negativ.

În fig. 10-1 este redată reprezentarea grafică a mărimii complexe exprimată prin relația (10-1) sub forma unui vector OB, ale cărui proiecții pe axele de coordonate sînt

$$OA = a \quad \text{și} \quad AB = b \cdot$$

Prin urmare

$$\overline{OB} = a + jb \cdot \tag{10-2}$$

Dacă lungimea vectorului $\overline{OB}$ este R, expresia precedentă se poate pune și sub forma

$$\overline{OB} = \overline{R} = R\cos\alpha + jR\sin\alpha = R(\cos\alpha + j\sin\alpha) \cdot \tag{10-3}$$

Lungimea R a vectorului poartă numele de *modulul* vectorului, iar unghiul α, unghiul cu care vectorul este rotit (decalat) față de axa numerelor reale, *argumentul* vectorului. Unghiul α este pozitiv cînd vectorul este rotit în sens trigonometric față de axa numerelor reale și negativ, în caz contrar. Argumentul este cuprins între limitele $+\pi \geq \alpha \geq -\pi$.

Modul vectorului este dat de expresia

$$OB = R = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{10-4}$$

indiferent de semnele lui a și b. Argumentul vectorului rezultă din relația

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \tag{10-5}$$

deci semnul unghiului α și, odată cu el, poziția vectorului în sistemul de coordonate depinde de semnele componentelor a și b.

Folosind relațiile lui Euler

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \text{și} \quad \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j},$$

din care se obține ușor

$$\cos\alpha + j\sin\alpha = e^{j\alpha}, \tag{10-7}$$

relația (10-3) devine

$$\overline{R} = R\,e^{j\alpha} \cdot \tag{10-6}$$

Expresia (10-2) constituie reprezentarea *algebrică*, expresia (10-3), reprezentarea *trigonometrică*, iar expresia (10-7), reprezentarea *exponențială* a vectorului cu ajutorul mărimii complexe.

Mărimea imaginară $e^{j\alpha}$ din reprezentarea exponențială se numește *operatorul* de rotație al vectorului și expresia (10-7) ne arată că vectorul R

Scanned with OKEN Scanner

a fost rotit, în sens pozitiv, cu unghiul α față de direcția pozitivă a axei reale.

Înmulțirea unui vector cu un operator de argument negativ, de pildă cu $e^{-j\alpha}$, echivalează cu rotirea vectorului cu unghiul α în sensul mișcării acelor ceasornicului.

Din relația (10-6), în care facem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, obținem

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = 0 + j\cdot 1 = j;$$

prin urmare, j reprezintă un operator care rotește vectorul cu care este înmulțit cu $\frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric.

De asemenea, avem

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 + j\cdot(-1) = -j;\quad e^{j\pi} = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^2 = j^2 = -1;$$

$$e^{\pm j\frac{3\pi}{2}} = \mp j;\quad e^{\pm j2\pi} = +1;\quad e^{j(\alpha\pm 2\pi)} = e^{j\alpha}.$$

Unghiul α din exponentul operatorului trebuie exprimat în radiani, exponentul fiind un număr fără dimensiuni. Convențional, în aplicațiile ce urmează vom exprima pentru simplificare exponentul în grade.

În unele tratate operatorul $e^{j\alpha}$ se exprimă prin simbolul $\angle\alpha$. În acest caz expresia (10-7) devine

$$\overline{R} = R\angle\alpha. \qquad (10\text{-}8)$$

Această expresie constituie reprezentarea *simbolică* a vectorului și se citește: vectorul R de modul R și argument α.

Se numesc mărimi complexe *conjugate* două mărimi de forma

$$\overline{C} = a + jb \quad \text{și} \quad \overline{C^*} = a - jb$$

sau

$$\overline{R} = R\,e^{j\alpha} \quad \text{și} \quad \overline{R^*} = R\,e^{-j\alpha}.$$

Convențional mărimea complexă conjugată se notează cu o steluță.

Exemplul 10-1. Să se exprime mărimea complexă $5\,e^{j\,30^\circ}$ sub forma algebrică $a + jb$.

Soluția: $a = 5\cos 30^\circ = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b = 5\sin 30^\circ = 5\cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

Deci $5\,e^{j30^\circ} = 2{,}5\sqrt{3} + j2{,}5$.

Exemplul 10-2. Să se exprime, sub formă exponențială și sub forma simbolică, mărimea complexă $-15 - j8$, și să se arate din ce cadran face parte vectorul respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția: Notînd modulul cu C, avem, conform relațiilor (10-3) și (10-4),

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{15} = 0{,}4\,;\ \varphi = 21°50'.$$

Vectorul face parte din cadranul al treilea, prin urmare decalajul α al vectorului cu axa numerelor reale este

$$\alpha = \varphi + 180° = 21°50' + 180° = 201°50'.$$

Vectorul are ca expresie

$$\overline{C} = 17 \cdot e^{j\,201°50'} \quad \text{și} \quad \overline{C} = 17\underline{|201°50'}$$

10-2. Operații cu mărimile complexe

a) Adunarea și scăderea mărimilor complexe

Pentru a aduna între ele două mărimi complexe se adună algebric, separat, componentele lor reale și, separat, componentele imaginare.

De pildă, fie de adunat mărimile complexe

$$\overline{C_1} = a_1 + jb_1 \quad \text{și} \quad \overline{C_2} = a_2 + jb_2,$$

în care $\overline{C_1}$ și $\overline{C_2}$ reprezintă vectorii corespunzători ai acestor mărimi complexe.

Vom avea

$$\overline{C} = \overline{C_1} + \overline{C_2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb, \qquad (10\text{-}9)$$

deoarece componentele unui vector rezultant sînt egale cu suma componentelor vectorilor componenți.

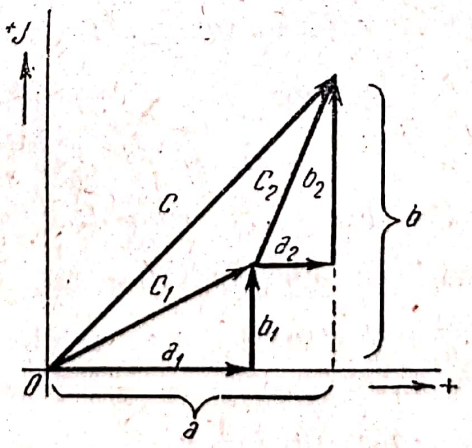


Fig. 10-2. Adunarea a doi vectori

După cum rezultă și din fig. 10-2, componenta vectorului rezultant pe axa reală este egală cu suma algebrică a componentelor, pe aceeași axă, a celor doi vectori. La fel, componenta vectorului rezultant pe axa

imaginară este egală cu suma algebrică a componentelor, pe aceeași axă, a celor doi vectori.

Regula se aplică oricare ar fi numărul mărimilor complexe de adunat.

Scăderea mărimilor complexe corespunde scăderii vectorilor respectivi.

Dacă ne propunem să scădem mărimea complexă reprezentată prin vectorul

$$\overline{C}_2 = a_2 + j\,b_2$$

din mărimea complexă reprezentată prin vectorul

$$\overline{C} = a + j\,b$$

vom obține tot o mărime complexă dată de relația

$$\overline{C} - \overline{C}_2 = (a - a_2) + j\,(b - b_2)\cdot$$

Din fig. 10-2 rezultă că diferența între vectorii $\overline{C}$ și $\overline{C}_2$ este

$$\overline{C} - \overline{C}_2 = \overline{C}_1 = a_1 + j\,b_1, \qquad (10\text{-}10)$$

în care

$$a_1 = a - a_2 \quad \text{și} \quad b_1 = b - b_2\cdot$$

b) Înmulțirea și împărțirea mărimilor complexe

Înmulțirea și împărțirea mărimilor complexe se face foarte ușor cînd ele sînt exprimate sub forma exponențială.

Fie, de pildă, să înmulțim între ele mărimile

$$\overline{C}_1 = C_1\, e^{j\alpha} \quad \text{și} \quad \overline{C}_2 = C_2\, e^{j\beta}\,.$$

Vom obține, ca produs al acestor mărimi, o nouă mărime complexă dată de relația

$$\overline{C} = C_1 \cdot C_2\, e^{j\,(\alpha+\beta)} = C = e^{j\gamma}, \qquad (10\text{-}11)$$

în care

$$C = C_1 \cdot C_2 \quad \text{și} \quad \gamma = \alpha + \beta\cdot$$

Rezultă că produsul a două mărimi complexe este tot o mărime complexă, al cărei modul este dat de produsul modulelor factorilor și al cărei argument este egal cu suma argumentelor factorilor.

Menționăm următoarele două cazuri particulare:

1) Dacă înmulțim o mărime complexă $\overline{C}_1 = C_1\, e^{j\alpha}$ cu o mărime reală A, produsul

$$\overline{C} = \overline{C}_1\, A = C_1\, A\, e^{j\alpha} \qquad (10\text{-}12)$$

poate fi reprezentat printr-un vector, de același sens ca și vectorul reprezentînd mărimea complexă $\overline{C}_1$ și al cărui modul este egal cu produsul modulului vectorului $\overline{C}_1$ prin mărimea reală A.

2) Dacă cele două mărimi complexe sînt conjugate

$$\overline{C}_1 = C_1\, e^{j\alpha} \quad \text{și} \quad \overline{C}_1' = C_1\, e^{-j\alpha},$$

Scanned with OKEN Scanner

produsul lor ne dă o mărime reală

$$\overline{C} = C_1 \cdot C_1 e^{j0} = C_1^2, \tag{10-13}$$

al cărei modul este egal cu pătratul modulului factorilor.

Cînd factorii sînt reprezentați sub formă algebrică

$$\overline{C_1} = a_1 + j b_1 \quad \text{și} \quad \overline{C_2} = a_2 + j b_2,$$

făcînd produsul lor obținem

$$\overline{C_1} \cdot \overline{C_2} = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + ja_1 b_2 + j a_2 b_1 - b_1 b_2 =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot$$

Deci produsul poate fi pus sub forma

$$\overline{C} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2} = a + jb, \tag{10-14}$$

în care

$$a = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad \text{și} \quad b = a_1 b_2 + a_2 b_1 \cdot$$

Împărțirea a două mărimi complexe se face invers decît înmulțirea lor. Dacă mărimile sînt sub formă exponențială, de exemplu $\overline{C_1} = C_1 e^{j\alpha}$ deîmpărțitul și $\overline{C_2} = C_2 e^{j\beta}$ împărțitorul, cîtul este dat de relația

$$\overline{C} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{C_1 e^{j\alpha}}{C_2 e^{j\beta}} = \frac{C_1}{C_2} e^{j(\alpha-\beta)} \cdot \tag{10-15}$$

Prin urmare, cîtul a două mărimi complexe reprezintă tot o mărime complexă, al cărei modul este dat de raportul dintre modulul deîmpărțitului și modulul împărțitorului și al cărei argument este egal cu diferența dintre argumentul deîmpărțitului și al împărțitorului.

Dacă mărimile complexe sînt sub formă algebrică, avem

$$\overline{C} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2} \cdot$$

Înmulțind și numărătorul și numitorul membrului al doilea cu mărimea complexă conjugată $a_2 - j b_2$ a împărțitorului, numitorul devine numărul real și cîtul ia forma

$$\overline{C} = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 - j b_2)}{(a_2 + j b_2)(a_2 - j b_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

în care

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{și} \quad b = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot \tag{10-16}$$

c) Ridicarea la putere și extragerea rădăcinii mărimilor complexe

Ca și operațiile de înmulțire și împărțire, ridicarea la putere și extragerea rădăcinii se face ușor cînd mărimile complexe sînt exprimate sub formă exponențială.

Scanned with OKEN Scanner

Fie mărimea complexă

$$\overline{C} = C e^{j\alpha},$$

pe care să o ridicăm la puterea n, n fiind un număr oarecare întreg sau fracționar. Aceasta înseamnă să înmulțim mărimea cu ea însăși de un număr de ori egal cu puterea la care vrem să o ridicăm. Prin urmare,

$$(\overline{C})^n = (C e^{j\alpha})^n = C^n e^{jn\alpha}. \tag{10-17}$$

În cazul extragerii rădăcinii de ordinul n, putem scrie

$$\sqrt[n]{\overline{C}} = (\overline{C})^{\frac{1}{n}} = C^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\alpha}{n}}. \tag{10-18}$$

d) Derivata și integrala unei mărimi complexe

Fie vectorul reprezentat de mărimea complexă

$$\overline{C} = C e^{j\alpha},$$

în care unghiul α este o funcție de timp oarecare. Aplicînd acestei expresii regulile obișnuite de derivare, obținem

$$\frac{d\overline{C}}{dt} = jCe^{j\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = j\frac{\partial\alpha}{\partial t}\overline{C}. \tag{10-19}$$

Rezultă că prin derivare se obține tot un vector, rotit însă cu $\frac{\pi}{2}$ în avans față de vectorul dat și al cărui modul este de $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ ori mai mare.

Este ușor de constatat că avem, succesiv,

$$\frac{d^2\overline{C}}{dt^2} = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2\overline{C};$$

$$\frac{d^3\overline{C}}{dt^3} = -j\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^3\overline{C};$$

$$\frac{d^4C}{dt^4} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^4\overline{C};$$

ș.a.m.d.

Pornind de la relația (10-19)

$$\frac{d\overline{C}}{dt} = j\frac{\partial\alpha}{\partial t}\overline{C},$$

rezultă că

$$\overline{C}\,dt = \frac{d\overline{C}}{j\frac{\partial\alpha}{\partial t}},$$

deci

$$\int \overline{C}\,dt = \frac{\overline{C}}{j\frac{\partial\alpha}{\partial t}} = -j\frac{\overline{C}}{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}. \qquad (10\text{-}20)$$

Prin urmare, prin integrare se obține tot un vector, rotit însă cu $\frac{\pi}{2}$ în urma vectorului dat și al cărui modul este de $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ ori mai mic.

Exemplul 10-3. Să se determine mărimea complexă a vectorului rezultant dat de însumarea vectorilor $C_1 = 20 - j\,38$ și $C_2 = -5 + j\,16$.

Soluția: Aplicînd relația (10-9), se obține

$$\overline{C} = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 = (20 - 5) + j\,(-38 + 16) = 15 - j\,22.$$

Exemplul 10-4. Să se calculeze suma mărimilor complexe $C_1 = 8\,e^{-j60^\circ}$ și $C_2 = 20\,e^{j45^\circ}$.

Soluția: Exprimăm mărimile complexe sub forma algebrică

$$\overline{C}_1 = 8\cos 60^\circ - j\,8\sin 60^\circ = 8.0{,}5 - j\,8.0{,}866 = 4 - j\,6{,}928;$$

$$\overline{C}_2 = 20\cos 45^\circ + j\,20\sin 45^\circ = 20.0{,}707 + j\,20.0{,}707 = 14{,}14 + j\,14{,}14;$$

$$\overline{C} = \overline{C}_1 + \overline{C}_2 = 18{,}14 + j\,7{,}21.$$ Modulul sumei este

$$C = \sqrt{18{,}14^2 + 7{,}21^2} = \sqrt{381} = 19{,}52;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{7{,}21}{18{,}14} = 0{,}397$$

$$\alpha = 21^\circ 40';$$

$$\overline{C} = 19{,}52\cdot e^{j\,21^\circ 40'} \text{ sau } \overline{C} = 19{,}52\,\underline{|21^\circ 40'}.$$

Exemplul 10-5. Să se calculeze produsul vectorilor $\overline{C}_1 = 10\,e^{j\,45^\circ}$ și $\overline{C}_2 = 6\,e^{-j\,80^\circ}$.

Soluția: Aplicîndu-se relația (10-11), se obține

$$\overline{C} = \overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2 = 10.6\,e^{j(45^\circ - 80^\circ)} = 60\,e^{-j35^\circ}.$$

Exemplul 10-6. Să se calculeze produsul vectorilor $\overline{C}_1 = -5 + j\,16$ și $\overline{C}_2 = 8 + j\,21$.

Soluția: Se aplică relația (10-14)

$$\overline{C} = \overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2 = a + jb,$$

în care

$$a = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad \text{și} \quad b = a_1 b_2 + a_2 b_1;$$

$$a = -40 + 336 = 296,\ b = -105 + 128 = 13,\ \overline{C} = 296 + j\,13.$$

Exemplul 10-7. Să se calculeze cîtul mărimilor complexe $\overline{C}_1 = 24e^{j18^\circ}$ și $\overline{C}_2 = 10e^{-j22^\circ}$.

Soluția: Se aplică relația (10-15), obținîndu-se

$$\overline{C} = \frac{\overline{C}_1}{\overline{C}_2} = \frac{24}{10}\,e^{j\,[18 - (-22^\circ)]} = 2{,}4\,e^{j40^\circ}.$$

Exemplul 10-8. Să se afle citul împărţirii vectorilor $\overline{C}_1 = 14 - j\,20$ şi $\overline{C}_2 = 24 + j6$.

Soluţia: Se aplică relaţia (10-16) pentru $\overline{C} = a + jb$, în care

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \text{ şi } b = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \text{ Vom avea } a = \frac{336 - 120}{612} \approx 0{,}353$$

$$b = \frac{-480 - 84}{612} = -0{,}922\,, \quad \overline{C} = \frac{\overline{C}_1}{\overline{C}_2} = 0{,}353 - j\,0{,}922.$$

10-3. Mărimi electrice reprezentate prin cantităţi complexe

Am arătat, în par. precedent, că orice mărime complexă poate fi reprezentată printr-un anumit vector, ceea ce înseamnă că şi orice vector poate fi reprezentat printr-o anumită mărime complexă. Aceasta ne permite ca, în problemele electrotehnice, să putem transforma mărimile vectoriale în mărimi complexe şi, cu ajutorul acestora din urmă, să rezolvăm aceste probleme prin calcul analitic.

Dacă considerăm, de pildă, un curent electric sinusoidal exprimat prin relaţia

$$i_1 = \sqrt{2}\, I_1 \sin \omega t, \tag{10-21}$$

el poate fi reprezentat vectorial printr-un vector luat ca origine de fază. Dacă considerăm ca origine de fază chiar axa reală, vectorul curentului va fi orientat de-a lungul acestei axe şi vom avea în notaţie simbolică, utilizînd valoarea eficace a curentului,

$$\overline{I}_1 = I_1; \tag{10-22}$$

Un alt curent, dat de relaţia $i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \cos \omega t = \sqrt{2}\, I_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ va fi reprezentat în planul axelor mărimilor complexe printr-un vector decalat în avans cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de vectorul I_1, adică orientat de-a lungul axei

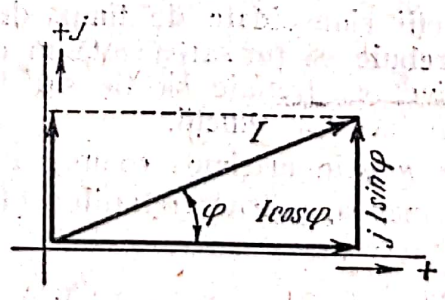


Fig. 10-3. Vectorul curent descompus în mărimi complexe

imaginare şi deci reprezentat prin relaţia

$$\overline{I}_2 = j\, I_2. \tag{10-23}$$

Dacă curentul sinusoidal este exprimat prin relaţia generală

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}\, I \cos\varphi \sin\omega t + \sqrt{2}\, I \sin\varphi \cos\omega t, \quad (10\text{-}24)$$

el poate fi reprezentat simbolic (fig. 10-3), utilizînd valoarea eficace, prin relaţia

$$\bar{I} = I\cos\varphi + j\, I \sin\varphi = I\, e^{j\varphi}. \quad (10\text{-}25)$$

La fel se prezintă cazul cînd avem de-a face cu o tensiune sau o f.e.m. Dacă valoarea instantanee a tensiunii este dată de relaţia

$$u = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \psi), \quad (10\text{-}26)$$

expresia ei complexă, utilizînd valoarea eficace, ia forma

$$\bar{U} = U\, e^{j\psi}. \quad (10\text{-}27)$$

În relaţiile (10-25) şi (10-27) de mai sus, am convenit ca vectorii $\bar{I}$ şi $\bar{U}$, care reprezintă, în cantităţi complexe, funcţiile sinusoidale i şi u, să-i aşezăm faţă de axa numerelor reale astfel încît să formeze cu această axă unghiurile de fază φ, respectiv ψ, adică am luat aceşti vectori ca origine de fază.

Funcţiile sinusoidale, de forma relaţiilor (21-21) şi (10-26), am văzut că pot fi reprezentate prin vectori învîrtitori (vectori cronici). Deci argumentul α al acestor vectori este o funcţie de timp şi relaţiile (10-25) şi (10-27) devin, sub forma lor generală,

$$\bar{I} = I\, e^{j\alpha} = I\, e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (10\text{-}28)$$

şi

$$\bar{U} = U\, e^{j\alpha'} = I\, e^{j(\omega t + \psi)}. \quad (10\text{-}29)$$

Ne propunem acum să exprimăm, în mărimi complexe, ecuaţia diferenţială (9-39)

$$u = R\, i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i\, \mathrm{d}t,$$

în care u şi i sînt funcţii sinusoidale de timp de aceeaşi pulsaţie ω.

Deoarece ecuaţia trebuie să fie satisfăcută în orice moment de funcţiile sinusoidale respective, ea trebuie să fie satisfăcută şi de mărimile complexe corespunzătoare acestor funcţii.

Vom reprezenta pe u prin mărimea complexă $\bar{U}$ şi pe i prin mărimea complexă $\bar{I}$. De asemenea, potrivit relaţiilor (10-19) şi (10-20), vom reprezenta funcţia

$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ prin mărimea complexă $j\frac{\partial\alpha}{\partial t}\bar{I} = j\,\omega\,\bar{I}$

şi funcţia

$\int i\, \mathrm{d}t$ „ „ „ $-j\frac{\bar{I}}{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} = -j\frac{\bar{I}}{\omega}$.

În modul acesta, ecuaţia diferenţială (9-39) devine, în cantităţi complexe,

$$\overline{U} = R\overline{I} + jL\omega\overline{I} - j\frac{1}{C\omega}\overline{I} \quad . \qquad (10\text{-}30)$$

Numim expresie complexă a impedanţei unui circuit şi o notăm cu $\overline{Z}$, raportul dintre tensiunea aplicată acelui circuit şi curentul care ia naştere în circuit, ambele exprimate în mărimi complexe. Deci, conform definiţiei,

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} \cdot$$

Să presupunem că reactanţa circuitului este inductivă şi că curentul are forma

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t \cdot$$

Rezultă, pentru tensiunea la bornele circuitului expresia

$$u = \sqrt{2}\, U \sin (\omega t + \varphi) \cdot$$

În formă simbolică, aceste expresii devin

$$\overline{I} = I \quad \text{şi} \quad \overline{U} = Ue^{j\varphi},$$

iar impedanţa circuitului

$$\overline{Z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi} \cdot$$

Argumentul φ rămînînd tot timpul constant, rezultă că vectorul impedanţei este un vector *acronic* (un vector *static*).

Dacă înlocuim operatorul $e^{j\varphi}$ cu valoarea lui dată de relaţia (10-7)

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi,$$

relaţia precedentă a impedanţei sub formă simbolică devine

$$\overline{Z} = Z(\cos\varphi + j \sin\varphi) = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi \cdot$$

Ţinînd seama (din triunghiul impedanţei) că $Z\cos\varphi = R$ şi $Z\sin\varphi = X$, expresia complexă a impedanţei ia forma

$$\overline{Z} = R + jX \quad . \qquad (10\text{-}31)$$

Dacă tensiunea aplicată circuitului are forma

$$u = \sqrt{2}\, U \sin (\omega t - \varphi),$$

adică dacă reactanţa circuitului este capacitivă, relaţia impedanţei devine

$$\overline{Z} = R - jX \cdot \qquad (10\text{-}32)$$

Scanned with OKEN Scanner

În calculul circuitelor ramificate se utilizează valorile complexe ale admitanţelor respective. Între expresia complexă a admitanţei şi cea a impedanţei există relaţia

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \cdot \qquad (10\text{-}33)$$

Dacă reactanţa circuitului este inductivă, avem relaţia

$$\overline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{Z^2} = G - jB = Y e^{-j\varphi}, \qquad (10\text{-}34)$$

în care G este conductanţa şi B susceptanţa reală a circuitului.

Dacă reactanţa circuitului este capacitivă, relaţia precedentă devine

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R - jX} = \frac{R + jX}{Z^2} = G + jB = Y e^{j\varphi} \cdot \qquad (10\text{-}35)$$

Vectorul admitanţei, ca şi acela al impedanţei, este un vector acronic.

Exemplul 10-9. Se dă un circuit compus dintr-o rezistenţă $R = 2\ \Omega$ legată în serie cu o reactanţă inductivă de $1{,}5\ \Omega$. Circuitul este alimentat de o tensiune $\overline{U} = 220\ e^{j50^0}$ V. Se cere curentul din circuit.

Soluţia: Reactanţa circuitului fiind inductivă, calculăm expresia complexă a impedanţei aplicînd formula (10-31)

$$Z = R + jX = (2 + j\,1{,}5) \cdot$$

Modulul impedanţei este

$$\overline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5\ \Omega;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75,\ \varphi = 37^\circ \cdot$$

Expresia complexă a impedanţei, în formă exponenţială, este

$$\overline{Z} = Z\ e^{j\varphi} = 2{,}5\ e^{j\ 37^\circ}\ \Omega \cdot$$

Curentul din circuit

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{220 \cdot e^{j\ 50^\circ}}{2{,}5\ e^{j\ 37^\circ}} = 88 \cdot e^{j\ 13^\circ}\ \text{A} =$$

$$= 8{,}8 \cos 13^\circ + j\ 8{,}8 \sin 13^\circ = (8{,}57 + j\ 1{,}98)\ \text{A} \cdot$$

Exemplul 10-10. Să se calculeze expresia simbolică a admitanţei circuitului din exemplul precedent şi să se determine valoarea curentului cu ajutorul admitanţei.

Soluţia: Reactanţa circuitului fiind inductivă, se aplică relaţia (10-34)

$$\overline{Y} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} = G - jB = \frac{2}{6{,}25} - j\frac{1{,}5}{6{,}25} = (0.32 - j\ 0{,}24)\ \text{S} \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

Modulul admitanței este

$$Y = \sqrt{0{,}32^2 + 0{,}24^2} = \sqrt{0{,}1024 + 0{,}0576} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4 \text{ S};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{0{,}24}{0{,}32} = -0{,}75\,,\quad \varphi = -37^\circ\,.$$

Urmează că

$$\overline{Y} = 0{,}4\ e^{-j\,37^\circ} \text{ și } \overline{I} = \overline{U}\cdot\overline{Y} = 220\ e^{j\,50^\circ}\cdot 0{,}4\ e^{-j\,37^\circ} = 88\ e^{j\,13^\circ}\text{ A}\,.$$

10.-4. Expresia în mărimi complexe a legii lui Ohm, a legilor lui Kirchhoff și a puterii

Metoda simbolică ne dă posibilitatea de a exprima, într-o formă simplă, relațiile dintre tensiunile și curenții sinusoidali, în cazul circuitelor simple aplicînd legea lui Ohm și în cazul circuitelor ramificate aplicînd legile lui Kirchhoff.

Legea lui Ohm se aplică circuitelor simple sub forma

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}}\,, \tag{10-36}$$

în care

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \cdots + \overline{E}_n = \sum_1^n \overline{E}_k \tag{10-37}$$

reprezintă suma f.e.m. din circuit exprimate sub formă complexă și

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \cdots + \overline{Z}_n = \sum_1^n \overline{Z}_k \tag{10-38}$$

reprezintă impedanța echivalentă sub formă complexă a circuitului simplu, dată de suma impedanțelor complexe din circuit.

În cazul circuitelor ramificate care conțin noduri, se aplică cele două legi ale lui Kirchhoff, legea curenților și legea căderilor de tensiune.

Este evident că suma valorilor instantanee ale curenților care se îndreaptă spre un nod oarecare al circuitului este egală cu suma valorilor instantanee ale curenților care se îndepărtează de nod. Considerînd, convențional, primii curenți ca pozitivi și ceilalți ca negativi, avem relația algebrică

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots = \sum_1^n i_k = 0\,.$$

Ținînd seama că valorile instantanee ale curenților sînt date de proiecțiile vectorilor respectivi pe o axă oarecare, rezultă că și suma geometrică a acestor vectori trebuie să fie egală cu zero. Exprimînd vectorii sub formă complexă vom avea între valorile eficace respective

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 + \cdots = \sum_1^n \overline{I}_k = 0\,. \tag{10-39}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această relație reprezintă prima lege a lui Kirchhoff aplicată curenților sinusoidali și exprimată în mărimi complexe:

In fiecare nod al circuitului de curent alternativ suma mărimilor complexe care exprimă valoarea eficace sau valoarea maximă a curenților îndreptați către nod este egală cu suma mărimilor complexe care exprimă valorile eficace sau valorile maxime ale curenților care se îndepărtează de nod.

De exemplu, pentru nodul A din fig. 10-4, aplicînd legea întîia a lui Kirchhoff obținem ecuația

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 - \bar{I}_4 - \bar{I}_5 = 0$$

sau

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5 .$$

Conform legii a doua a lui Kirchhoff, este evident că suma valorilor instatnanee ale f.e.m. care acționează într-un circuit simplu oarecare al circuitului ramificat este egală cu suma valorilor instantanee ale căderilor de tensiune din diferitele porțiuni ale acelui circuit simplu. În cazul f.e.m.

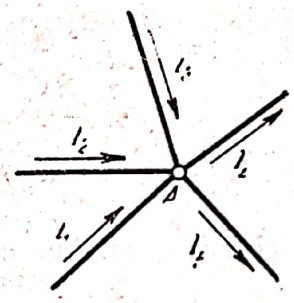


Fig. 10-4. Nodul unui circuit ramificat

sinusoidale și a curenților sinusoidali, f.e.m. instantanee și căderile de tensiune instantanee pot fi date de proiecțiile vectorilor respectivi pe o axă oarecare. Rezultă că suma vectorilor f.e.m. dintr-un circuit simplu oarecare este egală cu suma vectorilor căderilor de tensiune din acel circuit. Exprimînd vectorii sub formă complexă, avem relația

$$\bar{E} = \sum \bar{Z}\ \bar{I}, \qquad (10\text{-}40)$$

care reprezintă legea a doua a lui Kirchhoff aplicată circuitelor de curent alternativ și exprimată în mărimi complexe:

In orice circuit închis de curent alternativ suma mărimilor complexe care exprimă valorile eficace ale f.e.m. sinusoidale din circuit este egală cu suma mărimilor complexe care exprimă produsul dintre impedanțele porțiunilor de circuit și valorile eficace ale curenților sinusoidali, exprimate în mărimi complexe.

Ca și în curent continuu, fixăm un sens de parcurgere al circuitului simplu și afectăm, de pildă, semnul plus f.e.m. și curenților al căror sens coincide cu sensul de parcurgere al circuitului și semnul minus, celor de sens opus.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd legea a doua a lui Kirchhoff conturului *ABCDFA* din fig. 10-5, obținem ecuația

$$\overline{E}_1 - \overline{E}_2 + \overline{E}_3 = \overline{I}_1 \overline{Z}_1 + \overline{I}_4 \overline{Z}_4 + \overline{I}_2 \overline{Z}_2 - \overline{I}_3 \overline{Z}_3 - \overline{I}_5 \overline{Z}_5 ,$$

în care

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 ; \overline{Z}_2 = R_2 ; \overline{Z}_3 = j\omega L_3 ;$$

$$\overline{Z}_4 = R_4 - j\frac{1}{\omega C_4} \text{ și } \overline{Z}_5 = R_5 + j\left(\omega L_5 - \frac{1}{\omega C_5}\right) .$$

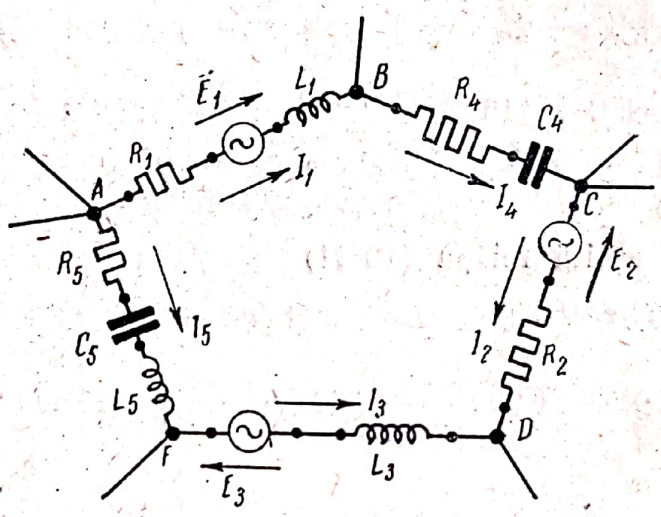


Fig. 10-5. Un circuit închis al unei rețele

Exprēsia puterii în mărimi complexe se determină precum urmează: Presupunem că tensiunea aplicată circuitului este dată de expresia

$$\overline{U} = U e^{j\psi} ,$$

iar curentul, în ipoteza că reactanța circuitului este inductivă, este decalat cu unghiul φ în urma tensiunii aplicate

$$\overline{I} = I e^{j(\psi - \varphi)} .$$

Să înmulțim expresia tensiunii cu valoarea conjugată a curentului. Vom avea

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^* = \overline{U} e^{j\psi} \cdot \overline{I} e^{j(\varphi - \psi)} = U I e^{j\varphi} =$$

$$= U I \cos\varphi + j U I \sin\varphi = P + jQ . \qquad (10\text{-}41)$$

Partea reală a mărimii complexe astfel obținute reprezintă puterea activă iar coeficientul părții imaginare, puterea reactivă din circuitul respectiv. Prin urmare, pentru a se obține puterea din circuit în mărimi complexe este necesar a se înmulți tensiunea, exprimată în cantități complexe, cu valoarea conjugată a curentului care parcurge circuitul. Numai în acest fel în produsul celor două mărimi apare defazajul real dintre ele.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă circuitul are o reactanță capacitivă, curentul este decalat cu unghiul φ înaintea tensiunii și produsul de mai sus devine

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^* = UIe^{-j\varphi} = UI\cos\varphi - jUI\sin\varphi = P - jQ \quad (10\text{-}42)$$

Exemplul 10-11. Să se determine impedanța unui circuit simplu, compus din următoarele impedanțe legate în serie: $\overline{Z}_1 = (6 + j5)\ \Omega$; $\overline{Z}_2 = (10 - j15)\ \Omega$ și $\overline{Z}_3 = (4 + j25)\ \Omega$.

Soluția: Impedanța echivalentă, conform relației (10-38), este

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 = 6 + j5 + 10 - j15 + 4 + j25 =$$

$$= (20 + j15)\ \Omega = \sqrt{20^2 + 15^2}\, e^{j\,36^\circ\,50'} .$$

Exemplul 10-12. Se dă tensiunea $\overline{U} = 220\, e^{j40^\circ}$ V aplicată unui circuit și curentul $\overline{I} = 50\, e^{j10^\circ}$ A din circuit. Se cere puterea activă și reactivă din circuit.

Soluția: Se aplică relația (10-41)

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^* = 220\, e^{j\,40^\circ} \cdot 50\, e^{-j\,10^\circ} = 11\,000\, e^{j\,30^\circ} = 11\,000\cos 30^\circ +$$

$$+ j\,11\,000\sin 30^\circ = 11\,000\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,11\,000 \cdot 0{,}5 = (5\,500\sqrt{3} + j\,5\,500) .$$

Rezultă

$$P = 9{,}515\ \text{kW} \text{ și } Q = 5{,}5\ \text{kvar} .$$

10-5. Circuite cu impedanțe legate în paralel

Să considerăm circuitul din fig. 10-6 pe care îl presupunem compus din n ramuri în paralel și căruia îi aplicăm, între nodurile A și B, tensiunea $u = \sqrt{2}\, U \sin \omega t$. Ne propunem să determinăm curenții din circuit.

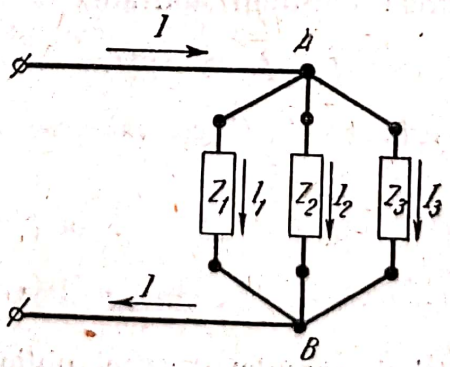


Fig. 10-6. Circuite cu impedanțe legate în paralel

Prima lege a lui Kirchhoff, aplicată nodului A, ne dă

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \ldots + \overline{I}_n .$$

Aplicînd legea lui Ohm obținem, pentru curenții din ramurile în paralel,

$$\overline{I}=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1},\overline{I}_2=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_2},\cdots,\overline{I}_n=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_n},$$

iar pentru curentul total expresia

$$\overline{I}=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}},$$

în care $\overline{Z}$ este impedanța echivalentă a grupului de n impedanțe legate în paralel.

Introducînd aceste expresii ale curenților în suma de mai sus, aceasta devine

$$\frac{\overline{U}}{\overline{Z}}=\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1}+\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_2}+\cdots+\frac{\overline{U}}{\overline{Z}_n},$$

de unde, simplificînd cu $\overline{U}$, obținem

$$\frac{1}{\overline{Z}}=\frac{1}{\overline{Z}_1}+\frac{1}{\overline{Z}_2}+\cdots+\frac{1}{\overline{Z}_n}$$

sau

$$\overline{Y}=\overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\cdots+\overline{Y}_n. \qquad (10\text{-}43)$$

Prin urmare, *admitanța complexă a unui circuit compus din mai multe ramuri în paralel este egală cu suma admitanțelor complexe ale fiecărei ramuri.*

În cazul particular a două ramuri în paralel, impedanța complexă echivalentă este

$$\frac{1}{\overline{Z}}=\frac{1}{\overline{Z}_1}+\frac{1}{\overline{Z}_2},$$

deci

$$\overline{Z}=\frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2},$$

iar în cazul a trei ramuri

$$\frac{1}{\overline{Z}}=\frac{1}{\overline{Z}_1}+\frac{1}{\overline{Z}_2}+\frac{1}{\overline{Z}_3},$$

de unde

$$\overline{Z}=\frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3+\overline{Z}_1\overline{Z}_3+\overline{Z}_1\overline{Z}_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscînd admitanţele, curenţii din fiecare ramură sînt daţi de relaţiile complexe

$$\overline{I}_1 = \overline{U}\ \overline{Y}_1, \quad \overline{I}_2 = \overline{U}\ \overline{Y}_2, \cdots, \overline{I}_n = \overline{U}\ \overline{Y}_n ,$$

şi curentul total, de relaţia

$$\overline{I} = \overline{U}\ \overline{Y} .$$

Exemplul 10-13. Să se determine curentul total din porţiunea neramificată a unui circuit cu două ramuri în paralel, avînd respectiv impedanţele $\overline{Z}_1 = (5 - j8)\ \Omega$ şi $\overline{Z}_2 = (6 + j4)\Omega$. Între nodurile circuitului se aplică tensiunea $220\ e^{j\,20^\circ}$V.

Soluţia: Se determină impedanţa echivalentă

$$\overline{Z} = \frac{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} ,$$

$$\overline{Z} = \frac{(5 - j\,8)\ (6 + j\,4)}{5 - j\,8 + 6 + j\,4} = \frac{30 + j\ 20 - j\ 48 + 32}{11 - j\ 4} =$$

$$= \frac{(62 - j\,28)\ (11 + j\ 4)}{11^2 + 4^2} = 5{,}795 - j\,0{,}438 = 5{,}811\ e^{j\,4^\circ\,20'} .$$

$$\text{Rezultă } \overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{220\ e^{j20^\circ}}{5{,}811\ e^{j\,4^\circ\,20'}} = 37{,}86\ e^{j\,15^\circ 40'}\ \text{A}.$$

10-6. Circuite complexe de curent alternativ

Metoda simbolică ne permite rezolvarea problemelor de circuite complexe de curent alternativ aplicînd aceleaşi procedee ca şi pentru reţelele complexe de curent continuu. Între altele, se aplică procedeele examinate în par. 3-3 pînă la 3-6 şi anume metoda impedanţei totale echivalente, metoda tensiunii între noduri, metoda transformării şi metoda suprapu-

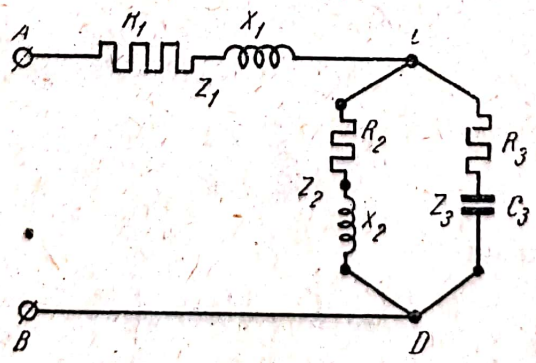


Fig. 10-7. Circuit complex

nerii. În locul rezistenţelor şi conductanţelor din circuitele de curent continuu, apar, în circuitele de curent alternativ, impedanţe şi admitanţe complexe.

Dacă considerăm, de exemplu, circuitul serie paralel din fig. 10-7, impedanța echivalentă dintre bornele A și B ale circuitului este dată de relația

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z}_2 \overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} ,$$

în care $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$ și $\overline{Z}_3$ sînt impedanțele complexe din circuit, date respectiv de expresiile

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j X_1 , \quad \overline{Z}_2 = R_2 + j X_2 \text{ și } \overline{Z}_3 = R_3 + j X_3 .$$

Curentul părții neramificate a circuitului este dat de legea lui Ohm

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} .$$

Tensiunea la bornele impedanței $\overline{Z}_1$ este

$$\overline{U}_1 = \overline{I}_1 \overline{Z}_1$$

iar tensiunea între nodurile C și D,

$$\overline{U}_2 = \overline{U}_3 = \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_{23} .$$

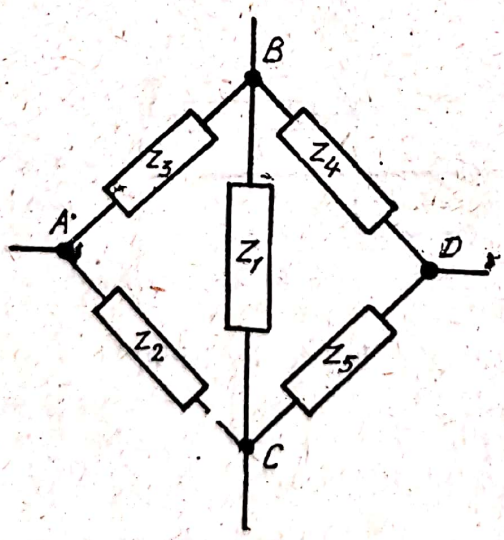


Fig. 10-8. Receptoare legate în triunghi

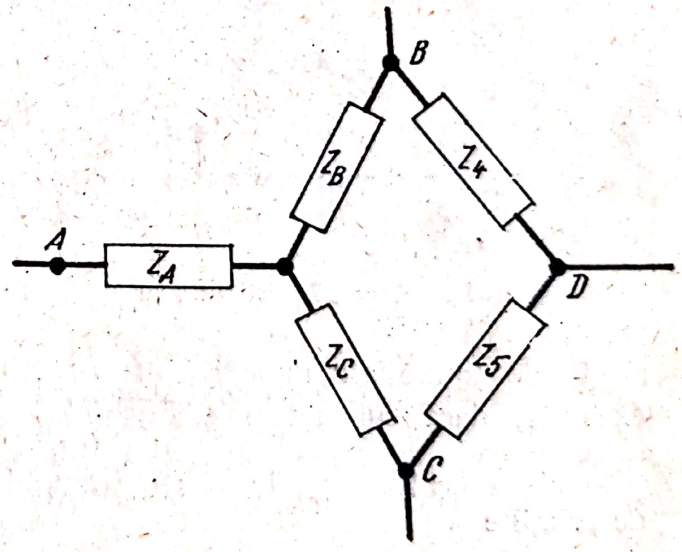


Fig. 10-9. Receptoare legate în stea

Urmează că valorile curenților, în cele două ramuri în paralel, sînt respectiv

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_2} \text{ și } \overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_3}{\overline{Z}_3} .$$

Dacă un circuit este compus din receptoare legate în triunghi (fig. 10-8), el poate fi transformat într-o stea echivalentă, așa cum am arătat în par. 3-5. Impedanțele stelei echivalente sînt date de relațiile

$$\overline{Z}_A = \frac{\overline{Z}_2\,\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3},$$

$$\overline{Z}_B = \frac{\overline{Z}_3\,\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}, \qquad (10\text{-}44)$$

$$\overline{Z}_C = \frac{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}.$$

Prin transformarea în stea a triunghiului ABC din fig. 10-8, se transformă circuitul complex din această figură în circuitul echivalent mixt, compus din impedanțe legate în serie și în paralel, reprezentat în fig. 10-9 care se rezolvă la fel ca circuitul din fig. 10-7.

Transformările de la triunghi la stea echivalentă și invers se aplică în curentul alternativ în special la calculul circuitelor trifazate, așa cum vom arăta la timp. În circuitele trifazate, receptoarele pot fi legate în stea (fig. 10-10) sau în triunghi (fig. 10-11).

Cu ajutorul formulelor (10-44) se pot obține relațiile de transformare ale admitanțelor totale ale unor receptoare reale, legate în stea, în

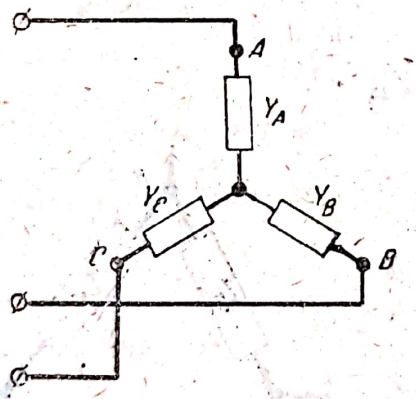


Fig. 10-10. Schema legării în stea

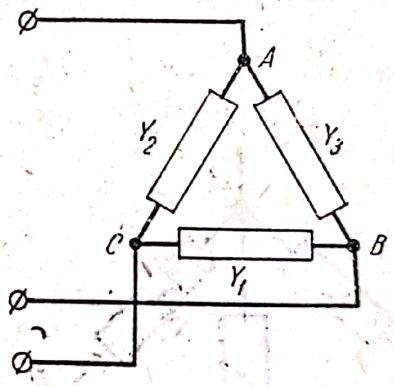


Fig. 10-11. Schema legării în triunghi

admitanțe totale ale unor receptoare echivalente legate în triunghi. De exemplu, dacă cunoaștem admitanțele totale $\overline{Y}_A$, $\overline{Y}_B$ și $\overline{Y}_C$ ale receptoarelor reale legate în stea din fig. 10-10, admitanțele totale ale receptoarelor echivalente, legate în triunghi între aceleași noduri, sînt date de relațiile

$$\overline{Y}_1 = \frac{\overline{Y}_B\,\overline{Y}_C}{\overline{Y}_A+\overline{Y}_B+\overline{Y}_C},$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{\overline{Y}_C\,\overline{Y}_A}{\overline{Y}_A+\overline{Y}_B+\overline{Y}_C}, \qquad (10\text{-}45)$$

$$\overline{Y}_3 = \frac{\overline{Y}_A\,\overline{Y}_B}{\overline{Y}_A+\overline{Y}_B+\overline{Y}_C}.$$

Introducînd în relaţiile precedente în locul admitanţelor complexe inversele lor, impedanţele complexe, obţinem formulele de trecere de la legarea reală în triunghi (fig. 10-11), la cea echivalentă în stea (fig. 10-10)

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_A\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\overline{Z}_A}{\overline{Z}_A},$$

$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_A\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\overline{Z}_A}{\overline{Z}_B}, \qquad (10\text{-}46)$$

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_A\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\overline{Z}_A}{\overline{Z}_C}.$$

10-7. Circuite de curent alternativ cuplate inductiv

Ne propunem să determinăm, prin metoda simbolică, curenţii care apar în două circuite electrice cuplate inductiv, dintre care unuia din ele i se aplică o tensiune alternativă.

Fie circuitele reprezentate în fig. 10-12. Circuitul primar este format

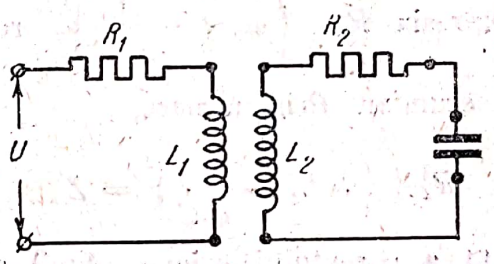


Fig. 10-12. Circuite cuplate inductiv

dintr-o rezistenţă R_1 şi o inductanţă L_1 legate în serie şi la bornele acestui circuit se aplică tensiunea sinusoidală $u = \sqrt{2}U \sin \omega t$. Circuitul secundar este format dintr-o rezistenţă R_2, o inductanţă L_2 şi o capacitate C legate în serie. Între cele două circuite există un cuplaj inductiv, caracterizat prin inductanţa mutuală M.

Sub influenţa tensiunii aplicate, în circuitul primar apare un curent sinusoidal i_1 care dă naştere, prin inducţie mutuală în circuitul secundar, unui curent i_2 de asemenea sinusoidal.

Dacă aplicăm legea a doua a lui Kirchhoff valorilor instantanee din cele două circuite, obţinem pentru circuitul primar ecuaţia

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

şi pentru circuitul secundar ecuaţia

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2\, dt + M \frac{di_1}{dt}.$$

Aplicînd metoda simbolică, ecuaţiile precedente devin

$$\overline{U}_1 = R_1\overline{I}_1 + j\omega L_1\overline{I}_1 + j\omega M\overline{I}_2 \qquad (10\text{-}47)$$

și

$$0 = R_2\bar{I}_2 + j\omega L_2\bar{I}_2 - j\frac{\bar{I}_2}{\omega C} + j\omega M\bar{I}_1 \cdot \qquad (10\text{-}48)$$

Dacă rezolvăm ecuația (10-48) în raport cu $\bar{I}_2$ și introducem valoarea găsită în ecuația (10-47), obținem relația

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1\left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)}\right], \qquad (10\text{-}49)$$

din care scoatem expresia curentului din circuitul primar

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2\left[R_2 - j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot$$

Observăm că expresia $R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ reprezintă pătratul impedanței circuitului secundar. Prin urmare,

$$R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = Z_2^2$$

și expresia precedentă a curentului primar, după anumite transformări, devine

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{Z_2^2} + j\left[\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2}\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} \cdot \qquad (10\text{-}50)$$

Notînd cu $\bar{Z}_1'$ impedanța complexă a circuitului primar, în care ținem seama și de influența mutuală exercitată asupra lui de circuitul secundar, avem, aplicînd legea lui Ohm,

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1'} \cdot \qquad (10\text{-}51)$$

Din relațiile (10-43) și (10-44) obținem

$$\bar{Z}_1' = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{Z_2^2} + j\left[\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2}\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \qquad (10\text{-}52)$$

Impedanța circuitului primar, atunci cînd nu ținem seama de influența inductivă a circuitului secundar, este

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \cdot \qquad (10\text{-}53)$$

Comparînd între ele relaţiile (10-52) şi (10-53), rezultă că influenţa inductivă a circuitului secundar asupra celui primar apare sub forma unei majorări a rezistenţei active a circuitului primar cu valoarea

$$\frac{\omega^2 M^2 R_2}{Z_2^2}, \tag{10-54}$$

simultan cu o reducere a reactanţei acestui circuit cu valoarea

$$\frac{\omega^2 M^2}{Z_2^2}\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{10-55}$$

După semnul parantezei ultimei relaţii, reducerea reactanţei poate fi şi negativă, adică în realitate reactanţa primarului să se mărească.

Expresia curentului $\bar{I}_2$, din circuitul secundar se obţine din ecuaţia (10-48), în care înlocuim pe $\bar{I}_1$ cu valoarea dată de relaţia (10-50).

Exemplul 10-14. Să se calculeze cu cît se măreşte rezistenţa unei înfăşurări primare, a cărei inductanţă este de 50 mH, prin acţiunea inductivă a unui circuit secundar, a cărei rezistenţă este de 500 Ω şi inductanţa 20 mH, cunoscînd că frecvenţa tensiunii aplicate circuitului primar este de $6 \cdot 10^3$ Hz şi coeficientul de cuplaj între circuite, egal cu 0,6.

Soluţia: Se aplică relaţia (10-54). Notînd cu ΔR_1, majorarea rezistenţei primarului, avem

$$\Delta R_1 = \frac{\omega^2 M^2 R_2}{Z_2^2},$$

în care

$$Z_2^2 = 500^2 + (2\pi \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}02)^2 = 817\,913\ \Omega^2;$$

$$M = 0{,}6\sqrt{0{,}05 \cdot 0{,}02} = 0{,}019\ \text{H}.$$

Rezultă

$$\Delta R_1 = \frac{(2\pi \cdot 6 \cdot 10^3)^2\ 0{,}019^2}{817\ 913} \cdot 500 = 312{,}45\ \Omega.$$

10-8. Diagrama cercului

Se ivesc cazuri, în studiul funcţionării circuitului de curent alternativ, cînd este nevoie să se examineze modul cum variază unii din parametri circuitului, în funcţie de un anumit parametru, considerat ca variabilă independentă.

Rezolvarea unor asemenea probleme se poate face pe cale analitică, cu ajutorul formulelor stabilite pînă acum. Adeseori este însă mai simplu să se utilizeze o metodă grafică de calcul, numită *diagrama cercului*, consecinţă a proprietăţilor aşa numiţilor *vectori inverşi*.

De exemplu, deoarece impedanţa unui circuit este o mărime inversă admitanţei acelui circuit, dacă construim impedanţa sub forma unui vector şi determinăm vectorul invers al acestuia, putem găsi grafic admitanţa circuitului pentru fiecare valoare, direcţie şi sens a vectorului variabil al impedanţei.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă originea unui vector rămîne aceeaşi atunci cînd vectorul variază, curba descrisă de vîrful vectorului (curba pe care se deplasează acest vîrf) se numeşte *locul geometric* al vectorului variabil.

Numim *vectori inverşi*, doi vectori variabili, avînd o origine comună, al căror produs rămîne tot timpul constant atunci cînd vectorii variază.

Pentru determinarea vectorilor inverşi, se folosesc *curbele reciproce inverse*. În electrotehnică asemenea curbe reprezintă locul geometric al extremităţilor parametrilor variabili din circuite, reprezentaţi ca vectori variabili inverşi.

În fig. 10-13 au fost reprezentate curbele, de formă oarecare C şi C'.

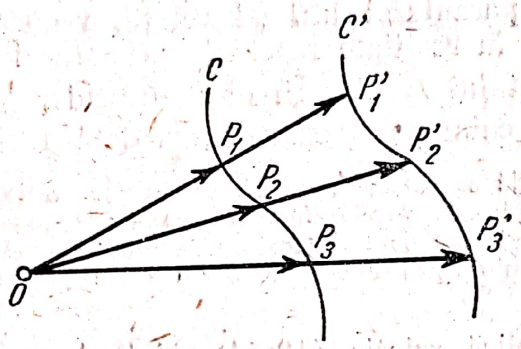


Fig. 10-13. Curbe reciproc inverse

Conform definiţiei de mai sus, aceste curbe sînt reciproc inverse dacă produsul lungimii vectorilor, cu originea comună în punctul O şi vîrfurile pe cele două curbe, este constant, adică dacă

$$OP_1 \cdot OP'_1 = OP_2 \cdot OP'_2 = \cdots = \text{const} = S \cdot$$

Punctul comun O se numeşte *polul inversiunii* (centrul de inversiune), iar mărimea S, *gradul inversiunii*. Vectorii $\overline{OP}_1$ şi $\overline{OP'}_1$, $\overline{OP}_2$ şi $\overline{OP'}_2$ etc. sînt vectorii variabili inverşi, deoarece

$$\overline{OP}_1 = \frac{S}{\overline{OP'_1}}, \quad \overline{OP}_2 = \frac{S}{\overline{OP'_2}} \cdots$$

Curbele reciproc inverse C şi C' reprezintă, prima locul geometric al extremităţilor vectorilor direcţi $\overline{OP}_1$, $\overline{OP}_2$ etc., iar a doua, locul geometric al extremităţilor vectorilor inverşi $\overline{OP'_1}$, $\overline{OP'_2}$ etc.

În cazurile mai importante din electrotehnică, locurile geometrice ale vectorilor inverşi reprezintă drepte şi cercuri. De aceea, în cele ce urmează ne vom ocupa numai de aceste locuri geometrice.

Să considerăm un cerc cu centrul în O_1 (fig. 10-14) şi un pol de inversiune în punctul O, exterior cercului. Cercul O_1 poate fi considerat ca locul geometric al vectorilor cu origine comună în O şi cu vîrful pe cerc. Dacă ducem tangenta OA şi sectantele OB_2 şi OC_2 la cerc şi ţinem seama că produsul dintre o secantă şi porţiunea ei exterioară este egal cu pătratul tangentei, avem

$$OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2 = OA^2 = S \cdot$$

Urmează că atunci cînd cunoaștem vectorii $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$, $\overline{OA}$, inverșii lor sînt dați respectiv de vectorii $\overline{OB_2}$, $\overline{OC_2}$ și $\overline{OA}$. În acest caz, locul geometric atît al vectorilor direcți, cît și al celor inverși, este reprezentat de același cerc cu centrul în O_1, cu observația că vîrfurile vectorilor respectivi se deplasează pe cerc în sens invers.

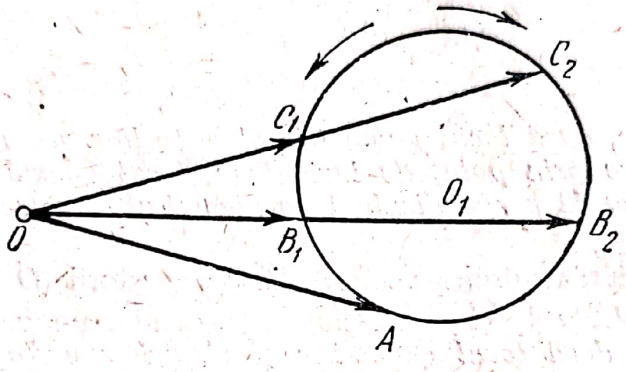


Fig. 10-14. Secantele cercului determină segmente reciproc inverse

Prin urmare, *curba reciprocă inversă a unui cerc dat, cînd polul de inversiune este exterior cercului, este însăși cercului dat.*

Să presupunem acum că polul de inversiune O se găsește chiar pe cerc (fig. 10-15). Să ducem diametrul care trece prin punctul O și, în prelungirea acestuia, să luăm un punct A_2 prin care să ducem o dreaptă perpendiculară pe OA_2. Să luăm un punct oarecare pe cerc, de pildă punctul B_1, pe care să-l unim cu O. Obținem vectorul OB_1

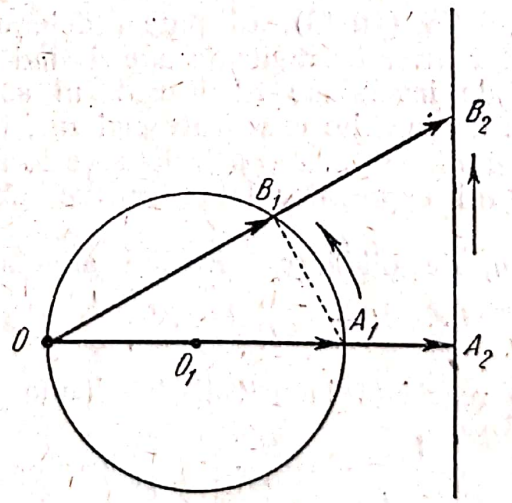


Fig. 10-15. Cerc și dreaptă reciproc inverse

pe care să-l prelungim pînă întîlnește în B_2 perpendiculara pe OA_2.

Dreapta A_2B_2 reprezintă locul geometric al vîrfurilor vectorilor inverși cînd vîrfurile vectorilor direcți se deplasează pe cerc. Într-adevăr, dacă unim punctele A_1 cu B_1 obținem triunghiurile asemenea OA_2B_2 și

OB_1A_1, deoarece unghiul A_2OB_2 este comun iar unghiurile OA_2B_2 și OB_1A_1 sînt unghiuri drepte.

Rezultă că

$$\frac{OB_2}{OA_1} = \frac{OA_2}{OB_1}$$

sau

$$OB_2 \cdot OB_1 = OA_1 \cdot OA_2 = \text{const} = S \cdot \qquad (10\text{-}57)$$

Prin urmare, *dacă locul geometric al vîrfurilor vectorilor direcți este un cerc care trece prin polul de inversiune, locul geometric al vectorilor inverși este o dreaptă perpendiculară pe diametrul care trece prin originea vectorilor.*

Dacă considerăm drept vectori direcți, vectorii $\overline{OA_2}$ și $\overline{OB_2}$, iar ca vectori inverși, $\overline{OA_1}$ și $\overline{OB_1}$, putem conclude, pe baza acelorași relații (10-57), că *dacă locul geometric al vîrfurilor vectorilor direcți este o linie dreaptă, care nu trece prin polul inversiunii, locul geometric al vectorilor inverși este un cerc care trece prin polul inversiunii și are centrul situat pe perpendiculara dusă prin pol pe dreapta respectivă.*

Se știe că impedanțele și admitanțele circuitelor electrice sînt mărimi inverse, între ele existînd relațiile

$$\overline{Z} = \frac{1}{\overline{Y}} \quad \text{și} \quad \overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}},$$

de unde

$$\overline{Z}\,\overline{Y} = 1. \qquad (10\text{-}58)$$

Rezultă, din relația (10-58), că putem determina, pe cale grafică prin metoda vectorilor inverși, admitanța atunci cînd cunoaștem impedanța sau invers, gradul de inversiune fiind egal în acest caz cu unitatea.

Spre deosebire de cazurile examinate mai sus, în care vectorii direcți și inverși au aceeași direcție, la construirea vectorului impedanței și al admitanței cu ajutorul expresiilor lor complexe obținem vectori de direcții diferite.

Să presupunem, de pildă, că circuitul alternativ are o impedanță dată de relația

$$\overline{Z} = R + jX_L, \qquad (10\text{-}59)$$

în care X_L este o reactanță inductivă. Admitanța circuitului este

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2} = G - jB_L \cdot \qquad (10\text{-}60)$$

Comparînd relațiile de mai sus, ale impedanței și admitanței circuitului, vedem că vectorii respectivi sînt decalați, față de axa reală, cu unghiuri egale și de semn contrar $\left(\text{tg}\,\varphi_X = \frac{X_L}{R} \text{ și } \text{tg}\,\varphi_Y = -\frac{B_L}{G}\right)$, deci vectorii sînt dispuși simetric de o parte și de alta a acestei axe.

Același lucru se constată și din fig. 10-16, unde în OB am reprezentat vectorul impedanței Z, construit cu ajutorul componentei active $R = OA$ și reactive $X_L = AB$ la o anumită scară aleasă pentru ohmi, și în OD, vectorul admitanței Y, construit cu ajutorul conductanței $G = OC$ și a susceptanței $B_L = CD$ la scara fixată pentru siemens.

Deoarece la determinarea mărimilor inverse prin metoda geometrică vectorii direcți și inverși trebuie să aibă aceeași direcție, așezăm vec-

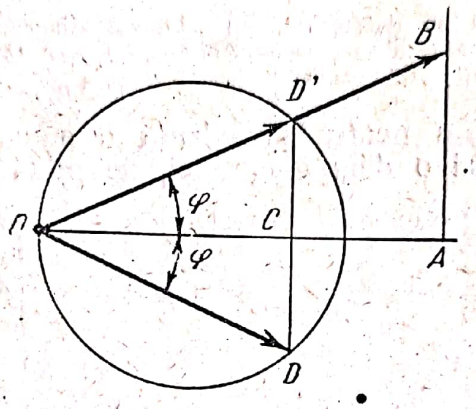


Fig. 10-16. Construcția geometrică a impedanței și a admitanței

torii admitanței pe aceeași direcție cu a vectorilor impedanței deci, în fig. 10-16, purtăm vectorul $\overline{OD}$ în OD' pe direcția lui OB. Aceasta corespunde schimbării semnului susceptanței din relația (10-60) care se ia pozitiv, cînd susceptanța este inductivă, și negativ, cînd susceptanța este capacitivă. Dacă locul geometric al impedanței Z este dreapta AB (rezistența R constantă, inductanța X_L variabilă), locul geometric al admitanței $\overline{Y}$ este cercul $D'OD$.

La tensiune constantă aplicată circuitului curentul din circuit potrivit relației

$$\overline{I} = \overline{U}\,\overline{Y} \tag{10-61}$$

fiind proporțional cu admitanța, rezultă că la o anumită scară diagrama admitanței reprezintă, totodată, și diagrama curentului.

La curent constant în circuit, tensiunea aplicată circuitului potrivit relației

$$\overline{U} = \overline{I}\,\overline{Z} \tag{10-62}$$

fiind proporțională cu impedanța, rezultă că la o anumită scară diagrama impedanței reprezintă, totodată, și diagrama tensiunii aplicate.

De asemenea, puterea dintr-un circuit electric fiind dată de relația

$$P = UI\cos\varphi\,,$$

ținînd seama că

$$\overline{I} = \overline{U}\,\overline{Y}$$

și

$$\cos\varphi = \frac{G}{Y}\,,$$

rezultă că puterea P poate fi pusă sub forma

$$P = U^2 G \,. \tag{10-63}$$

La tensiune U constantă aplicată circuitului, relația (10-63) ne arată că puterea din circuit este dată, la o scară convenabil aleasă, de segmentul din diagramă care reprezintă conductanța G.

Exemplul 10-15. Să se determine, cu ajutorul diagramei cercului, modul cum variază admitanța unui circuit, a cărui rezistență este $R = 5\ \Omega$ și a cărui reactanță X_L variază între zero și infinit.

Soluția: Ne fixăm pentru impedanță o anumită scară, după mărimea pe care vrem să o dăm diagramei, de pildă un centimetru să re-

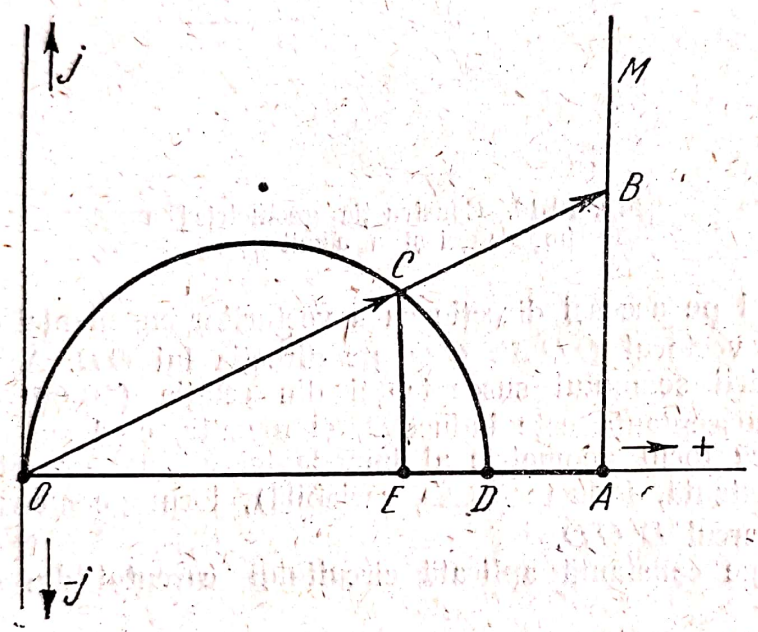


Fig. 10-17. La exemplul 10-15

prezinte 1,25 Ω. Deci scara impedanțelor (inclusiv a rezistențelor și a reactanțelor) este

$$m_Z = 0{,}8\ \Omega/\text{cm} \,.$$

Impedanța $Z = R + j X_L$ devine, pentru $X_L = 0$, $Z = R = 5\Omega$. Construim, în fig. 10-17, pe axa reală un segment $OA = Z = R =$

$$= \frac{5}{m_Z} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25 \text{ cm}.$$

Inductanței $X_L = 0$ îi corespunde o admitanță

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ S} \,.$$

Dacă luăm pentru admitanţe scara

$$m_Y = 0{,}04 \text{ S/cm},$$

admitanţa corespunzătoare este dată de segmentul $OD = Y = G = \frac{0{,}2}{m_Y} = \frac{0{,}2}{0{,}04} = 5$ cm, pe care îl construim tot pe axa reală.

Valorile reactanţei inductive variabile X_L se construiesc, deasupra axei reale, pe dreapta AM, paralelă cu axa imaginară dusă prin punctul A. Locul geometric al vectorului impedanţei fiind dreapta AM, rezultă că locul geometric al vectorului admitanţei, cînd X_L variază între zero şi infinit, este cercul de diametru OD care trece prin punctul O şi al cărui centru se găseşte pe axa reală.

Pentru o valoare oarecare a lui X_L, de pildă pentru $X_L = 2{,}4\ \Omega$, avem $AB = \frac{2{,}4}{m_Z} = \frac{2{,}4}{0{,}8} = 3$ cm. Impedanţa respectivă OB, dată de diagramă, este $OB = 6{,}95$ cm $= 6{,}95 \cdot 0{,}8\ \Omega = 5{,}56\ \Omega$, iar admitanţa OC, dată de diagrama cercului, este $OC = 4{,}5$ cm $= 4{,}5 \cdot 0{,}04$ S $= 0{,}18$ S.

Verificarea rezultatului grafic

$$Z \cdot Y = 5{,}56 \cdot 0{,}18 = 1 \cdot$$

Exemplul 10-16. Să se construiască diagrama curentului în funcţie de reactanţă, dacă la bornele circuitului din exemplul precedent aplicăm o tensiune de 110 V.

Soluţia: Conform relaţiei (10-61), diagrama admitanţei reprezintă la altă scară şi diagrama curentului din circuit. Scara se stabileşte dacă în relaţia (10-61) introducem valoarea admitanţei corespunzătoare lui $X_L = 0$. Avem

$$I = 110 \cdot 0{,}2 = 22 \text{ A} \cdot$$

Curentul în circuit, pentru $X = 0$, este dat pe cerc de segmentul OD, a cărui lungime este de 5 cm. Prin urmare

$$m_I = \frac{22}{5} = 4{,}4 \text{ A/cm} \cdot$$

Curentul corespunzător reactanţei $X_L = 2{,}4\ \Omega$ este

$$I = OC \cdot m_I = 4{,}5 \cdot 4{,}4 = 19{,}80 \text{ A} \cdot$$

Exemplul 10-17. În serie cu o bobină de reactanţă inductivă $X_L = 10\ \Omega$ şi rezistenţă neglijabilă legăm o rezistenţă care variază de la zero la infinit. Se cere să se determine variaţia curentului din circuit, dacă se aplică la borne o tensiune de 220 V.

Soluţia: Se determină diagrama impedanţei, plecînd de la $R = 0$ cînd $Z = R + jX_L = jX_L = 10\ \Omega$. La o scară arbitrară $m_Z = 1{,}6\ \Omega$/cm, construim vectorul $\overline{OA} = \frac{10}{1{,}6} = 6{,}25$ cm, pe direcţia pozitivă a axei imaginare (fig. 10-18). Din punctul A, ducem paralela AM la axa reală, pe

care construim rezistența variabilă R. Această dreaptă reprezintă locul geometric al vîrfurilor vectorilor impedanței.

Pentru $R = 0$ admitanța este $Y = \frac{1}{10} = 0,1$ S. La o scară arbitrară $m_Y = 0,02$ S/cm construim vectorul $OD = \frac{0,1}{0,02} = 5$ cm care constituie diametrul cercului admitanțelor și care reprezintă în același timp și diagrama

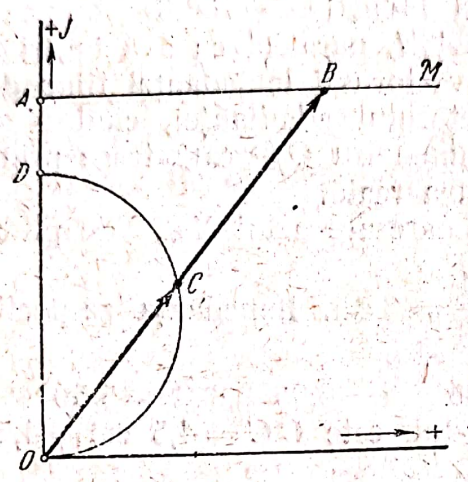


Fig. 10-18. La exemplul 10-17

curentului din circuit. Scara curentului se determină ca în exemplul de mai sus, folosind admitanța corespunzătoare lui $R = 0$.

$$I = 200 \cdot 0,1 = 22 \text{ A},$$

$$m_I = \frac{22}{5} = 4,4 \text{ A/cm}.$$

Valoarea curentului, corespunzătoare unei rezistențe active a circuitului de 8 Ω, ($AB = R = 8\ \Omega = \frac{8}{1,6} = 5$ cm), este

$$I = OC = 39 \text{ cm} \cdot 4,4 \text{ A/cm} = 17,16 \text{ A}.$$

Verificarea pe cale analitică a rezultatului

$$I = \frac{220}{Z} = \frac{220}{\sqrt{10^2 + 8^2}} = \frac{220}{12,8} = 17,16 \text{ A}.$$

CAPITOLUL XI

CURENTUL TRIFAZAT

11-1. Sisteme polifazate

Se numeşte sistem de curenţi polifazaţi un ansamblu de m curenţi alternativi, de aceeaşi frecvenţă, produşi de m forţe electromotoare defazate între ele.

Dacă amplitudinile f.e.m. sînt egale şi diferenţele de fază între două f.e.m. succesive, sînt aceleaşi şi anume egale cu $\frac{2\pi}{m}$, sistemul polifazat de f.e.m. se numeşte *sistem simetric.*

Fiecare circuit independent al unui sistem polifazat se numeşte *fază.*

În practica industrială se produc aproape exclusiv numai curenţi trifazaţi; de aceea, în cele ce urmează ne vom ocupa mai mult de acest fel de curenţi.

11-2. Sisteme trifazate

Un sistem trifazat de curenţi este format din trei curenţi alternativi, independenţi, avînd aceeaşi frecvenţă, produşi de un sistem trifazat simetric de f.e.m., adică de trei f.e.m. egale şi decalate între ele cu $\frac{2\pi}{3}$.

În fig. 11-1 este reprezentată forma cea mai simplă de generator de curenţi trifazaţi. Pe un cilindru inelar de fier sînt fixate trei bobine (înfăşurări), decalate una faţă de alta cu cîte un unghi de $\frac{2\pi}{3}$ (120^0) şi notate în figură cu *1*, *2* şi *3*. Cilindrul de fier împreună cu înfăşurările respective, rămînînd fix în timpul funcţionării maşinii, poartă denumirea de *stator*. Fiecare înfăşurare a statorului constituie cîte o fază a maşinii.

În interiorul cilindrului se roteşte în jurul unui ax, coincizînd cu axul cilindrului, un electromagnet care produce un cîmp magnetic de direcţie radială faţă de cilindrul stator. Electromagnetul poartă numele de *rotorul* maşinii.

Dacă rotorul este învîrtit cu o viteză unghiulară constantă ω, de pildă în sensul săgeții, în cele trei faze ale mașinii se vor induce f.e.m. de aceeași frecvență și amplitudine însă decalate între ele cu $\frac{2\pi}{3}$ dintr-o perioadă, din cauza decalajului geometric dintre bobine egal cu $\frac{2\pi}{3}$.

Vom presupune că cele trei f.e.m. alternative produse sînt sinusoidale și au aceeași amplitudine $E_m = \sqrt{2}E$, E fiind valoarea lor eficace.

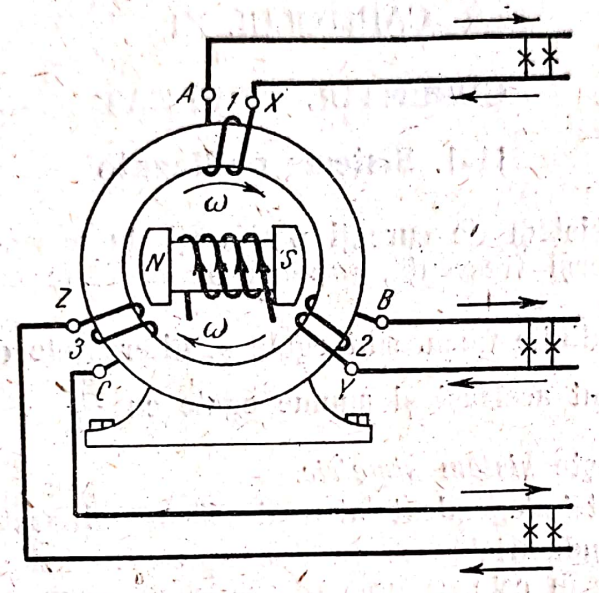


Fig. 11-1. Schema generatorului trifazat

Să luăm ca origine a timpilor momentul cînd f.e.m. din faza *1* trece prin valoarea zero. Această f.e.m. se exprimă, în acest caz, prin relația

$$e_1 = E_m \sin \omega t. \qquad (11\text{-}1)$$

Forța electromotoare indusă în faza 2 a generatorului va fi decalată în întîrziere față de f.e.m. din faza întîia cu $\frac{1}{3}$ dintr-o perioadă și va avea ca expresie

$$e_2 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right). \qquad (11\text{-}1\,a)$$

De asemenea, f.e.m. indusă în faza *3* a generatorului va fi decalată față de faza 2 cu $\frac{1}{3}$ dintr-o perioadă și va avea ca expresie

$$e_3 = E_m \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) = E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \qquad (11\text{-}1\,b)$$

În mărimi complexe, cele trei f.e.m. sinusoidale trifazate sînt date de relaţiile

$$\overline{E}_1 = E, \quad \overline{E}_2 = E\, e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad \overline{E}_3 = E\, e^{-j\frac{4\pi}{3}}. \qquad (11\text{-}2)$$

În fig. 11-2 este reprezentat, vectorial şi prin sinusoide, un sistem simetric trifazat de f.e.m.

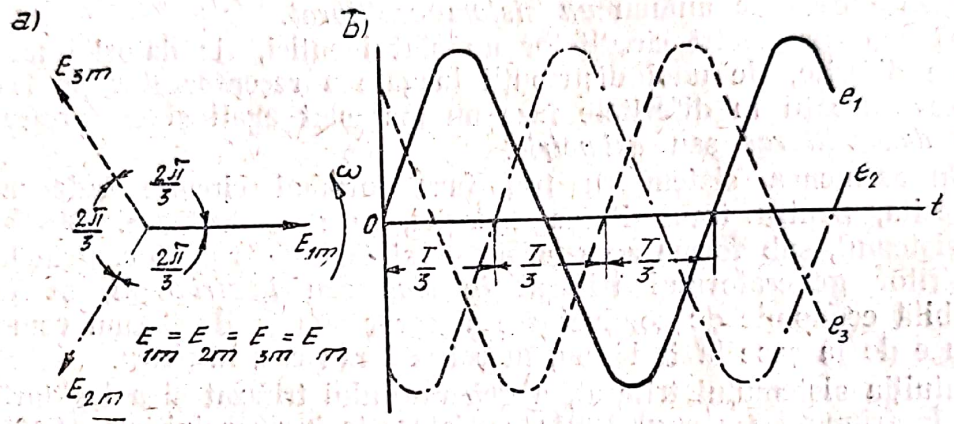


Fig. 11-2. Diagrama vectorială (*a*) şi cea panoramică (*b*) a f.e.m. ale unui sistem simetric trifazat

Să notăm bornele fazei *1* cu *A* şi *X* şi, simetric, cele ale fazei 2 cu *B* şi *Y*, iar cele ale fazei *3* cu *C* şi *Z* şi să numim, în mod convenţional, bornele *A B C începuturi de fază*, iar bornele *X Y Z sfîrşituri de fază*. De asemenea, convenim a socoti ca sens pozitiv al f.e.m., induse în cele trei înfăşurări ale generatorului sensul de la sfîrşitul fazei către începutul ei, în faza întîia spre exemplu de la *X* la *A;* admitem deci că

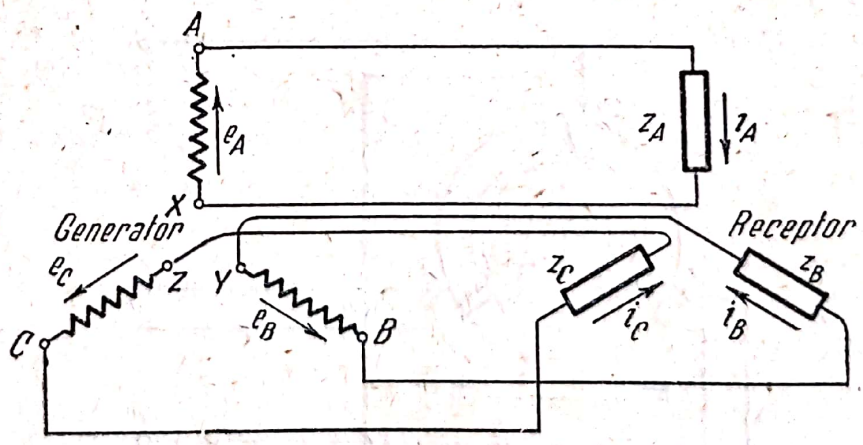


Fig. 11-3. Sistem trifazat cu faze independente

potenţialul la începutul fiecărei faze este mai ridicat decît potenţialul la sfîrşitul ei, diferenţa dintre cele două potenţiale fiind egală cu f.e.m. indusă în fază.

Dacă circuitele fazelor sînt închise pe receptoare externe, ele sînt străbătute de un sistem de curenţi trifazaţi, corespunzători f.e.m. respective.

În felul acesta, fiecare înfășurare a generatorului trifazat constituie o sursă *monofazată* independentă, de energie electrică și circuitul ei se poate închide pe un receptor de energie separat, așa cum este arătat în fig. 11-1 și 11-3.

În practica industrială se prezintă două cazuri:

a) cînd parametri R, L și C ai circuitelor formate de sursă și de receptor sînt identici pentru toate fazele; în acest caz, curenții sînt egali și formează ceea ce numim *un sistem echilibrat.*

b) cînd parametri circuitelor nu sînt identici, fie datorită unor receptoare diferite, fie unei distribuții inegale a receptoarelor pe faze; în acest caz curenții în diferitele faze nu mai sînt egali și ei formează *un sistem dezechilibrat* sau *asimetric.*

Un asemenea sistem cu trei faze formînd circuite independente ar necesita, pentru transmiterea energiei, șase conductoare. Din această cauză sistemul, sub forma aceasta, nu prezintă interes practic. Prin legarea înfășurărilor generatorului trifazat *în stea* sau *în triunghi,* se face o apreciabilă economie de conductoare al căror număr, după cum vom arăta, se reduce de la șase la trei sau, în cel mai rău caz, la patru.

Intuiția sistemului trifazat, a generatorului trifazat și a legăturilor în stea și în triunghi (în anul 1891) se datorește inginerului rus *M. O. Dolivo-Dobrovolschi* (1862-1919).

11-3. Legarea în stea cu fir neutru a fazelor unui generator

În acest mod de legare, sfîrșiturile X Y Z ale fazelor se leagă împreună, formînd ceea ce numim *punctul neutru* al înfășurării generatorului (fig. 11-4).

Conductoarele de legătură dintre generator și receptoare se reduc

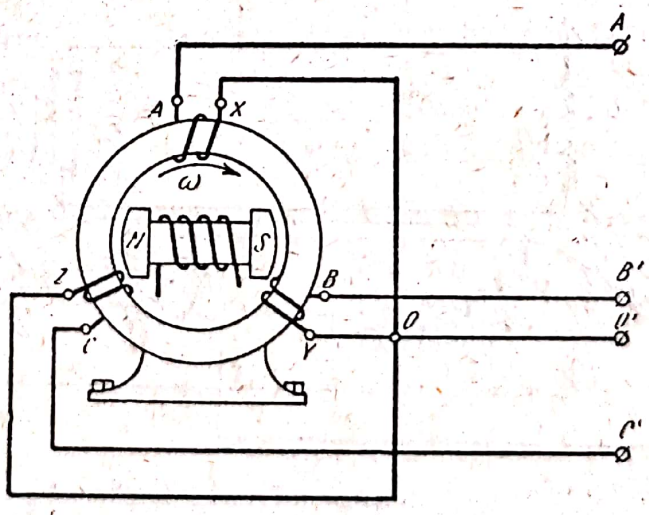


Fig. 11-4. Legarea în stea a fazelor generatorului trifazat

la patru. Trei dintre ele sînt legate la începuturile A, B și C ale fazelor și se numesc *conductoare* sau *fire de fază* sau *de linie.* Conductorul legat la punctul neutru se numește *conductor* sau *fir neutru.*

Legarea în stea a celor trei faze ale generatorului se reprezintă convenţional aşa cum este arătat în fig. 11-5.

Tensiunile dintre începuturile şi sfîrşiturile fazelor, care sînt în acelaşi timp şi tensiunile dintre conductoarele de fază şi firul neutru, se numesc *tensiuni pe fază* sau *tensiuni simple*. Notăm valorile lor instantanee cu u_A, u_B şi u_C, iar valorile lor eficace cu U_A, U_B şi U_C (în general, cînd nu este vorba de o anumită fază, cu U_f). Tensiunea pe fază diferă de f.e.m. pe fază prin căderea de tensiune din faza respectivă.

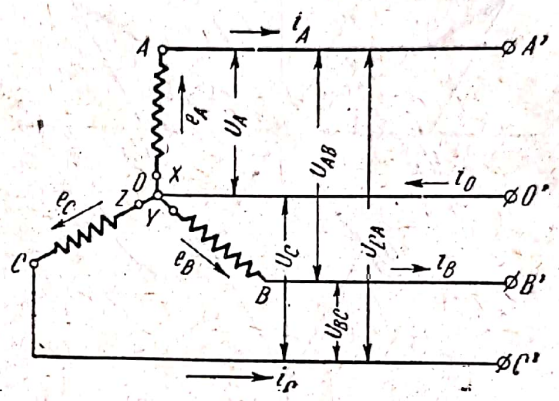


Fig. 11-5. Reprezentarea convenţională a legării fazelor în stea

Tensiunile între începuturile a două faze sau, ceea ce este acelaşi lucru, între conductoarele de linie se numesc *tensiuni pe linie* sau *tensiuni compuse* şi notăm valorile lor instantanee cu u_{AB}, u_{BC} şi u_{CA}, iar cele eficace, cu U_{AB}, U_{BC} şi U_{CA} (în general, cu U_l). Ordinea indicilor la tensiunile pe linie ne indică sensul pozitiv al tensiunii în circuitul exterior. De pildă, dacă legăm un receptor între bornele A şi B ale generatorului (fig. 11-5), sensul pozitiv al tensiunii aplicate acestui receptor este de la A la B.

Să stabilim, în cazul legăturilor în stea, relaţia dintre tensiunile pe linie şi tensiunile pe fază, în ipoteza unui sistem simetric cînd $U_A = U_B = U_C = U_f$ şi decalajul dintre tensiuni este egal cu $\frac{2\pi}{3}$.

După cum se vede din fig. 11-5, sfîrşitul X al primei faze nu este legat cu începutul B al fazei a doua, ci cu sfîrşitul ei Y; deci valoarea instantanee a tensiunii pe linie, dintre conductoarele A şi B (sau dintre bornele A şi B ale maşinii), nu este egală cu suma tensiunilor pe fază corespunzătoare, ci cu diferenţa lor. Avem, prin urmare, următoarele relaţii între valorile instantanee

$$u_{AB} = u_A - u_B, \quad u_{BC} = u_B - u_C \quad \text{şi} \quad u_{CA} = u_C - u_A$$

care, exprimate vectorial, ne dau următoarele ecuaţii

$$\overline{U}_{AB} = \overline{U}_A - \overline{U}_B, \quad \overline{U}_{BC} = \overline{U}_B - \overline{U}_C \quad \text{şi} \quad \overline{U}_{CA} = \overline{U}_C - \overline{U}_A. \qquad (11\text{-}3)$$

În fig. 11-6 este reprezentată construcția vectorială a tensiunilor pe linie din tensiunile pe fază, luîndu-se ca origine de fază, faza vectorului $\overline{U}_A$.

Pentru a se obține vectorul tensiunii pe linie $\overline{U}_{AB}$, se scade geometric vectorul $\overline{U}_B$ din vectorul $\overline{U}_A$ sau, ceea ce este același lucru, se

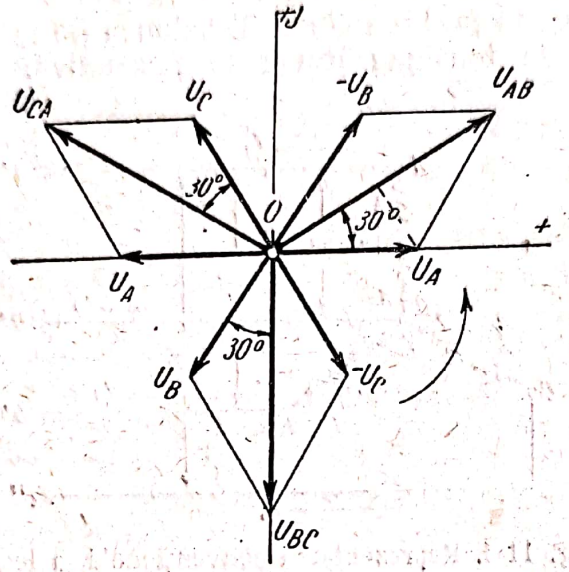


Fig. 11-6. Diagrama vectorială a tensiunilor pe fază și pe linie, la legarea fazelor generatorului în stea

adaugă vectorului $\overline{U}_A$ vectorul $-\overline{U}_B$. Se obține astfel vectorul $\overline{U}_{AB}$. Prin construcții analoge, se obțin vectorii $\overline{U}_{BC}$ și $\overline{U}_{CA}$.

Pentru a determina valoarea tensiunii pe linie în funcție de tensiunea pe fază, să coborîm o perpendiculară din extremitatea unui vector

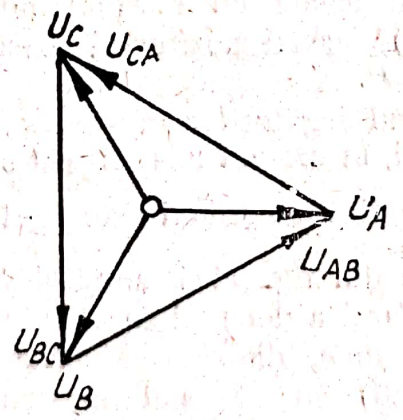


Fig. 11-7 Diagrama vectorială a sistemului trifazat în stea, cu fir neutru

al tensiunii pe o fază oarecare, pe vectorul respectiv al tensiunii pe linie, de pildă din extremitatea vectorului $\overline{U}_A$ pe vectorul tensiunii pe linie $\overline{U}_{AB}$. Obținem un triunghi dreptunghic, din care rezultă

$$\frac{1}{2} U_l = U_f \cos 30° = U_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de unde

$$U_l = \sqrt{3}\, U_f. \qquad (11\text{-}4)$$

La același rezultat am fi ajuns analitic, utilizînd una din relațiile vectoriale (11-3), exprimate în mărimi complexe.

Prin urmare, *valoarea eficace a tensiunii pe linie este de* $\sqrt{3}$ *ori mai mare decît valoarea eficace a tensiunii pe fază.*

Din diagrama vectorială (fig. 11-6) mai rezultă că tensiunea pe linie U_{AB} este defazată cu 30^0 înainte față de tensiunea pe fază U_A și că același defazaj există între tensiunea pe linie U_{BC}, respectiv U_{CA} și tensiunile pe fază U_B, respectiv U_C.

Ca și tensiunile pe fază, tensiunile pe linie sînt decalate una față de alta cu 120^0. Steaua formată de vectorii tensiunilor pe linie este decalată în avans cu 30^0 față de steaua tensiunilor pe fază.

După cum rezultă din fig. 11-7, se pot determina vectorii tensiunilor de linie din vectorii tensiunilor pe fază, construind triunghiul format de vîrfurile vectorilor tensiunilor pe fază.

11-4. Legarea în triunghi a fazelor unui generator

În acest mod de legare al celor trei faze (fig. 11-8) se leagă sfîrșitul X al primei faze cu începutul B al fazei a doua, apoi sfîrșitul Y al fazei a doua cu începutul C al fazei a treia și, însfîrșit, sfîrșitul Z al

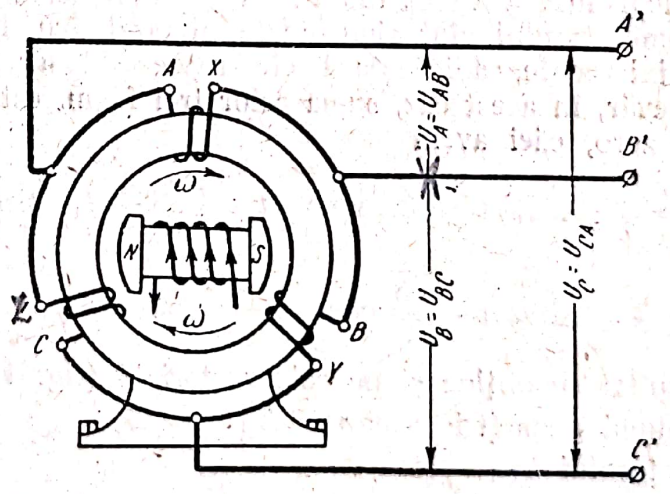


Fig. 11-8. Legarea în triunghi a fazelor generatorului trifazat

celei de a treia faze cu începutul A al primei faze. Cele trei faze formează deci un circuit închis.

Legătura cu receptoarele de energie se face prin trei conductoare exterioare care pornesc din punctele de legătură dintre faze.

În fig. 11-9 este dată reprezentarea convențională a legării în triunghi a fazelor generatorului. După cum rezultă din fig. 11-8 și 11-9, în acest mod de legare a fazelor tensiunea pe linie este egală cu cea pe fază, deci avem $U_l = U_f$.

Circuitul închis format de cele trei faze are, în general, o impedanţă relativ mică. Este evident că o asemenea legare a fazelor nu se poate face decît în cazul cînd suma f.e.m. induse în circuit este nulă, adică

$$e_A + e_B + e_C = 0.$$

În cazul cînd suma f.e.m. nu se anulează, curentul care ar lua naştere în circuit, din cauza impendanţei reduse a acestuia, ar putea atinge valori

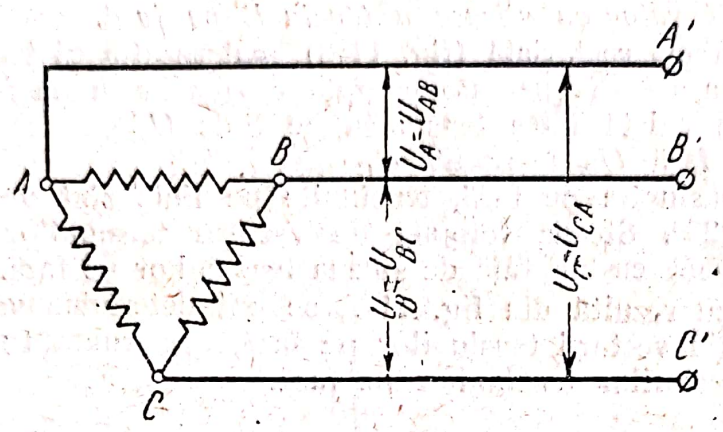


Fig. 11-9. Reprezentarea convenţională a legării fazelor în triunghi

foarte mari, ceea ce ar duce la o încălzire excesivă a generatorului, uneori cu consecinţe grave, chiar cînd maşina nu debitează nici un curent în circuitul exterior, adică cînd funcţionează, cum se spune, „în gol".

Acest pericol însă este exclus în cazul cînd f.e.m. induse în cele trei faze ale generatorului sînt sinusoidale, defazate cu 1/3 de perioadă şi au amplitudini egale, adică dacă ele reprezintă un sistem trifazat simetric. Într-adevăr, în acest caz, suma celor trei f.e.m. este, în orice moment, egală cu zero, căci avem

$$e_A + e_B + e_C = E_m \sin \omega t + E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= E_m\left(\sin \omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t - \frac{1}{2}\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) = 0.$$

Acelaşi rezultat se obţine şi pe cale vectorială (fig. 11-10).

Dacă se adună geometric vectorul $\overline{E}_A$ cu $\overline{E}_B$, se obţine un vector egal şi opus vectorului $\overline{E}_C$

$$\overline{E}_A + \overline{E}_B = -\overline{E}_C.$$

De unde rezultă că suma celor trei vectori este egală cu zero

$$\overline{E}_A + \overline{E}_B + \overline{E}_C = -\overline{E}_C + \overline{E}_C = 0.$$

O legare greşită în triunghi a fazelor poate duce la consecinţe grave pentru generatorul electric.

În fig. 11-11 este arătată schema unei legări greşite, în care faza a treia este legată invers decît trebuie, adică, în loc să se lege începutul C al acelei faze cu sfîrşitul Y al fazei a doua şi sfîrşitul Z cu începutul A al fazei întîia, s-a legat, din greşală, începutul C cu începutul A şi sfîrşitul Z cu sfîrşitul Y.

Efectul acestei legături greşite este că f.e.m. E_C, în loc să se adune la suma celorlalte două f.e.m. induse, se scade din această sumă. Efectuînd suma geometrică a celor trei vectori $\bar{E}_A$, $\bar{E}_B$ şi $\bar{E}_C$ (fig. 11-12), obţinem

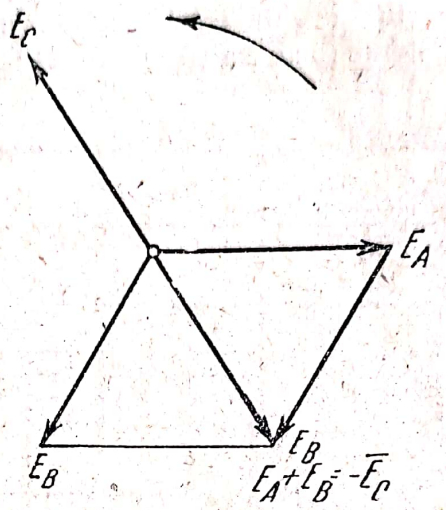


Fig. 11-10. Diagrama vectorială a legării fazelor în triunghi

ca f.e.m. rezultantă în circuitul închis al triunghiului,

$$\bar{E}_A + \bar{E}_B + (-\bar{E}_C) = -2\,\bar{E}_C.$$

Deci, în loc ca cele trei f.e.m. din circuitul triunghiului să se anuleze, cum se întîmplă în cazul legăturilor corecte, ele dau o rezultantă

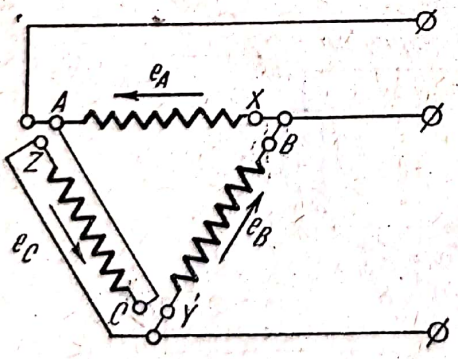


Fig. 11-11. Schema unei legări greşite a fazelor în triunghi

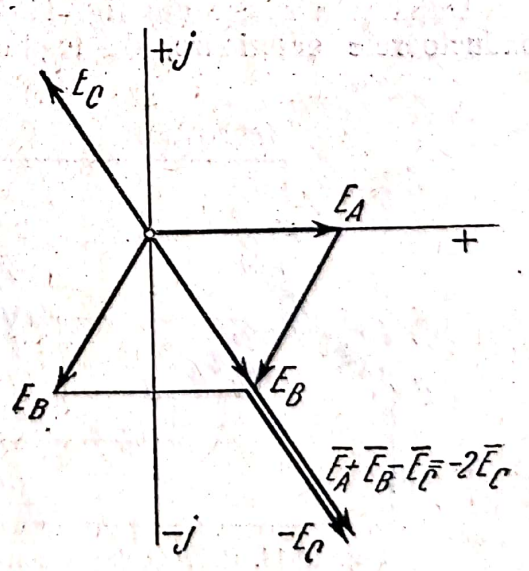


Fig. 11-12. Diagrama vectorială a unei legări în triunghi greşite

egală cu dublul tensiunii induse într-o fază. Dată fiind impedanţa foarte mică a circuitului închis, format de înfăşurările celor trei faze, legătura greşită este practic echivalentă cu un scurtcircuit.

Scanned with OKEN Scanner

11-5. Legarea în stea a receptoarelor electrice

Ca şi înfăşurările generatoarelor, receptoarele electrice pot fi legate în stea. Receptoare electrice pot fi lămpile cu incandescenţă, înfăşurările fazelor motoarelor electrice de curent alternativ, înfăşurările fazelor transformatoarelor, circuitele cuptoarelor electrice etc. În cazul curenţilor trifazaţi se obţin două sisteme: cu patru şi cu trei conductoare.

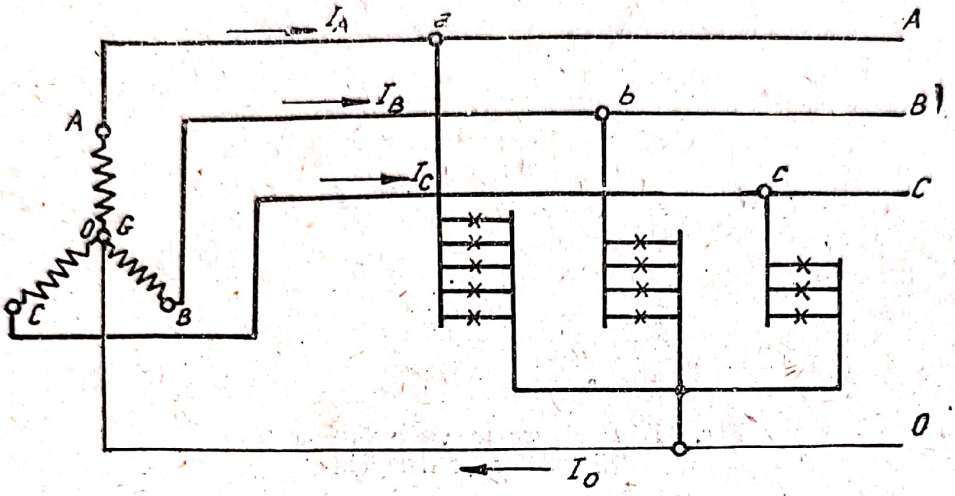


Fig. 11-13. Legarea receptoarelor în stea, cu trei conductoare şi fir neutru, în cazul încărcării neuniforme a fazelor.

În sistemul trifazat cu patru conductoare, care se utilizează atunci cînd fazele sînt încărcate inegal, receptoarele electrice sînt legate între firul neutru şi fiecare din conductoarele de fază (fig. 11-13 şi 11-14).

După cum reiese din fig. 11-13 şi 11-14, intensităţile curenţilor din conductoarele exterioare, de legătură între generator şi receptoare, sînt

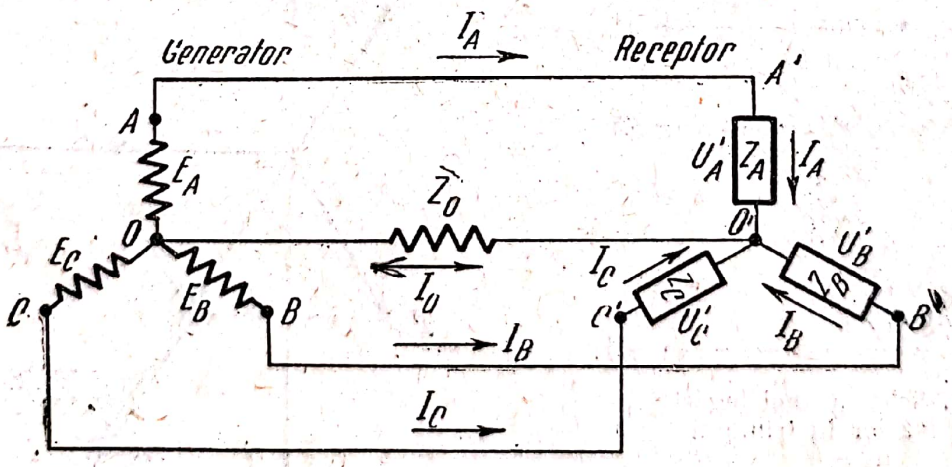


Fig. 11-14. Reprezentarea convenţională a legării receptoarelor în stea cu fir neutru

egale cu intensităţile curenţilor din fazele corespunzătoare ale receptoarelor şi ale generatorului, deci, în valori eficace,

$$I_l = I_f. \qquad (11\text{-}5)$$

Dacă fazele sînt încărcate uniform și impedanțele conductoarelor dintre generator și receptoare sînt egale, avem de-a face cu un sistem echilibrat și tensiunile în punctele de distribuție sînt egale între ele și defazate cu același unghi, adică formează un sistem simetric. Dacă însă fazele sînt inegal încărcate, curenții și tensiunile pe diferitele faze nu mai sînt egale. În asemenea condiții, funcționarea sistemului de receptoare legate fără fir neutru este practic imposibilă, din cauza apariției între faze a unor tensiuni diferite.

Firul neutru reduce nesimetria sistemului.

Să examinăm cazul de încărcare nesimetrică reprezentat în fig. 11-14, în care fazele receptorului au impedanțe diferite și conductorul neutru are o impedanță oarecare. Se presupun neglijabile impedanțele fazelor generatorului și ale conductoarelor de fază.

Aplicînd relația (3-13), a metodei tensiunii între noduri, în care introducem mărimile complexe ale sistemului (în locul conductanțelor G din curentul continuu, admitanțele Y), tensiunea dintre neutrul generatorului și acela al receptorului este dată de relația

$$\overline{U}_0 = \frac{\overline{E}_A \overline{Y}_A + \overline{E}_B \overline{Y}_B + \overline{E}_C \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C + \overline{Y}_0}, \qquad (11\text{-}6)$$

în care $\overline{E}_A$, $\overline{E}_B$ și $\overline{E}_C$ sînt f.e.m. produse de generator, care pot fi și nesimetrice, $\overline{Y}_A$, $\overline{Y}_B$ și $\overline{Y}_C$, admitanțele fazelor receptorului și $\overline{Y}_0$, admitanța firului neutru.

În fig. 11-15 este reprezentată diagrama vectorială a tensiunilor

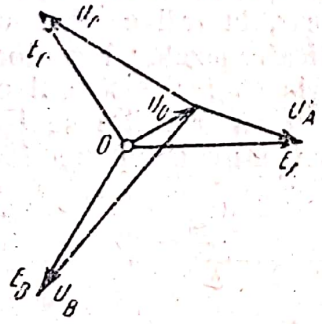


Fig. 11-15. Diagrama vectorială a tensiunilor pe fazele receptorului

pe fazele receptorului. După cum rezultă din figură, avem

$$\begin{aligned} \overline{U}'_A &= \overline{E}_A - \overline{U}_0 ; \\ \overline{U}'_B &= \overline{E}_B - \overline{U}_0 ; \\ \overline{U}'_C &= \overline{E}_C - \overline{U}_0 . \end{aligned} \qquad (11\text{-}7)$$

Curenții în fazele generatorului și ale receptorului precum și în conductoarele de linie sînt dați de relațiile

$$\overline{I}_A = \overline{U}'_A \cdot \overline{Y}_A ; \quad \overline{I}_B = \overline{U}'_B \cdot Y_B ; \quad \overline{I}_C = \overline{U}'_C \cdot \overline{Y}_C , \qquad (11\text{-}8)$$

iar curentul în conductorul neutru este

$$\overline{I}_0 = -\overline{U}_0\,\overline{Y}_0 \cdot \qquad (11\text{-}9)$$

Cînd $\overline{U}_0 \neq 0$, chiar dacă f.e.m. ale generatorului sînt simetrice, tensiunile $\overline{U}_A$, $\overline{U}_B$ și $\overline{U}_C$ sînt nesimetrice, după cum rezultă clar și din diagrama vectorială reprezentată în fig. 11-15. Nesimetria tensiunilor la bornele receptoarelor legate între diferitele faze ale distribuției va fi cu atît mai accentuată, cu cît $\overline{U}_0$ este mai mare. Pentru a se evita această nesimetrie se caută a se avea o tensiune $\overline{U}_0$ cît mai aproape de zero. Aceasta se poate obține, în primul rînd, printr-o repartizare uniformă a sarcinii pe diferitele faze ale distribuției, adică realizînd egalitatea

$$\overline{Y}_A = \overline{Y}_B = \overline{Y}_C = \overline{Y}_f \cdot$$

Dacă f.e.m. ale generatorului formează un sistem simetric, avem, în acest caz,

$$\overline{E}_A\,\overline{Y}_A + \overline{E}_B\,\overline{Y}_B + \overline{E}_C\,\overline{Y}_C = (\overline{E}_A + \overline{E}_B + \overline{E}_C)\,\overline{Y}_f = 0$$

și relația (11-6) se anulează, deci

$$\overline{U}_0 = 0 \cdot$$

Curentul din firul neutru, potrivit relației (11-9), se anulează de asemenea

$$\overline{I}_0 = -\overline{U}_0\,\overline{Y} = 0 \cdot$$

În aceste condiții, firul neutru devine inutil și el se suprimă. Distribuția se reduce, în acest caz, la trei conductoare, conductoarele de fază (fig. 11-16). Tensiunile aplicate fazelor receptorului formează practic un sistem simetric și tot simetric este și sistemul curenților absorbiți.

Prin urmare, în sistemul cu trei fire se leagă în stea numai receptoarele care prezintă aceeași impedanță pe toate cele trei faze și în

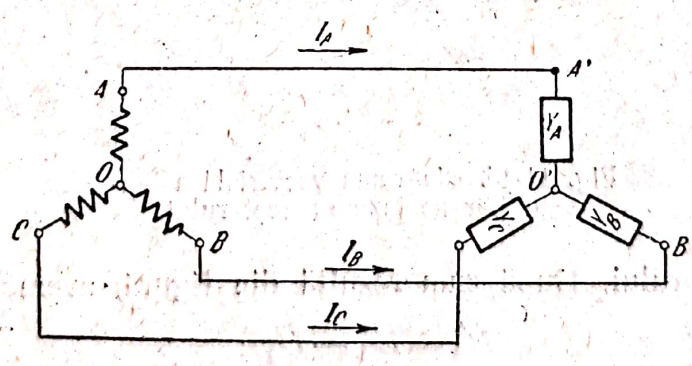


Fig. 11-16. Receptor de energie legat în stea și alimentat prin trei conductoare

această situație sînt, în primul rînd, transformatoarele și motoarele electrice trifazate precum și orice aparat trifazat.

Calculul unui asemenea sistem se reduce la calculul unei singure faze a sistemului. Într-adevăr, în acest caz, fazele receptorului au aceleași rezistențe R_f și aceleași reactanțe X_f deci aceeași impedanță Z_f (fig. 11-16).

Dacă U_l este tensiunea pe linie care alimentează receptorul, tensiunea pe fază aplicată acestuia este

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} ,$$

iar curentul pe fază

$$I_f = \frac{U_f}{Z_f} .$$

Unghiul de decalaj dintre curentul pe fază și tensiunea pe fază este dat de relația

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{X_f}{R_f} ,$$

iar cosinusul și sinusul acestui unghiu, de relațiile

$$\cos \varphi = \frac{R_f}{Z_f} \quad \text{și} \quad \sin \varphi = \frac{X_f}{Z_f} .$$

Curenții formează o stea simetrică, decalată cu unghiul φ față de steaua simetrică a tensiunilor aplicate (fig. 11-17).

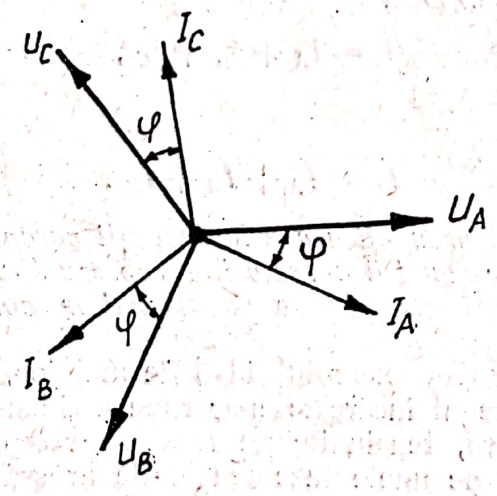


Fig. 11-17. Diagrama vectorială a tesiunilor și curenților pe fază în cazul sistemului de curenți echilibrat

Un alt mijloc de a suprima tensiunea U_0, dată de relația (11-6), este de a da conductorului neutru o impedanță neglijabilă. În acest caz $\overline{Y}_0 = \infty$ și relația devine

$$\overline{U}_0 = \frac{\overline{E}_A \overline{Y}_A + \overline{E}_B \overline{Y}_B + \overline{E}_C \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C + \infty} = 0 . \qquad (11\text{-}10)$$

Prin urmare, în cazul încărcării neuniforme a fazelor, cînd impedanțele receptoarelor sînt diferite, pentru a asigura simetria tensiunilor apli-

cate trebuie să prevedem sistemul cu un fir neutru de o impedanță cît mai redusă.

Receptoarele care necesită distribuție cu un fir neutru sînt, în primul rînd, lămpile electrice, aparatele de încălzit, aparatele menajere și, în general, orice receptor care nu asigură o încărcare riguros uniformă a celor trei faze.

Curenții unui sistem dezechilibrat, cu fir neutru (fig. 11-14), sînt dați de relațiile (11-8). Ei constituie un sistem asimetric de curenți.

Unghiurile de decalaj dintre curenți și tensiunile pe fază corespunzătoare se calculează cu ajutorul tangentelor respective, date de relațiile

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{X_A}{R_A}\ ,\ \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{X_B}{R_B}\ ,\ \operatorname{tg} \varphi_C = \frac{X_C}{R_C} \qquad (11\text{-}11)$$

sau cu ajutorul cosinusurilor respective

$$\cos \varphi_A = \frac{R_A}{Z_A}\ ,\ \cos \varphi_B = \frac{R_B}{Z_B}\ ,\ \cos \varphi_C = \frac{R_C}{Z_C}\ . \qquad (11\text{-}12)$$

În firul neutru va circula un curent a cărui intensitate instantanee este egală, conform primei legi a lui Kirchhoff, cu suma intensităților instantanee ale curenților pe fază. Deci

$$i_0 = i_A + i_B + i_C\ ,$$

de unde

$$\overline{I}_0 = \overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C\ . \qquad (11\text{-}13)$$

Prin urmare, *valoarea eficace a intensității curentului din firul neutru este dată de suma geometrică a vectorilor reprezentînd intensitățile eficace ale curenților pe fază sau de suma mărimilor complexe ale acestor curenți.*

După cum arătăm în exemplul 11-3 de mai jos, dacă la o asemenea distribuție cu faze inegal încărcate s-ar rupe accidental sau s-ar întrerupe intenționat firul neutru, tensiunile pe fază ale receptorului ar lua valori diferite una de alta: pe unele faze tensiunile ar scădea, iar pe altele ar crește peste valorile lor normale, ceea ce ar putea periclita receptoarele. De aceea, pe firul neutru al distribuțiilor nu se pune siguranță, care prin topire ar putea întrerupe acest conductor.

Exemplul 11-1. Un generator cu o f.e.m. simetrică de 220 V pe fază, alimentează, printr-o distribuție trifazată cu fir neutru, trei receptoare monofazate, montate cîte unul pe fiecare fază. Receptoarele au impedanțele $Z_A = 16\ \Omega$, $Z_B = 10\ \Omega$ și $Z_C = 40\ \Omega$ (sarcini active). Impedanța Z_0 a firului neutru se consideră practic egală cu zero ($Z_0 = 0$). Se cere să se calculeze curenții în receptoare, în cazul că neglijăm impedanțele fazelor generatorului și ale conductoarelor de linie.

Soluția: Deoarece $Z_0 = 0$, rezultă că $Y_0 = \infty$ și, potrivit relației (11-10),

$$\overline{U}_0 = 0\ .$$

Tensiunile la bornele receptoarelor sînt date de relaţiile (11-7) în care, făcînd $\overline{U}_0 = 0$, obţinem

$$\overline{U}'_A = \overline{E}_A\,,\quad \overline{U}'_B = \overline{E}_B \text{ şi } \overline{U}'_C = \overline{E}_C\,.$$

Curenţii sînt daţi de relaţiile (11-8), care devin

$$\overline{I}_A = \overline{E}_A\,\overline{Y}_A\,,\quad \overline{I}_B = \overline{E}_B\,\overline{Y}_B,\quad \overline{I}_C = \overline{E}_C\,\overline{Y}_C\,.$$

Vom avea

$$Y_A = \frac{1}{16} = 0{,}0625\text{ S}\,;\quad Y_B = \frac{1}{10} = 0{,}1\text{ S}\,;\quad Y_C = \frac{1}{40} = 0{,}025\text{ S}\,.$$

Luăm faza vectorului E_A ca origine de fază. Vom avea

$$E_A = 220\text{ V}\,;$$

$$\overline{E}_B = E_A\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 220\left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (-110 - j\sqrt{3}\cdot 110)\,;$$

$$\overline{E}_C = E_A\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E_A\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = (-110 + j\sqrt{3}\cdot 110)\text{ V}\,.$$

Rezultă valorile curenţilor

$$I_A = 220\cdot 0{,}0625 = 13{,}75\text{ A},\quad I_A = 13{,}75\text{ A}\,;$$

$$\overline{I}_B = (-110 - j\sqrt{3}\cdot 110)\cdot 0{,}1 = (-11 - j\sqrt{3}\cdot 11)\text{ A}\,;$$

$$I_B = \sqrt{11^2 + 3\cdot 11^2} = 11\sqrt{(1+3)} = 22\text{ A}\,;$$

$$\overline{I}_C = (-110 + j\sqrt{3}\,110)\cdot 0{,}025 = (-2{,}75 + j\sqrt{3}\cdot 2{,}75)\text{ A}\,;$$

$$I_C = \sqrt{2.75^2 + 3\cdot 2{,}75^2} = 2{,}75\sqrt{1+3} = 5{,}50\text{ A}\,.$$

Curentul $\overline{I}_0$ din firul neutru este dat de relaţia (11-13) care, ţinînd seama şi de sensul acestui curent, devine

$$\overline{I}_0 = -(\overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C) =$$

$$= -(13{,}75 - 11 - j\sqrt{3}\,1{,}1 - 2{,}75 + j\sqrt{3}\cdot 2{,}75) = +j\sqrt{3}\cdot 8{,}75\text{ A}\,;$$

$$I_0 = 15{,}14\text{ A}\,.$$

Exemplul 11-2. La o reţea trifazată, fără fir neutru, sînt legate în stea trei bobine identice de rezistenţă $R = 8\,\Omega$ şi reactanţă inductivă $X_L = 8\,\Omega$. Tensiunea reţelei este de 380 V între faze. Se cere tensiunea care revine fiecărei bobine, curenţii şi decalajele respective.

Soluţia: Fiecare bobină constituie cîte o fază a ansamblului de receptoare. Prin urmare

$$U_f = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220\text{ V}\,.$$

Impedanța fiecărei bobine fiind $Z = \sqrt{10^2 + 8^2} = 12{,}8\ \Omega$, curenții în bobine sînt

$$I_f = \frac{220}{12{,}8} = 17{,}18\ \text{A},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{10} = 0{,}8, \quad \varphi = 38°40'.$$

Exemplul 11-3. La o rețea trifazată, cu fir neutru, cu tensiunea între faze de 220 V, sînt legate trei grupuri de lămpi, fiecărui grup corespunzîndu-i respectiv impedanțele $Z_A = 12{,}5\ \Omega$, $Z_B = 16\ \Omega$ și $Z_C = 40\ \Omega$. Se cere să se determine tensiunile la bornele fiecărui grup de lămpi dacă la un moment dat, printr-un accident, se întrerupe firul neutru.

Soluția: Prin întreruperea firului neutru $Z_0 = \infty$, deci $Y_0 = 0$ și relația (11-3) devine

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

Luăm faza lui $\underline{E}_A$ ca origine de fază. Vom avea

$$\underline{E}_A = \frac{220}{\sqrt{3}}\ \text{V};$$

$$\underline{E}_B = \frac{220}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{110}{\sqrt{3}} - j\,110\right)\ \text{V};$$

$$\underline{E}_C = \frac{220}{\sqrt{3}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} = \left(-\frac{110}{\sqrt{3}} + j\,110\right)\ \text{V}.$$

Admitanțelor fazelor sînt

$$Y_A = \frac{1}{12{,}5} = 0{,}08\ \text{S};\quad Y_B = \frac{1}{16} = 0{,}0625\ \text{S};$$

$$Y_C = \frac{1}{40} = 0{,}025\ \text{S}.$$

Rezultă ca valoare a tensiunii între punctele neutre

$$U_0 = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}08 + \left(-\frac{110}{\sqrt{3}} - j\,110\right) 0{,}0625 + \left(-\frac{110}{\sqrt{3}} + j\,110\right) 0{,}025}{0{,}08 + 0{,}0625 + 0{,}025} =$$

$$= (27{,}5 - j\,24{,}63)\ \text{V}.$$

Tensiunile pe fiecare fază sînt date de relațiile (11-7)

$$\underline{U}'_A = \underline{E}_A - \underline{U}_0 = \frac{220}{\sqrt{3}} - 27{,}52 + j\,24{,}63 = (100{,}52 + j\,24{,}63)\ \text{V},$$

$$U_A = \sqrt{100{,}52^2 + 24{,}63^2} = 103{,}49\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_B = \overline{E}_B - \overline{U}_0 = -\frac{110}{\sqrt{3}} - j\,110 - 27{,}50 + j\,24{,}63 = (-91{,}08 - j85{,}37)\ \text{V},$$

$$U_B = \sqrt{91{,}08^2 + 85{,}37^2} = 124{,}83\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_C = \overline{E}_C - \overline{U}_0 = -\frac{110}{\sqrt{3}} + j\,110 - 27{,}5 + j\,24{,}63 = (91{,}08 + j\,134{,}63)\ \text{V},$$

$$U_C = \sqrt{91{,}01^2 + 134{,}63^2} = 162{,}5\ \text{V}.$$

Tensiunea pe fază, atunci cînd există firul neutru fiind

$$U_f = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127\ \text{V},$$

înseamnă că, prin întreruperea firului neutru, lămpile de pe faza *A* vor fi subvoltate, deci vor funcţiona cu o intensitate luminoasă redusă, în vreme ce lămpile de pe faza C vor fi supravoltate, ceea ce va provoca o rapidă uzură a lor.

11-6. Sisteme dezechilibrate de receptoare legate în stea fără fir neutru

Ne propunem să examinăm modul cum variază tensiunile pe fază la sarcini dezechilibrate ale receptoarelor legate în stea fără fir neutru. Pentru aceasta, ne vom servi de metoda grafică a diagramei vectoriale, numită *diagrama topografică* a tensiunilor, care ne permite determinarea tensiunilor dintre diferitele puncte ale circuitului respectiv.

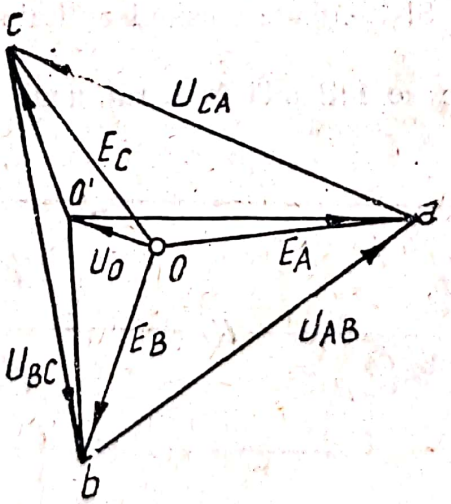


Fig. 11-18. Diagrama topografică a receptorului legat în stea şi alimentat prin trei conductoare şi fir neutru

Să construim diagrama topografică pentru cazul general al sistemului trifazat în stea cu patru fire din fig. 11-18. În acest scop, vom lua ca origine a diagramei punctul neutru al generatorului, al cărui potenţial îl presupunem egal cu zero. Construind vectorii f.e.m. induse în fazele generatorului, obţinem steaua *Oabc*.

În ipoteza că neglijăm căderea de tensiune în fazele generatorului datorită sarcinii, vectorii $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ și $\overline{Oc}$ ai f.e.m. ne reprezintă și vectorii tensiunilor pe fază $\overline{U}_A$, $\overline{U}_B$ și $\overline{U}_C$ la bornele generatorului, deci punctele a, b și c ale diagramei corespund bornelor A, B, C ale generatorului. De asemenea, vectorii $\overline{b\,a}$, $\overline{c\,b}$ și $\overline{a\,c}$, dați de diferențele $\overline{E}_A - \overline{E}_B$, $\overline{E}_B - \overline{E}_C$ și $\overline{E}_A - \overline{E}_C$, în ipoteza făcută, ne reprezintă în mărime, direcție și sens vectorii tensiunilor pe linie $\overline{U}_{AB}$, $\overline{U}_{BC}$ și $\overline{U}_{CA}$.

Dacă din punctul O construim vectorul $\overline{U}_0$ care reprezintă potențialul punctului neutru al receptorului și care este dat de relația (11-6), obținem punctul O' din diagramă care corespunde punctului O' al circuitului real. Vectorii $\overline{O'a}$, $\overline{O'b}$ și $\overline{O'c}$ ne reprezintă, în ipoteza că neglijăm căderile de tensiune pe conductoarele de linie, tensiunile $\overline{U}'_A$, $\overline{U}'_B$ și $\overline{U}'_C$ pe fazele receptoarelor.

Diagrama topografică poate lua diferite aspecte, după valorile parametrilor circuitului.

Cînd, printr-o încărcare simetrică a fazelor, avem de-a face cu un sistem echilibrat (un sistem simetric) de curenți sau cînd impedanța firului neutru este neglijabilă, avem, conform celor stabilite în par. precedent, $\overline{U}_0 = 0$. În asemenea cazuri, punctele neutre ale generatorului și receptorului au același potențial și punctul O' cade pe diagramă în O.

Dacă nu este satisfăcută nici una din condițiile de mai sus, apare diferența de potențial $\overline{U}_0$, dintre cele două puncte neutre și punctul O' se deplasează în sensul vectorului $\overline{U}_0$. Numim această deplasare, *deplasarea neutrului la receptor*. Sistemul de tensiuni aplicate la bornele receptorului devine nesimetric.

Să examinăm ce se întîmplă în cazul unui sistem simetric de ten-

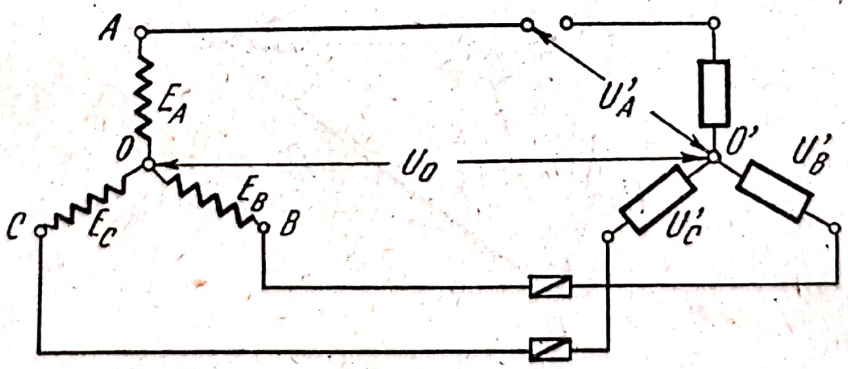


Fig. 11-19. Sistem trifazat în stea fără fir neutru, în cazul întreruperii unuia din conductoarele de linie

siuni aplicat unui receptor cu impedanțele fazelor egale sau a unui grup de trei receptoare simetrice, legate în stea fără fir neutru, dacă se întrerupe accidental unul din conductoarele de linie (fig. 11-19), de pildă conductorul A, prin arderea siguranței puse pe acest conductor.

În acest caz $Z_0 = \infty$, deci $Y_0 = 0$ (lipsa firului neutru) și $Z_A = \infty$, deci $Y_A = 0$ (întreruperea legăturii dintre linie și receptorul A). În aceste condiții, relația (11-6) devine

$$\overline{U}_0 = \frac{\overline{E}_A \cdot 0 + \overline{E}_B \overline{Y}_B + \overline{E}_C \overline{Y}_C}{0 + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C + 0} = \frac{\overline{Y}_B (\overline{E}_B + \overline{E}_C)}{2\overline{Y}_C}$$

și receptoarele B și C sînt parcurse de același curent. Rezultă, ținînd seama că $E_B + E_C = -E_A$,

$$\overline{U}_0 = -\frac{\overline{E}_A}{2} \cdot \qquad (11\text{-}14)$$

Pe diagrama topografică (fig. 11-20 a) punctul neutru al ansamblului

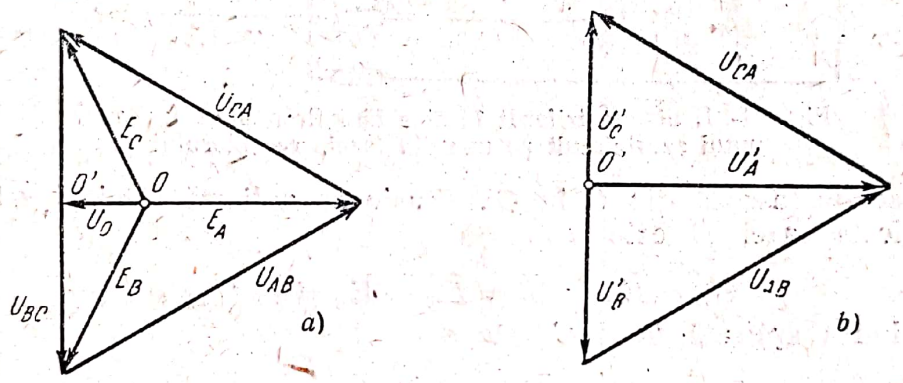


Fig. 11-20. Diagramele topografice corespunzătoare circuitului din fig. 11-19

de receptoare se deplasează din O în O'. Tensiunea aplicată receptorului A este zero din cauza întreruperii conductorului, însă tensiunea la bornele siguranței sale arse este

$$\overline{U}'_A = \overline{E}_A - \overline{U}_0 = \frac{3}{2}\overline{E}_A .$$

Tensiunea la bornele receptorului B este

$$\overline{U}'_B = \overline{E}_B - \overline{U}_0 = \overline{E}_B - \frac{\overline{E}_B + \overline{E}_C}{2} = \frac{\overline{E}_B - \overline{E}_C}{2} = \frac{\overline{U}_{BC}}{2} ,$$

iar tensiunea la bornele receptorului C,

$$\overline{U}'_C = \overline{E}_C - \overline{U}_0 = \overline{E}_C - \frac{\overline{E}_B + \overline{E}_C}{2} = -\frac{\overline{U}_{BC}}{2} .$$

Toate aceste rezultate analitice sînt ilustrate în diagrama topografică din fig. 11-20 b.

Dacă în același sistem simetric și echilibrat, cu fazele receptorului în stea fără fir neutru, se produce un scurtcircuit al fazei A (sau al recep-

torului A) deci $Z_A = 0$ (fig. 11-21), relaţia (11-6) devine, înmulţind numărătorul şi numitorul cu $\overline{Z}_A$,

$$\overline{U}_0 = \frac{\overline{E}_A + \overline{E}_B \overline{Y}_B \overline{Z}_A + \overline{E}_C \overline{Y}_C \overline{Z}_A}{1 + \overline{Z}_A (\overline{Y}_B + \overline{Y}_C)} = \overline{E}_A . \qquad (11\text{-}15)$$

Pe diagrama topografică (fig. 11-22), punctul neutru al fazelor recep-

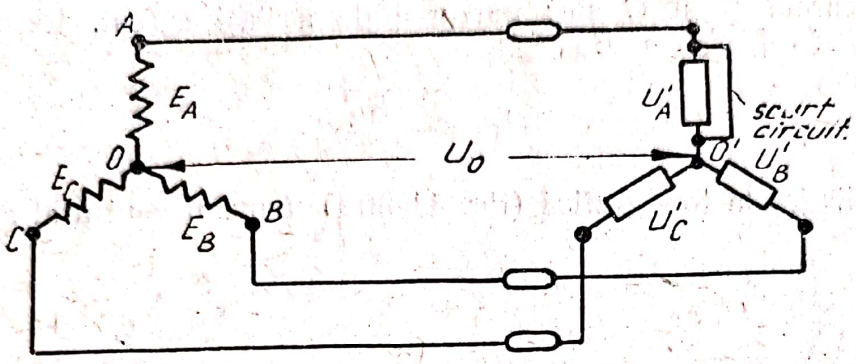


Fig. 11-21. Sistem trifazat în stea fără fir neutru, în cazul unui scurtcircuit pe una din fazele receptorului

torului se deplasează din O în O'. Tensiunea aplicată fazei A este nulă, cea aplicată fazei B este

$$\overline{U}'_B = \overline{E}_B - \overline{U}_0 = \overline{E}_B - \overline{E}_A = -\overline{U}_{AB} ,$$

iar tensiunea aplicată fazei C este

$$\overline{U}'_C = \overline{E}_C - \overline{E}_A = \overline{U}_{CA} .$$

Aceste rezultate analitice rezultă şi grafic din diagrama topografică reprezentată în fig. 11-22.

Deci, la scurtcircuitarea accidentală a unei faze, tensiunea pe celelalte două faze se măreşte de $\sqrt{3}$ ori.

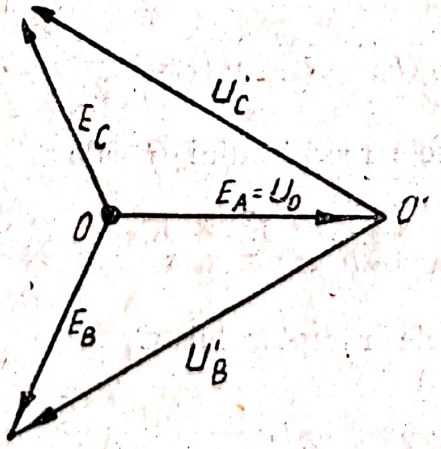


Fig. 11-22. Diagrama topografică a circuitului din fig. 11-21

Din aceste cazuri extreme rezultă că, atunci cînd impedanţa receptorului legat pe una din fazele stelei fără fir neutru variază de la zero

la infinit, tensiunile ce revin receptoarelor, constituind celelalte două faze ale sistemului, variază, ca mărime, de la $\sqrt{3}$ ori tensiunea lor nominală, la $\frac{\sqrt{3}}{2}$ din această tensiune. Este evident că o asemenea variație face imposibilă funcționarea acestor receptoare. De pildă, în cazul cînd este vorba de o distribuție de lumină, dacă una din fazele sistemului este scurtcircuitată, lămpile de pe celelalte două faze se vor arde. De aceea, asemenea circuite de iluminat se fac cu fir neutru chiar în cazul unei sarcini echilibrate și, pentru a se evita o eventuală rupere a conductorului neutru, acesta se execută din oțel.

11-7. Expresia puterii în cazul receptoarelor legate în stea

a) **Sistemul de curent este echilibrat și simetric.** Puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă a unei faze sînt date de relațiile

$$P_f = U_f I_f \cos \varphi, \quad Q_f = U_f I_f \sin \varphi, \quad S_f = U_f I_f.$$

Puterea pe toate cele trei faze, adică puterea absorbită de receptor este

$$P = 3 P_f = 3 U_f I_f \cos \varphi;$$

$$Q = 3 Q_f = 3 U_f I_f \sin \varphi;$$

$$S = 3 S_f = 3 U_f I_f.$$

Dacă se ține seama că, în cazul receptoarelor în stea, $I_f = I_l$ și $U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$, expresiile puterilor sistemului trifazat în stea, echilibrat, în care intră tensiunea și curentul pe linie, sînt date de relațiile

$$P = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l \cos \varphi = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi; \qquad (11\text{-}16)$$

$$Q = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l \sin \varphi = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin \varphi; \qquad (11\text{-}17)$$

$$S = 3 \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l = \sqrt{3}\, U_l I_l. \qquad (11\text{-}18)$$

b) **Sistemul de curenți este dezechilibrat.** Dacă tensiunile aplicate nu sînt simetrice sau dacă fazele receptorului sînt încărcate inegal, puterile pe fază sînt diferite și puterile totale active, reactive și aparente absorbite de receptor sînt date de sumele puterilor respective pe fază

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C; \qquad (11\text{-}19)$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C; \qquad (11\text{-}20)$$

$$S = S_A + S_B + S_C = U_A I_A + U_B I_B + U_C I_C. \qquad (11\text{-}21)$$

Exemplul 11-4. Un generator electric trifazat cu fazele legate în stea, avînd o rezistenţă pe fază de 0,4 Ω şi o reactanţă inductivă de 3,2 Ω, funcţionează cu o tensiune de fază de 6 500 V. Generatorul debitează pe un receptor ale cărui faze, egale, legate de asemenea în stea, au o rezistenţă de 24 Ω şi o reactanţă inductivă de 10 Ω. Să se determine: a) curentul debitat de generator; b) puterile debitate şi c) f.e.m. induse în fazele generatorului. Se neglijează impedanţa conductoarelor de legătură dintre generator şi receptor.

Soluţia: a) Curentul pe fază al generatorului este $I = \frac{U}{Z}$, în care Z, impedanţa receptorului, este $Z = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\ \Omega$;

$$I_f = \frac{6\,500}{26} = 250\ \text{A}.$$

b) Puterea activă absorbită de receptor, care este totodată cea debitată de generator, este $P = 3\,U_f I_f \cos\varphi$, în care factorul de putere al receptorului ($\cos\varphi$) se determină din

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{10}{24} = 0{,}416\ ;\ \varphi = 22°40',\ \cos\varphi = 0{,}923$$

sau, mai rapid, din relaţia $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{24}{26} = 0{,}923$. Deci puterea activă este

$$P = 3 \cdot 6\,500 \cdot 250 \cdot 0{,}923 = 0{,}4875 \cdot 0{,}923 \cdot 10^3\,\text{W} = 4\,500 \cdot 10^3\,\text{W} = 4\,500\ \text{kW}.$$

Puterea reactivă $Q = 3\,U_f I_f \sin\varphi$, în care $\sin 22^0\,40^{00\prime} = 0{,}385$;

$$Q = 3 \cdot 6\,500 \cdot 250 \cdot 0{,}385 = 4\,875 \cdot 0{,}385 \cdot 10^3\ \text{var} = 1\,876{,}88\ \text{kvar}.$$

Puterea aparentă

$$S = 3 \cdot 6\,500 \cdot 250 = 4\,875 \cdot 10^3\ \text{V A} = 4\,875\ \text{kVA}.$$

La aceleaşi rezultate am fi ajuns aplicînd relaţiile (11-16), (11-17) şi (11-18).

c) F.e.m. a fiecărei faze a generatorului este dată de relaţia $E = Z_t\,I$ în care Z_t este impedanţa întregului circuit corespunzător unei faze a sistemului generator-receptor

$$Z_t = \sqrt{(24 + 0{,}4)^2 + (10 + 3{,}2)^2} = 27{,}74\ \Omega.$$

Rezultă

$$E_A = E_B = E_C = E_f = 27{,}74 \cdot 250 = 6\,935\ \text{V}.$$

Prin urmare, în înfăşurarea generatorului are loc o pierdere de tensiune pe fază

$$\Delta U_f = E_f - U_f = 6\,935 - 6\,500 = 435\ \text{V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

11-8. Legarea în triunghi a receptoarelor electrice

În acest mod de legare a receptoarelor electrice (fig. 11-23 și 11-24), diferitele faze ale acestora se conectează între conductoarele exterioare care vin de la generator. În modul acesta, fiecărei faze a receptorului i se aplică întreaga tensiune pe linie, care pentru receptor este, în acest caz, și tensiune pe fază. Vom avea deci

$$\overline{U}_A = \overline{U}_{AB};\ \overline{U}_B = \overline{U}_{BC};\ \overline{U}_C = \overline{U}_{CA}, \text{ deci } \overline{U}_f = \overline{U}_l,$$

iar curenții din diferitele faze vor fi dați de relațiile

$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = \overline{U}_{AB} \cdot \overline{Y}_{AB};$$

$$\overline{I}_{BC} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}_{BC}} = \overline{U}_{BC} \cdot \overline{Y}_{BC}; \qquad (11\text{-}22)$$

$$\overline{I}_{CA} = \frac{\overline{U}_{CA}}{\overline{Z}_{CA}} = \overline{U}_{CA} \cdot \overline{Y}_{CA}.$$

Spre deosebire de legarea în stea, la legarea în triunghi a recep-

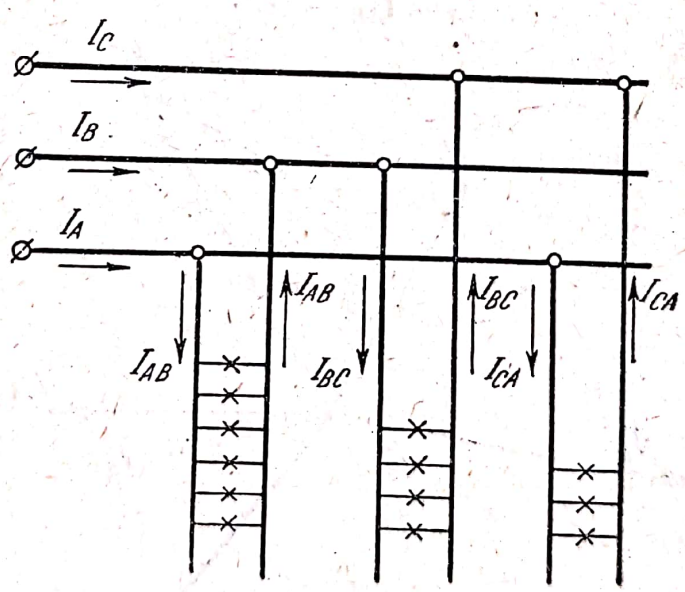


Fig. 11-23. Legarea în triunghi a receptoarelor electrice într-o distribuție cu fazele încărcate neegal

toarelor electrice tensiunea pe fază nu depinde de impedanțele fazelor receptorului.

Să stabilim acum relațiile între curenții pe linie și curenții pe fază. Vom admite ca sens pozitiv al curenților pe fază în receptor, sensul căderilor de tensiune, adică (fig. 11-24) de la A' la B', de la B' la C' și de la C' la A'. Pentru conductoarele exterioare, vom alege ca semn

pozitiv sensul de la generator la receptor, așa cum este indicat în figurile 11-23 și 11-24.

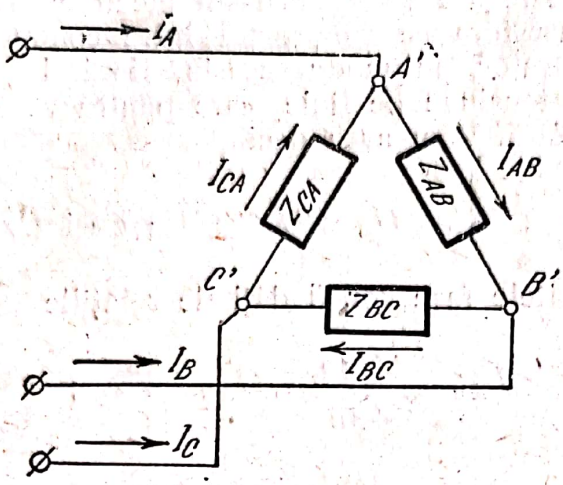


Fig. 11-24. Reprezentarea convențională a legării în triunghi a receptoarelor

Aplicînd nodului A' (fig. 11-24) legea întîia a lui Kirchhoff, avem următoarea relație între valorile instantanee

$$i_A + i_{CA} = i_{AB},$$

de unde rezultă

$$i_A = i_{AB} - i_{CA}. \qquad (11\text{-}23)$$

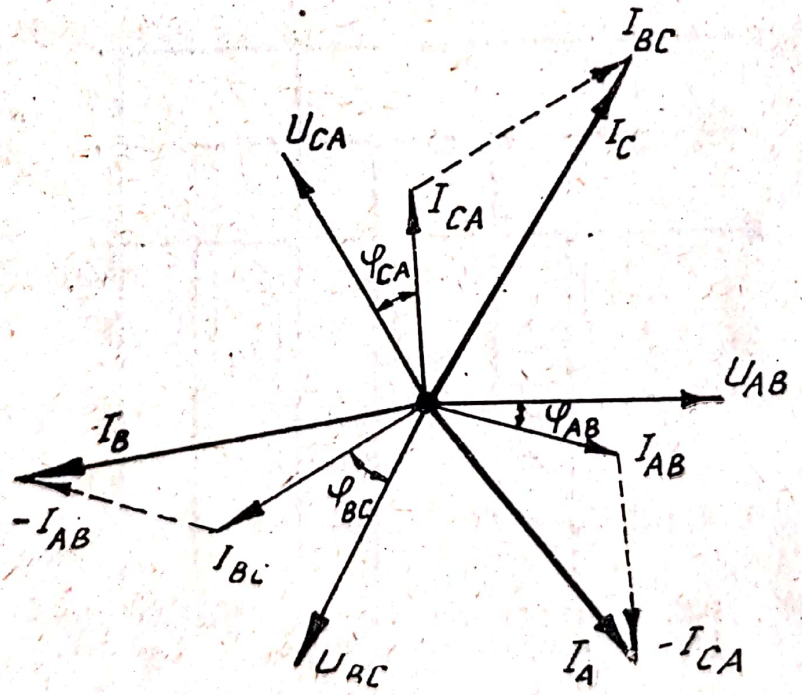


Fig. 11-25. Diagrama vectorială a legării receptorului în triunghi, cu fazele încărcate neegal

Analog avem pentrul nodul B'

$$i_B = i_{BC} - i_{AB} \qquad (11\text{-}24)$$

și pentru nodul C',

$$i_C = i_{CA} - i_{BC}. \qquad (11\text{-}25)$$

Rezultă că valoarea instantanee a curentului pe linie, dintr-un conductor oarecare, este egală cu diferența aritmetică dintre valorile instantanee ale curenților din fazele legate cu acel conductor.

Vectorial, vom avea

$$\begin{aligned} \overline{I}_A &= \overline{I}_{AB} - \overline{I}_{CA}\,; \\ \overline{I}_B &= \overline{I}_{BC} - \overline{I}_{AB}\,; \\ \overline{I}_C &= \overline{I}_{CA} - \overline{I}_{BC}\,. \end{aligned} \qquad (11\text{-}26)$$

În fig. 11-25 este reprezentată diagrama vectorială trifazată în cazul general al unui sistem de receptoare legate în triunghi, în care impedanțele Z_{AB}, Z_{BC} și Z_{CA} pe faze sînt inegale. Chiar dacă aplicăm sistemului o tensiune trifazată simetrică (cazul figurii), curenții și decalajele pe fază ale receptoarelor sînt diferite.

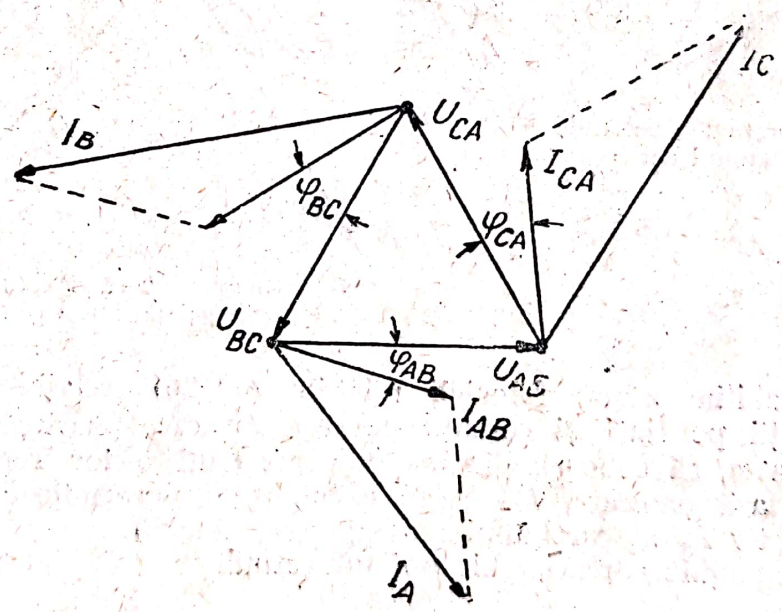


Fig. 11-26. Un alt aspect 1 diagramei vectoriale din fig. 11-25

În această diagramă, toți vectorii au fost construiți cu origine comună. Uneori, pentru mai multă claritate, vectorii pot fi supuși unei mișcări de translație, adică aduși într-o poziție paralelă cu cea inițială, așa fel încît vectorii tensiunilor să formeze un triunghi (fig. 11-26).

În fig. 11-27 este redată diagrama vectorială pentru cazul unei încărcări active, deci în care $Z_{AB} = R_{AB}$, $Z_{BC} = R_{BC}$, $Z_{CA} = R_{CA}$. Curenții pe fază sînt în fază cu tensiunile respective.

Dacă încărcarea fazelor legate în triunghi este uniformă şi impedanţele circuitelor conţin, pe lîngă rezistenţă, şi reactanţă, vom avea

$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = Z_f \quad \text{şi} \quad \varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \varphi .$$

Urmează că valorile eficace ale curenţilor pe fază sînt egale şi curenţii au acelaşi decalaj faţă de tensiunile respective, deci sînt defazaţi între ei cu 120° şi formează un sistem echilibrat. Acelaşi lucru se întîmplă şi cu curenţii pe linie care formează o stea, decalată faţă de steaua curenţilor pe fază cu 30° în întîrziere (fig. 11-28).

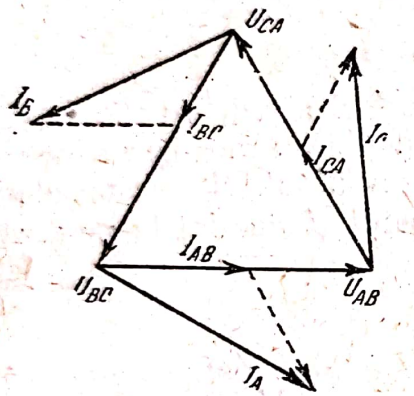


Fig. 11-27. Diagrama vectorială în cazul sarcinii active

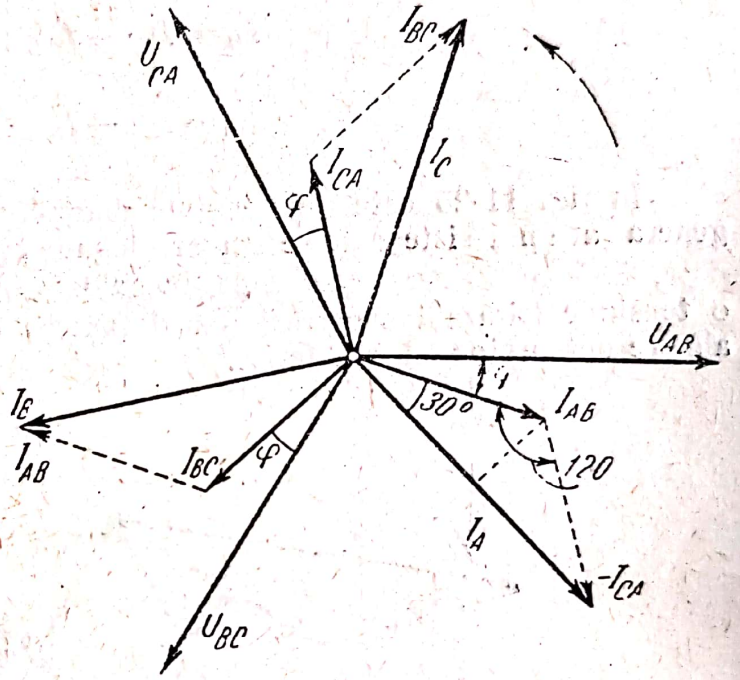


Fig. 11-28. Diagrama vectorială în cazul încărcării uniforme

Să stabilim acum, folosind relaţiile (11-26), relaţia de legătură între curenţii pe linie şi curenţii pe fază în cazul încărcării uniforme. Pentru aceasta, să coborîm din extremităţile unui vector reprezentînd un curent pe fază oarecare, I_{AB} spre exemplu, o perpendiculară pe vectorul respectiv I_A al curentului pe linie (fig. 11-28).

Din triunghiul dreptunghic obţinut rezultă

$$\frac{1}{2} I_l = I_f \cos 30° = I_f \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de unde

$$I_l = \sqrt{3}\, I_f . \qquad (11\text{-}27)$$

Urmează deci că curenţii pe linie sînt de $\sqrt{3}$ ori mai mari decît curenţii pe fază.

La același rezultat ajungem și pe cale analitică, cu ajutorul relațiilor (11-26) în care exprimăm curenții în cantități complexe.

În concluzie, dacă fazele sînt egal încărcate, calculul circuitului trifazat legat în triunghi se reduce la calculul unei singure faze. În acest caz

$$U_f = U_l ,$$

curentul pe fază

$$I_f = \frac{U_f}{Z_f}$$

și curentul pe linie

$$I_l = \sqrt{3}\, I_f .$$

Cosinusul și sinusul unghiului de decalaj dintre curentul pe fază și tensiunea pe fază sînt date de expresiile

$$\cos \varphi = \frac{R_f}{Z_f} ; \quad \sin \varphi = \frac{X_f}{Z_f} .$$

În relațiile stabilite mai sus, în cazul încărcării neuniforme a fazelor, am presupus că neglijăm căderile de tensiune diferite în fazele generatorului și pe conductoarele de legătură dintre generator și receptoare, deci că avem la receptoare un sistem simetric de tensiuni.

La rezolvarea problemelor în care trebuie să ținem seama și de aceste căderi de tensiune este necesar ca triunghiul sarcinii să fie transformat într-o stea echivalentă și la impedanțele acesteia din urmă să adăugăm impedanțele conductoarelor de linie și eventual ale înfășurărilor generatoarelor. În modul acesta, putem determina cu precizie distribuția curenților și a tensiunilor.

Transformarea conexiunilor în triunghi în conexiuni în stea o facem cu ajutorul relațiilor (10-44) care, cu notațiile din fig. 11-14 și 11-24 ale curentului trifazat, devin

$$\underline{Z}'_A = \frac{\underline{Z}_{CA}\,\underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} ,$$

$$\underline{Z}'_B = \frac{\underline{Z}_{AB}\,\underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} , \qquad (11\text{-}28)$$

$$\underline{Z}'_C = \frac{\underline{Z}_{BC}\,\underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA}} .$$

În cazul unei încărcări echilibrate, $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$, și ecuațiile (11-28) devin

$$Z_A = Z_B = Z_C = \frac{Z_{AB}}{3} = \frac{Z_{BC}}{3} = \frac{Z_{CA}}{3} . \qquad (11\text{-}29)$$

Exemplul 11-5. Un generator cu o tensiune la borne de 380 V alimentează trei grupuri de lămpi electrice, montate în stea, fiecare grup avînd cîte o rezistență activă $Z_{AB} = R_{AB} = 20\,\Omega$, $Z_{BC} = R_{BC} = 25\,\Omega$ și $Z_{CA} = R_{CA} = 30\,\Omega$. Rezistența conductoarelor dintre generator și cele trei grupuri de lămpi este de 0,8 Ω, iar inductanța, neglijabilă. Se cere valoarea curenților în linie și pe fază.

Soluția: Impedanțele fazelor stelei echivalente sînt

$$\overline{Z}'_A = \frac{\overline{Z}_{CA} \cdot \overline{Z}_{AB}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} = \frac{30 \cdot 20}{75} = \frac{600}{75} = 8\ \Omega;$$

$$\overline{Z}'_B = \frac{\overline{Z}_{AB} \cdot \overline{Z}_{BC}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} = \frac{20 \cdot 25}{75} = \frac{500}{75} = 6{,}67\ \Omega;$$

$$\overline{Z}'_C = \frac{\overline{Z}_{BC} \cdot \overline{Z}_{CA}}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{CA}} = \frac{25 \cdot 30}{75} = \frac{750}{75} = 10\ \Omega.$$

Impedanțele conductoarelor de legături fiind în serie cu impedanțele stelei echivalente, vom avea ca impedanță și admitanță a fiecărei faze

$$\overline{Z}_A = \overline{Z}'_A + \overline{Z}''_A = 8 + 0{,}8 = 8{,}8\ \Omega, \quad \overline{Y}_A = \frac{1}{8{,}8} = 0{,}114\ \text{S};$$

$$\overline{Z}_B = \overline{Z}'_B + \overline{Z}''_B = 6{,}67 + 0{,}8 = 7{,}47\ \Omega, \quad \overline{Y}_B = \frac{1}{7{,}47} = 0{,}134\ \text{S};$$

$$\overline{Z}_C = \overline{Z}'_C + \overline{Z}''_C = 10{,}0 + 0{,}8 = 10{,}8\ \Omega, \quad \overline{Y}_C = \frac{1}{10{,}8} = 0{,}0926\ \text{S}.$$

Tensiunile pe fază ale generatorului au ca valoare

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220\ \text{V}$$

sau, în valori complexe,

$$\overline{U}_A = 220\ \text{V}; \quad \overline{U}_B = (-110 - j\,190)\ \text{V}; \quad \overline{U}_C = (-110 + j\,190)\ \text{V}.$$

Deplasarea neutrului (tensiunea între noduri) este

$$\overline{U}'_0 = \frac{\overline{U}_A \overline{Y}_A + \overline{U}_B \overline{Y}_B + \overline{U}_C \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C} =$$

$$= \frac{220 \cdot 0{,}114 + (-110 - j\,190) \cdot 0{,}184 + (-110 + j\,190) \cdot 0{,}0926}{0{,}117 + 0{,}134 + 0{,}0926}$$

$$\overline{U}'_0 = \frac{0{,}14 - j\,7{,}87}{0{,}341} = (0{,}41 - j\,23{,}08)\ \text{V}.$$

Curenții pe linie în valori complexe,

$$\overline{I}_A = (\overline{U}_A - \overline{U}'_0)\,\overline{Y}_A = (220 - 0{,}41 + j\,23{,}9)\,0{,}114 = (25{,}03 + j\,2{,}72)\ \text{A};$$

$$\overline{I}_B = (\overline{U}_B - \overline{U}'_0)\,\overline{Y}_B = (-110 - j\,190 - 0{,}41 + j\,23{,}9)\,0{,}134 =$$

$$= (-14{,}79 - j\,22{,}26)\ \text{A};$$

$$\overline{I}_C = (\overline{U}_C - \overline{U}_0)\,\overline{Y}_C = (-110 + j\,190 - 0{,}41 + j\,23{,}9)\,0{,}0926 =$$

$$= (-10{,}22 + j\,19{,}8)\ \text{A}.$$

Pentru calculul curenților pe fază în impedanțele $\overline{Z}_{AB}$, $\overline{Z}_{BC}$ și $\overline{Z}_{CA}$ ale triunghiului este necesar să cunoaștem tensiunile $\overline{U}'_{AB}$, $\overline{U}'_{BC}$, $\overline{U}'_{CA}$, între conductoarele de linie, în punctele de alimentare ale triunghiului format de grupurile de lămpi. Pentru aceasta, trebuie să calculăm mai întîi căderile de tensiune în fazele stelei echivalente

$$\overline{U}'_A = \overline{I}_A \overline{Z}'_A = (25{,}03 + j\,2{,}72) \cdot 8 = (200{,}24 + j\,21{,}76)\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_B = \overline{I}_B \overline{Z}'_B = (-14{,}79 - j\,22{,}26) \cdot 6{,}67 = (-28{,}65 - j\,148{,}47)\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_C = \overline{I}_C \overline{Z}'_C = (-10{,}22 + j\,19{,}8) \cdot 10 = (-102{,}2 + j\,198)\ \text{V};$$

urmează, pentru tensiunile pe linie,

$$\overline{U}'_{AB} = \overline{U}'_A - \overline{U}'_B = 200.24 + j\,21{,}76 + 98{,}65 + j\,148{,}47 =$$

$$(298{,}89 + j\,170{,}23)\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_{BC} = \overline{U}'_B - \overline{U}'_C = -98{,}65 - j\,148{,}47 + 102{,}2 - j\,198 = (3{,}55 - j\,346{,}47)\ \text{V};$$

$$\overline{U}'_{CA} = \overline{U}'_C - \overline{U}'_A = -102{,}2 + j\,198 - 200{,}24 - j\,21{,}76 =$$

$$= (-302{,}44 + j\,176{,}24)\ \text{V}.$$

Cunoscînd tensiunile pe linie, curenții pe fază în rezistențele legate în triunghi al grupurilor de lămpi sînt

$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{U}'_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{298{,}89 + j\,170{,}23}{20} = (14{,}945 + j\,8{,}511)\ \text{A}, \quad I_{AB} = 17{,}25\ \text{A};$$

$$\overline{I}_{BC} = \frac{\overline{U}'_{BC}}{\overline{Z}_{BC}} = \frac{3{,}55 - j\,346{,}47}{25} = (0{,}142 - j\,13{,}86)\ \text{A}, \quad I_{BC} = 13{,}87\ \text{A};$$

$$\overline{I}_{CA} = \frac{\overline{U}'_{CA}}{\overline{Z}_{CA}} = \frac{-302{,}44 + j\,176{,}24}{30} = (-10{,}08 + j\,5{,}87)\ \text{A}, \quad I_{CA} = 11{,}67\ \text{A}.$$

11-9. Expresia puterii în cazul receptoarelor legate în triunghi

Dacă sistemul de tensiuni aplicate este un sistem simetric și încărcarea receptoarelor pe cele trei faze este uniformă, puterea activă, reactivă și aparentă a unei faze sînt date de relațiile

$$P_f = U_f \cdot I_f \cos\varphi;\quad Q_f = U_f \cdot I_f \sin\varphi;\quad S = U_f \cdot I_f$$

și puterile totale pe cele trei faze se determină cu ajutorul relațiilor

$$P = 3P_f = 3U_f I_f \cos\varphi;$$

$$Q = 3Q_f = 3U_f I_f \sin\varphi;$$

$$S = 3S = 3U_f I_f.$$

Ţinînd seama că în legarea în triunghi $U_f = U_l$ şi $I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$, relaţiile de mai sus devin

$$P = 3 U_f I_f \cos \varphi = 3 U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi ; \qquad (11\text{-}30)$$

$$Q = \sqrt{3}\, U_l I_l \sin \varphi ; \qquad (11\text{-}31)$$

$$S = \sqrt{3}\, U_l I_l . \qquad (11\text{-}32)$$

Prin urmare, expresia puterii în sistemul trifazat simetric în funcţie de U_l şi I_l este aceeaşi, indiferent de conexiunea (triunghi sau stea) a fazelor.

Dacă sistemul tensiunilor aplicate nu este simetric sau dacă fazele receptoarelor sînt încărcate neuniform, puterile active, reactive şi aparente ale sistemului trifazat se determină ca sume ale puterilor respective din diferitele faze, cu ajutorul aceloraşi expresii pe care le-am dedus pentru cazul legării receptoarelor în stea.

11-10. Cîmpuri învîrtitoare

Se numeşte *cîmp învîrtitor* un cîmp magnetic care se roteşte în jurul unui ax perpendicular pe direcţia liniilor sale de forţă. În fig. 11-29 este reprezentat un astfel de cîmp învîrtitor, realizat pe cale mecanică prin învîrtirea unui magnet sau a unui electromagnet în jurul unui ax perpendicular pe direcţia cîmpului. Acesta ar fi cazul, de pildă, al inductorului unui generator de curent continuu, în care indusul ar fi fix şi inductorul

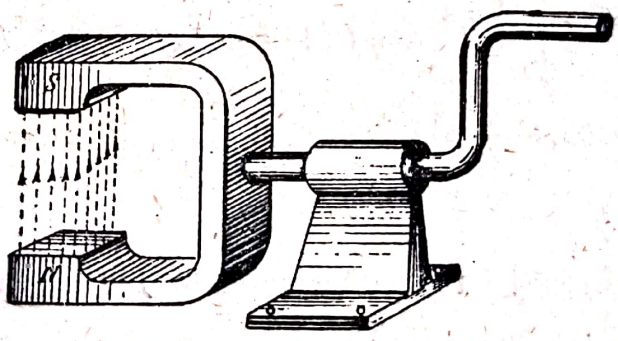


Fig. 11-29. Dispozitiv mecanic pentru producerea unui cîmp învîrtitor

s-ar învîrti, sau al unui alternator, în care obişnuit indusul este fix şi inductorul se învîrteşte.

În modul acesta se produce, în general, cîmpul învîrtitor inductor în generatoarele de energie electrică.

În motoarele de curent alternativ, cîmpul învîrtitor necesar funcţionării lor nu se produce pe cale mecanică ca mai sus, ci pe cale electrică, utilizîndu-se o proprietate importantă a curenţilor alternativi, aceea de a produce, cu ajutorul unor înfăşurări fixe montate pe statorul maşinilor, cîmpuri magnetice învîrtitoare.

Scanned with OKEN Scanner

11-11. Cîmpul pulsatoriu şi componentele sale învîrtitoare

Să considerăm un cilindru de oţel, pe suprafaţa căruia se aşează o înfăşurare de curent electric (fig. 11-30). Cilindrul se găseşte în interiorul unui inel de oţel, coaxial cu acesta aşa încît întrefierul se păstrează constant.

Să presupunem că alimentăm înfăşurarea cu curent continuu. Vom obţine o distribuţie a cîmpului de inducţie în întrefier aşa cum se arată în figură. Din cauza refracţiei magnetice (par. 6-13), direcţia liniilor de forţă în întrefier este perpendiculară atît pe suprafaţa interioară a inelului, cît şi pe cea periferică a cilindrului. Avem ceea ce numim un *cîmp magnetic radial*. Considerăm inducţia pozitivă cînd liniile magnetice ies din cilindru şi negativă, cînd intră în cilindru. Valoarea maximă a inducţiei în întrefier, pe care o notăm cu B_m, are loc după axul înfăşurării, deci în

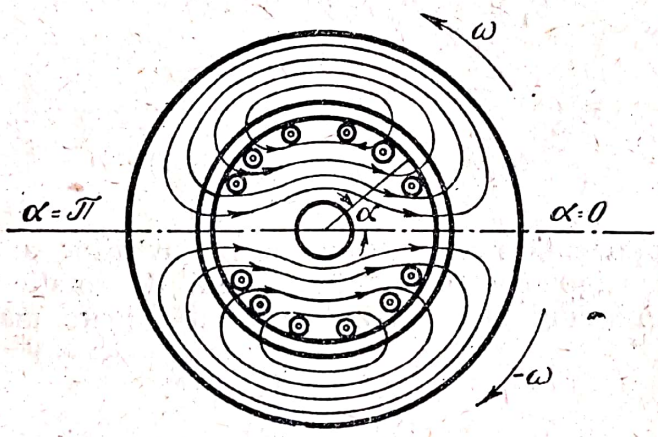


Fig. 11-30. Cîmp magnetic pulsatoriu

punctele în care unghiul α, pe care raza vectoare a acestor puncte îl face cu direcţia pozitivă a axului înfăşurării, este egal cu zero sau cu $\pm\,\pi$, după sensul curentului în înfăşurare. În punctele unde acest unghi este egal cu $\pm\frac{\pi}{2}$, inducţia în întrefier este egală cu zero.

Printr-o anumită repartizare a conductoarelor înfăşurării pe suprafaţa cilindrului, se poate realiza o distribuţie sinusoidală a inducţiei magnetice în întrefier, adică se poate creea un *cîmp magnetic radial, cu distribuţie sinusoidală*. În acest caz, într-un punct oarecare al întrefierului inducţia este dată de relaţia

$$b_0 = B_m \cos \alpha\,, \qquad (11\text{-}33)$$

în care α este unghiul care corespunde acelui punct.

Prin urmare, alimentarea înfăşurării prin curent continuu produce o inducţie constantă în timp, cu o distribuţie sinusoidală în spaţiu, de-a lungul întrefierului.

Dacă înfăşurarea este alimentată cu un curent alternativ, direcţia inducţiei rămîne tot timpul aceeaşi, însă valoarea ei variază în timp la fel ca şi curentul, schimbîndu-şi şi sensul odată cu aceasta din urmă. Un asemenea cîmp se numeşte *cîmp magnetic pulsatoriu*.

Dacă curentul alternativ este sinusoidal, valoarea cîmpului pulsatoriu în punctul considerat al întrefierului variază după relația

$$b = b_0 \cos \omega t = B_m \cos \alpha \cos \omega t.$$

Folosind o relație cunoscută din trigonometrie, expresia de mai sus a inducției devine

$$b = B_m \cos \alpha \cos \omega t = \frac{1}{2} B_m \cos (\omega t - \alpha) + \frac{1}{2} B_m \cos (\omega t + \alpha). \quad (11\text{-}34)$$

Prin urmare, cîmpul magnetic pulsatoriu s-a descompus în două componente

$$b_1 = \frac{1}{2} B_m \cos (\omega t - \alpha) \quad (11\text{-}35)$$

și

$$b_2 = \frac{1}{2} B_m \cos (\omega t + \alpha). \quad (11\text{-}36)$$

Prima componentă reprezintă un cîmp învîrtitor al cărui sens de rotație este cel trigonometric, a cărui viteză de rotație este egală cu pulsația ω a curentului sinusoidal și a cărui valoare maximă a inducției este

$$B = \frac{1}{2} B_m, \quad (11\text{-}37)$$

adică jumătate din valoarea maximă a inducției cîmpului magnetic pulsatoriu.

Într-adevăr, inducția acestui cîmp atinge valoarea sa maximă, într-un punct oarecare al întrefierului, în momentul cînd pentru acel punct avem $\cos (\omega t - \alpha) = 1$, deci cînd $\omega t = \alpha$, unghiul α corespunzînd poziției acelui punct. Ținînd seama că $\omega T = 2\pi$, înseamnă că în timpul unei perioade T a curentului care alimentează înfășurarea, această componentă a cîmpului pulsatoriu efectuiază o rotație completă.

Unghiul α fiind constant pentru fiecare punct dat al întrefierului, înseamnă că cîmpul învîrtitor dat de relația (11-35) are o variație sinusoidală în timp, trecînd prin valoarea sa maximă $\frac{1}{2} B_m$ atunci cînd $\omega t = \alpha$.

La aceleași constatări ca mai sus se ajunge și pentru a doua componentă a cîmpului pulsatoriu, dată de relația (11-36), cu deosebirea că această componentă reprezintă un cîmp învîrtitor care rotește, de data aceasta, în sensul orar.

În concluzie, *un cîmp magnetic pulsatoriu se poate descompune în două cîmpuri învîrtitoare, de amplitudine pe jumătate decît aceea a cîmpului pulsatoriu, care se rotesc, cu aceeași viteză unghiulară ω, în sens contrar unul altuia.*

11-12. Cîmpul învîrtitor bifazat

Pentru pornirea unor motoare de curent alternativ precum și în funcționarea unor anumite aparate de măsură se întrebuințează cîmpul magnetic învîrtitor produs de un sistem bifazat de curenți alternativi.

Un sistem bifazat este format de doi curenți alternativi sinusoidali, decalați unul față de celălalt cu $\frac{\pi}{2}$, exprimați prin relațiile

$$i_1 = \sqrt{2}\, I \sin \omega t \ ;$$

$$i_2 = \sqrt{2}\, I \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Să presupunem că alimentăm cu un asemenea sistem de curenți două bobine identice, așezate perpendicular una pe alta și avînd axele în același

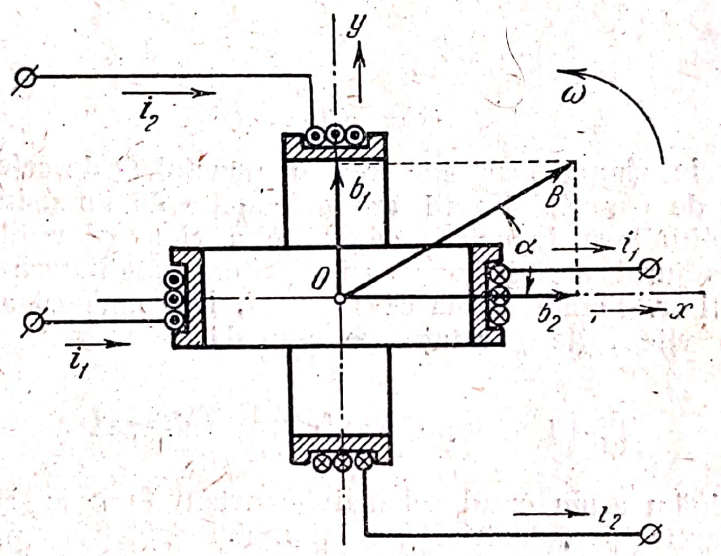


Fig. 11-31. Producerea cîmpului învîrtitor bifazat

plan (fig. 11-31). În cele două bobine va apare cîte un cîmp magnetic pulsatoriu, ale cărui inducții instantanee sînt date, respectiv, de relațiile

$$b_1 = B_{1m} \sin \omega t$$

și

$$b_2 = B_{2m} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = B_{2m} \cos \omega t .$$

Bobinele fiind identice și dispuse la fel față de punctul O de întretăiere a axelor, rezultă că $B_{1m} = B_{2m} = B_m$.

Cîmpul magnetic B în punctul O este, în fiecare moment, rezultanta celor două cîmpuri componente b_1 și b_2. Componentele lui după cele două axe Ox și Oy (fig. 11-31) sînt

$$B_x = b_1 = B_m \sin \omega t ,$$

$$B_y = b_2 = B_m \cos \omega t .$$

Intensitatea cîmpului rezultant B este

$$B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{B_m^2 \sin^2 \omega t + B_m^2 \cos^2 \omega t}$$

sau

$$B = \frac{2}{2} B_m . \qquad (11\text{-}34)$$

Rezultă că inducția magnetică a cîmpului rezultant este constantă și egală cu amplitudinea inducției cîmpurilor pulsatorii bifazate. În fiecare moment, cîmpul rezultant face cu axa fixă Ox unghiul α, dat de relația

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{b_2} = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t ,$$

de unde

$$\alpha = \omega t .$$

În concluzie, cîmpul magnetic creat în punctul O de cele două bobine fixe, parcurse de curenți bifazați, are o inducție de intensitate constantă, egală cu amplitudinea inducției magnetice a cîmpurilor bifazate, și se învîrtește împrejurul acelui punct cu o viteză unghiulară ω, egală cu pulsația curenților. Ținînd seama că $\omega = 2\pi f$, înseamnă că acest cîmp învîrtitor are o viteză de f rotații pe secundă.

11-13. Cîmpul învîrtitor trifazat

Să examinăm acum cazul cel mai important în practică, prin numeroasele sale aplicații industriale, al cîmpului învîrtitor produs de un sistem trifazat de curenți.

Să presupunem trei bobine fixe identice A, B și C, avînd axele în același plan și decalate între ele cu un unghi egal cu $\frac{2\pi}{3}$ (fig. 11-32), pe care să le alimentăm cu un sistem trifazat de curenți sinusoidali

$$i_A = \sqrt{2}\, I \sin \omega t ,$$

$$i_B = \sqrt{2}\, I \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) ,$$

$$i_C = \sqrt{2}\, I \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) .$$

Cîmpurile magnetice create în punctul O, de intersecție al axelor, sînt dirijate, respectiv, după axele OA_1, OB_1 și OC_1 ale bobinelor și fac între ele unghiuri egale cu $\frac{2\pi}{3}$. Valorile instantanee ale acestor cîmpuri,

la un moment dat, socotite pozitive după sensul axelor respective, sînt date de relaţiile

$$b_A = B_m \sin \omega t\,,$$

$$b_B = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad (11\text{-}35)$$

$$b_C = B_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Pentru a determina intensitatea şi direcţia cîmpului rezultant B

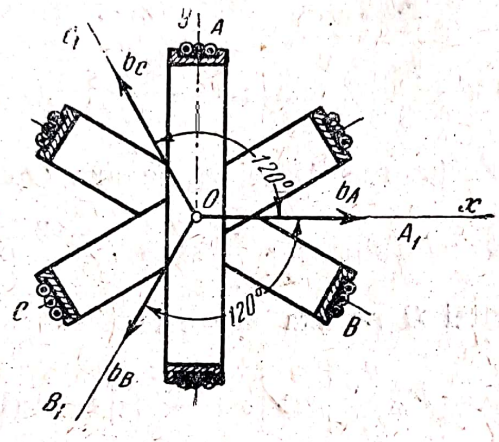


Fig. 11-32. Producerea cîmpului învîrtitor trifazat

în momentul considerat, calculăm componentele sale B_x şi B_y după o axă Ox care coincide cu axa OA şi după o axă Oy, perpendiculară pe axa OA, cunoscînd că proiecţia rezultantei este egală cu suma proiecţiilor componentelor.

Proiecţiile componentelor sînt date de relaţiile

$$b_{Ax} = b_A = B_m \sin \omega t\,;$$

$$b_{Bx} = b_B \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\,b_B \cos\frac{\pi}{3} = -\,B_m \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$b_{Cx} = b_C \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = b_C \cos\frac{2\pi}{3} = -\,B_m \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$b_{Ay} = 0\,;$$

$$b_{By} = b_B \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\,b_B \sin\frac{\pi}{3} = -\,B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$b_{Cy} = b_C \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = b_c \sin\frac{\pi}{3} = B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Suma proiecțiilor b_{Bx} și b_{Cx} ne dă

$$b_{Bx} + b_{Cx} = -\frac{B_m}{2}\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = +\frac{B_m}{2}\sin\omega t,$$

deoarece

$$\sin\omega t + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

căci, dacă înlocuim suma acestor sinusuri prin suma geometrică a trei vectori egali cu unitatea decalați între ei cu $\frac{2\pi}{3}$, rezultanta acestor vectori este nulă și

$$-\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right] = +\sin\omega t.$$

Prin urmare, proiecția rezultantei B pe axa Ox este

$$B_x = b_{Ax} + b_{Bx} + b_{Cx} = B_m\sin\omega t + \frac{B_m}{2}\sin\omega t = \frac{3}{2}B_m\sin\omega t \quad \cdot \quad (11\text{-}36)$$

Proiecția rezultantei B pe axa Oy este

$$B_y = b_{Ay} + b_{By} + b_{Cy} = B_m\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Diferența dintre valorile sinusoidale din paranteza acestei expresii poate fi reprezentată vectorial (fig. 11-33) ca diferența geometrică dintre

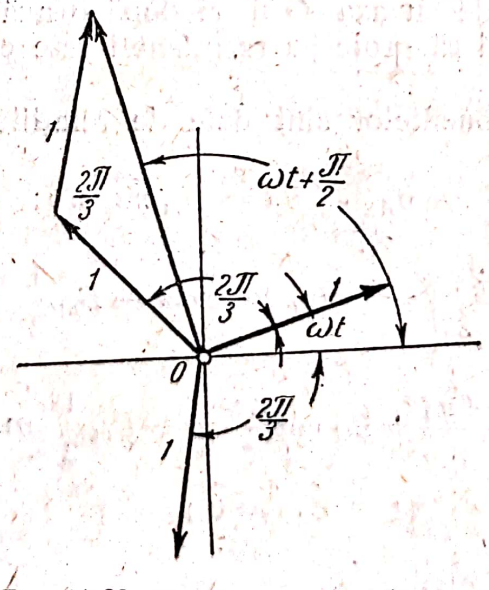


Fig. 11-33. Diagrama vectorială a producerii cîmpului învîrtitor trifazat

vectorul al treilea și cel de al doilea al unui sistem de trei vectori, egal cu unitatea, decalați între ei cu $\frac{2\pi}{3}$ și care se învîrtesc în bloc cu viteza

unghiulară ω, în sensul trigonometric. Vectorul rezultant al diferenței este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în avans față de primul vector al sistemului și are ca valoare $\sqrt{3}$ ori unitatea. Prin urmare

$$\sin\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\omega t$$

și, în consecință,

$$B_y=B_m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\cos\omega t=\frac{3}{2}B_m\cos\omega t. \qquad (11\text{-}37)$$

Din relațiile (11-36) și (11-37) deducem

$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=\frac{3}{2}B_m\sqrt{\sin^2\omega t+\cos^2\omega t},$$

de unde

$$B=\frac{3}{2}B_m. \qquad (11\text{-}38)$$

În fig. 11-34 am reprezentat rezultanta cîmpului magnetic trifazat și cele două componente ale sale, pentru un moment oarecare.

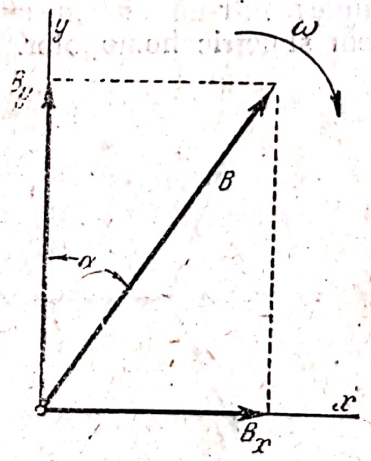


Fig. 11-34. Cîmpul magnetic învîrtitor al sistemului trifazat

Unghiul α, pe care vectorul B îl face cu axa Oy, este dat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{B_x}{B_y}=\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}=\operatorname{tg}\omega t,$$

de unde

$$\alpha=\omega t. \qquad (11\text{-}39)$$

Prin urmare, cele trei cîmpuri pulsatorii monofazate, create în bobine de sistemul trifazat de curenți, se compun într-un cîmp magnetic învîrtitor, de intensitate constantă și egală cu de $\frac{3}{2}$ ori amplitudinea inducției mag-

netice a cîmpurilor pulsatorii trifazate, care se rotește cu o viteză unghiulară egală cu pulsația ω a curenților trifazați.

Este lesne de verificat că atunci cînd, după un timp $t = \frac{T}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică cînd b_A este maxim, cîmpul învîrtitor rezultant B coincide cu direcția cîmpului pulsatoriu b_A. După un timp $t = \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{3\omega}$, cîmpul învîrtitor rezultant coincide cu direcția cîmpului pulsatoriu b_B și așa mai departe. Prin urmare, *în mișcarea sa de rotație, cîmpul învîrtitor ocupă poziția fiecărui cîmp pulsatoriu în momentul cînd acesta din urmă trece prin maxim.*

Descoperirea cîmpului magnetic învîrtitor trifazat și a motorului asincron trifazat, a cărui funcționare se bazează pe acest cîmp, făcută către 1889 de inginerul rus M. O. Dolivo-Dobrovolschi, a constituit începutul dezvoltării rapide și neîntrerupte a rețelelor electrice de curent trifazat.

11-14. Componentele simetrice ale sistemelor trifazate nesimetrice

Am arătat, în par. precedente, că o încărcare neuniformă a fazelor unei distribuții trifazate poate provoca nesimetria tensiunilor și a curenților sistemului trifazat.

Orice sistem trifazat nesimetric poate fi descompus în trei sisteme trifazate simetrice și anume: într-un sistem simetric direct, un sistem simetric invers și un sistem simetric homopolar.

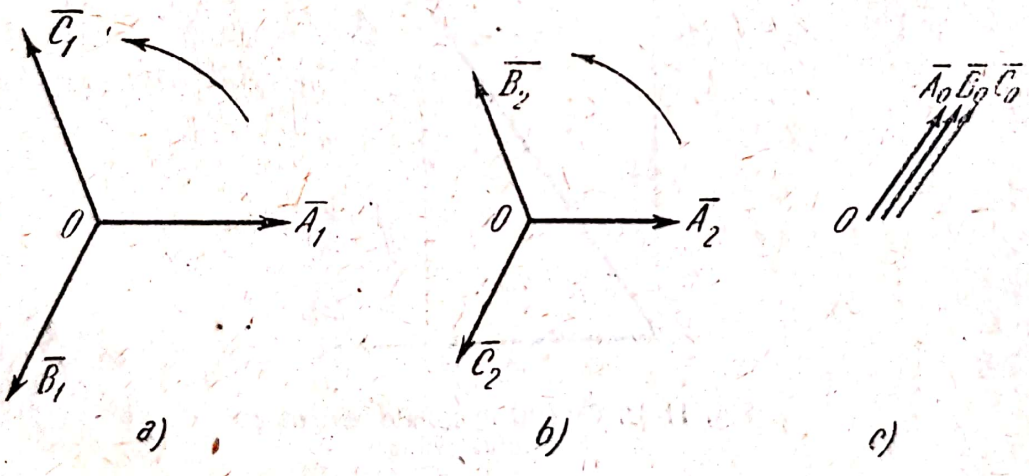


Fig. 11-35. Vectorii de succesiune directă (a), inversă (b) și nulă (c)

Se numește *sistem simetric direct* sistemul compus din trei vectori egali, în care vectorul fazei B este decalat în sens orar cu $\frac{2\pi}{3}$ față de vectorul fazei A, vectorul fazei C, cu $\frac{2\pi}{3}$ față de vectorul fazei B și vectorul fazei A, cu $\frac{2\pi}{3}$ față de vectorul fazei C (fig. 11-35a). Vectorii respectivi se notează cu indicele *1*.

Se numește *sistem simetric invers,* sistemul compus din trei vectori egali, care se succed invers decît sistemul precedent (sistemul simetric direct), în sensul orar întîlnind întîi vectorul C și apoi vectorul B (fig. 11-35 b). Vectorii respectivi se notează cu indicele *2.*

Se numește *sistem simetric homopolar,* un sistem de trei vectori egali și în fază (fig. 11-35 c). Vectorii respectivi se notează cu indicele *0.*

Cele trei sisteme de vectori în care poate fi descompus sistemul nesimetric mai poartă, respectiv, și denumirile de *sistem de succesiune (secvență) directă, sistem de succesiune indirectă* și *sistem de succesiune nulă* a fazelor.

O asemenea descompunere este utilizată în studiul funcționării circuitelor trifazate nesimetrice, în special în calculul curenților de scurt-circuit.

În studiul descompunerii sistemelor trifazate nesimetrice se utilizează un „operator" pe care îl notăm cu a și a cărui valoare este

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -0{,}5 + j\ 0{,}866 \cdot$$

Dacă înmulțim un vector oarecare cu operatorul a, vectorul este rotit cu 120^0 în sens trigonometric.

Înmulțirea vectorului cu a^2, corespunde la două rotiri ale acestuia în sens trigonometric de cîte 120^0, deci unei rotiri în acest sens de 240^0, care este echivalentă cu o rotire în sens orar de 120^0. Prin urmare

$$a^2 = a \cdot a = e^{j2\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -0{,}5 - j\ 0{,}866 \cdot$$

Înmulțirea vectorului cu a^3, echivalează o rotire de $3.120^0 = 360^0$, deci cu revenirea vectorului în poziția inițială. Prin urmare

$$a^3 = 1 \cdot$$

Rezultă, mai departe, că

$$a^4 = a^3 \cdot a = a \cdot$$

Ținînd seama de relațiile precedente, avem

$$1 + a + a^2 = 0 \cdot \qquad (11\text{-}40)$$

Fie un sistem trifazat nesimetric de vectori $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ pe care să-l presupunem descompus în componentele sale simetrice. Fiecare vector al sistemului nesimetric poate fi reprezentat ca sumă a componentelor simetrice respective

$$\overline{A} = \overline{A_0} + \overline{A_1} + \overline{A_2} \ ; \qquad (11\text{-}41)$$

$$\overline{B} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} \ ; \qquad (11\text{-}42)$$

$$\overline{C} = \overline{C_0} + \overline{C_1} + \overline{C_2} \ \cdot \qquad (11\text{-}43)$$

În aceste relații, vectorii $\overline{A_1}$, $\overline{B_1} = a^2\,\overline{A_1}$ și $\overline{C_1} = a\,\overline{A_1}$ sînt vectorii simetrici ai succesiunii directe; $\overline{A_2}$, $\overline{B_2} = a\,\overline{A_2}$ și $\overline{C_2} = a^2\,\overline{A_2}$, vectorii sime-

trici ai succesiunii inverse și $\overline{A_0} = \overline{B_0} = \overline{C_0}$, cei ai succesiunii homopolare. În aceste condiții, sistemul precedent de relații devine

$$\overline{A} = \overline{A_0} + \overline{A_1} + \overline{A_2} \; ; \qquad (11\text{-}44)$$

$$\overline{B} = \overline{A_0} + a^2\,\overline{A_1} + a\,\overline{A_2} \; ; \qquad (11\text{-}45)$$

$$\overline{C} = \overline{A_0} + a\,\overline{A_2} + a^2\,\overline{A_2} \cdot \qquad (11\text{-}46)$$

Pentru a determina valoarea vectorilor simetrici fundamentali $\overline{A_0}$, $\overline{A_1}$ și $\overline{A_2}$, se adună vectorii $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$, dați de ultimele ecuații, și se obține, ținînd seama de relația (11-40),

$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = 3\,\overline{A_0} \; . \qquad (11\text{-}47)$$

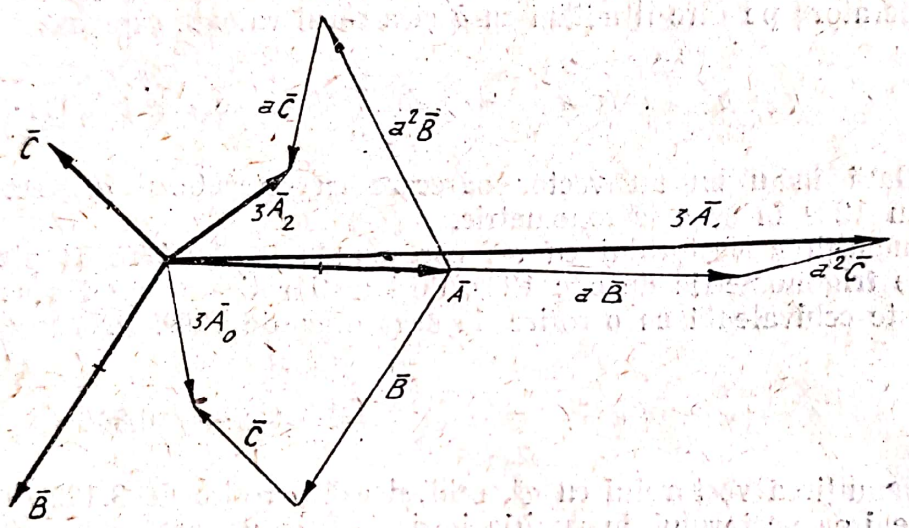


Fig. 11-36. Construcția grafică a componentelor simetrice

Dacă se înmulțește ecuația (11-45) cu a și ecuația (11-46) cu a^2 și se adună, se obține

$$\overline{A} + a\,\overline{B} + a^2\,\overline{C} = 3\,\overline{A_1} \; ; \qquad (11\text{-}48)$$

de asemenea, dacă se înmulțește ecuația (11-45) cu a^2 și ecuația (11-46) cu a și se adună, se obține

$$\overline{A} + a^2\,\overline{B} + a\,\overline{C} = 3\,\overline{A_3} \; , \qquad (11\text{-}49)$$

deoarece $a^3 = 1$ și $a^4 = a$.

Din relațiile (11-47), (11-48) și (11-49) rezultă, respectiv,

$$\overline{A_0} = \frac{1}{3}(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \; ; \qquad (11\text{-}47a)$$

$$\overline{A_1} = \frac{1}{3}(\overline{A} + a\,\overline{B} + a^2\,\overline{C}) \; ; \qquad (11\text{-}48a)$$

$$\overline{A_2} = \frac{1}{3}(\overline{A} + a^2\,\overline{B} + a\,\overline{C}) \cdot \qquad (11\text{-}49a)$$

Folosind aceste ecuații, vectorii fundamentali $\overline{A}_0$, $\overline{A}_1$ și $\overline{A}_2$ pot fi determinați fie pe cale grafică, fie pe cale analitică.

a) Prin *metoda grafică* determinăm vectorii $3\overline{A}_0$, $3\overline{A}_1$ și $3\overline{A}_2$ cu ajutorul vectorilor $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$ ai sistemului nesimetric dat (fig. 11-36). Pentru determinarea vectorului $3\overline{A}_0$ însumăm geometric cei trei vectori $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$ care formează sistemul nesimetric. Vectorul $3\overline{A}_1$ îl determinăm prin însumarea geometrică a vectorului $\overline{A}$ cu vectorul $\overline{B}$, rotit cu unghiul $2\pi/3$ în sens trigonometric, și cu vectorul $\overline{C}$, rotit cu $2\pi/3$ în sens orar. În fine, vectorul $3\overline{A}_2$ îl determinăm efectuînd suma geometrică a vectorului $\overline{A}$ cu vectorul $\overline{B}$, rotit cu $2\pi/3$ în sens orar, și cu vectorul $\overline{C}$, rotit cu $2\pi/3$ în sens trigonometric.

În fig. 11-37 sînt reprezentate sistemele simetrice obținute.

După cum rezultă din construcția de mai sus, dacă vectorii primitivi $\overline{A}$, $\overline{B}$ și $\overline{C}$ formează un triunghi închis, adică rezultanta lor este nulă, $\overline{A}_0 = 0$. Urmează deci că sistemul tensiunilor pe linie și de asemenea, cînd nu există fir neutru, sistemul curenților pe linie nu conține componenta homopolară.

b) Prin *metoda analitică* se rezolvă, cu ajutorul metodei simbolice, ecuațiile (11-41), (11-42) și (11-43).

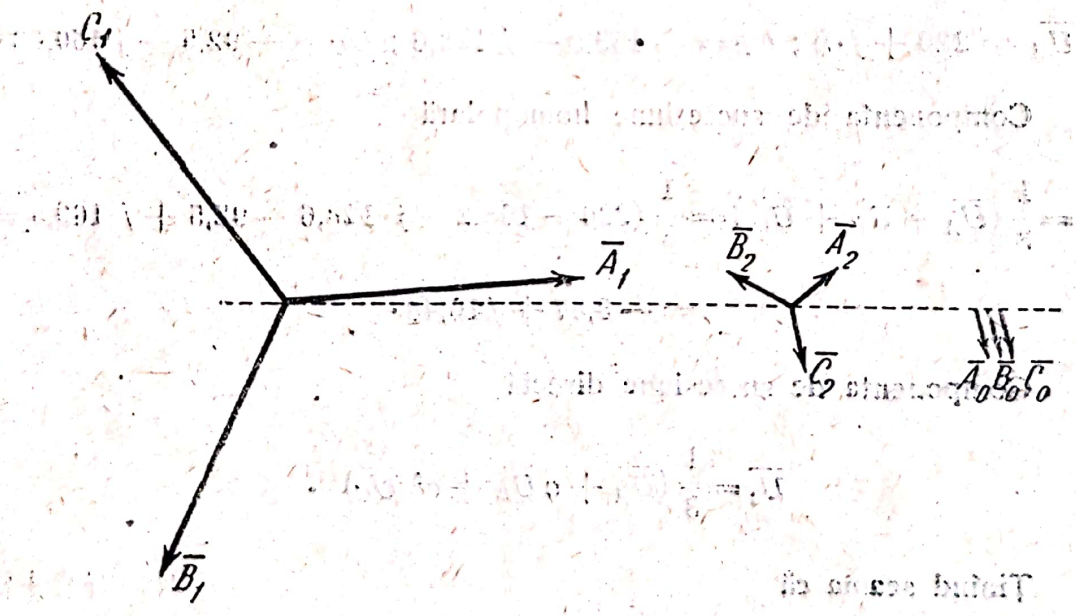


Fig. 11-37. Componentele simetrice ale sistemului nesimetric din fig. 11-36

Cu cît sistemul este mai nesimetric, cu atît componenta de succesiune inversă este mai mare.

Raportul procentual dintre modulul vectorului de succesiune inversă și cel de succesiune directă se numește *gradul de disimetrie* al sistemului nesimetric de vectori. Notînd acest raport cu ε_d, avem

$$\varepsilon_d = \frac{A_2}{A_1}.$$

Raportul procentual dintre modulul vectorului homopolar și cel al succesiunii directe se numește *gradul de asimetrie* al sistemului nesimetric. Notînd acest raport cu ε_a, avem

$$\varepsilon_a = \frac{A_0}{A_1} .$$

În practică, un sistem de vectori poate fi socotit simetric dacă

$$\varepsilon_d \leq 5\,\% \quad \text{și} \quad \varepsilon_a \leq 5\,\% .$$

Exemplul 11-6. Se dă sistemul nesimetric de tensiune $U_A = 220$ V, $U_B = 200$ V și $U_C = 185$ V, avînd între vectori unghiurile $\alpha = 140^0$, $\beta = 100^0$, $\gamma = 120^0$, socotite în sens orar. Se cere descompunerea sistemului în coordonatele sale simetrice și determinarea gradului de asimetrie și disimetrie.

Soluția: Se ia ca origine de fază faza vectorului U_A. Se exprimă vectorii sistemului nesimetric în mărimi complexe

$$\overline{U}_A = 220\, e^{j\,0} \; ; \; \overline{U}_B = 200\, e^{-j\,140^0} \; ; \; \overline{U}_C = 185\, e^{j\,120^0},$$

deci

$$\overline{U}_A = 220 + j \cdot 0 \; ; \; \overline{U}_B = -153{,}2 - j\ 128{,}6 \; ; \; \overline{U}_C = -92{,}5 - j\ 160{,}03 .$$

Componenta de succesiune homopolară

$$\overline{U}_0 = \frac{1}{3}(\overline{U}_A + \overline{U}_B + \overline{U}_C) = \frac{1}{3}(220 - 153{,}2 - j \cdot 128{,}6 - 92{,}5 + j\ 160{,}3 =$$

$$= -8{,}57 + j\,10{,}48 .$$

Componenta de succesiune directă

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{3}(\overline{U}_A + a\,\overline{U}_B + a^2\,\overline{U}_C) .$$

Ținînd seama că

$$a = -0{,}5 + j\ 0{,}866 \quad \text{și} \quad a^2 = -0{,}5 - j\ 0{,}866 ,$$

obținem

$$\overline{U}_1 = \frac{1}{3}\Big[220 + (-0{,}5 + j\ 0{,}866)(-153{,}2 - j\ 128{,}6) + (-0{,}5 - j\ 0866) \cdot$$

$$\cdot (-92{,}5 + j\ 160{,}03)\Big] = \frac{1}{3}(592{,}8 - j\ 68{,}28) = 197{,}6 - j\ 22{,}76 .$$

Componenta de succesiune inversă

$$\overline{U_2} = \frac{1}{3}(\overline{U_A} + a^2\overline{U_B} + a\overline{U_C}) = \frac{1}{3}[220 + (-0{,}5 - j\ 0{,}866)(-153{,}2 - j \cdot 128{,}6) + (-0{,}5 + j \cdot 0{,}866)(-92{,}5 + j \cdot 160{,}03)] =$$

$$= \frac{1}{3}(92{,}90 + j\ 36{,}85) = 30{,}97 + j\ 12{,}28 \cdot$$

Verificare

$$\overline{U_A} = \overline{U_0} + \overline{U_1} + \overline{U_2} = -8{,}57 + j\,10{,}48 + 197{,}6 - j\,22{,}26 + 30{,}97 + j\,12{,}28 = 220 + j\,0 \cdot$$

Modulele celor trei sisteme de succesiune sînt, respectiv,

$$U_0 = \sqrt{8{,}57^2 + 10{,}48^2} = 13{,}54 \text{ V};$$

$$U_1 = \sqrt{153{,}2^2 + 128{,}6^2} = 199{,}74 \text{ V};$$

$$U_2 = \sqrt{30{,}97^2 + 12{,}28^2} = 33{,}33 \text{ V} \cdot$$

Prin urmare

$$\varepsilon_d = \frac{33{,}33}{199{,}74} 100 = 16{,}6\,\%$$

și

$$\varepsilon_a = \frac{13{,}54}{199{,}74} 100 = 6{,}78\,\% \cdot$$

CAPITOLUL XII

MĂRIMI ALTERNATIVE NESINUSOIDALE

12-1. Considerații generale

Pentru a ușura studiul fenomenelor de curent alternativ, am considerat pînă acum că f.e.m., tensiunile, curenții etc. sînt mărimi sinusoidale, adică variază în timp după curbe sinusoidale.

Această ipoteză nu se depărtează de realitate în ceea ce privește f.e.m. produse de alternatoarele moderne, deoarece, așa cum vom arăta la timp, prin anumite măsuri de ordin constructiv este posibil să se obțină f.e.m. care pot fi considerate practic sinusoidale.

Nu același lucru putem spune de curenții, tensiunile și fluxurile care apar în circuitele electrice ale căror parametri nu rămîn constanți în cursul unei perioade, de pildă inductanțele circuitelor de curent alternativ cu fier (vezi par. 13-2). Asemenea curenți, tensiuni și fluxuri rămîn mărimi periodice, însă nu-și mai păstrează caracterul sinusoidal; ele sînt ceea ce numim *mărimi alternative nesinusoidale*.

12-2. Descompunerea funcțiilor alternative nesinusoidale în seria lui Fourier. Armonice

Studiul unei funcții periodice oarecare poate fi înlocuit cu studiul unor funcții sinusoidale, prin descompunerea acesteia în seria lui Fourier.

Din Analiza Matematică se știe că o funcție periodică oarecare $y = f(t)$, de perioadă T, poate fi întotdeauna descompusă într-o sumă de funcții sinusoidale de perioade $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \cdots, \frac{T}{k}$, adică de pulsații care cresc în progresie aritmetică $\omega, 2\omega, 3\omega, k\omega, \cdots$. Deci avem

$$y = C_1 \sin(\omega t + \psi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + C_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \cdots + C_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \cdots \quad (12\text{-}1)$$

Dacă valoarea medie a funcției periodice, în timpul perioadei T, nu este nulă ci are o anumită valoare constantă C_0, dată de relația

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt \quad , \quad (12\text{-}2)$$

funcția y trebuie considerată ca însumarea valorii C_0 și a funcției periodice (12-1) de valoare medie zero. În aceste condiții, funcția periodică nesinusoidală devine, sub forma sa cea mai generală,

$$y = C_0 + C_1 \sin(\omega t + \psi_1) + C_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + C_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \\ + \cdots + C_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \cdots \quad (12\text{-}3)$$

Primul termen sinusoidal al sumei $[C_1 \sin(\omega t + \psi_1)]$ poartă numele de *termenul fundamental* sau *prima armonică* a funcției periodice. Frecvența, deci pulsația și perioada acestui termen sînt aceleași ca și ale funcției y. Ceilalți termeni sinusoidali se numesc *armonicele superioare* ale funcției periodice. Termenul $C_k \sin(k\omega t + \psi_k)$ constituie armonica de ordinul k, a cărei frecvență și pulsație este de k ori mai mare decît a funcției periodice, deci a cărei perioadă este de k ori mai mică decît T.

Folosindu-se formula de descompunere a sinusului sumei a două unghiuri, rezultă că fiecare armonică poate fi înlocuită prin două funcții sinusoidale după expresia

$$C_k \sin(k\omega t + \psi_k) = C_k \sin k\omega t \cos \psi_k + C_k \cos \omega t \sin \psi_k ,$$

în care k reprezintă un număr întreg oarecare.

Dacă notăm cu

$$A_k = C_k \cos \psi_k \quad \text{și} \quad B_k = C_k \sin \psi_k ,$$

relația (11-3) devine

$$y = C_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \cdots + A_k \sin k\omega t + \\ + \cdots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \cdots + \\ + B_k \cos k\omega t + \cdots \quad (12\text{-}4)$$

Cînd cunoaștem, sub forma sa analitică, funcția periodică $y = f(t)$ ce trebuie să o descompunem în serie Fourier, constanta C_0 este dată de relația (12-2), iar coeficienții de un ordin oarecare, de exemplu A_k și B_k de relațiile

$$A_k = 2 \frac{1}{T} \int_0^T y \sin k\omega t \, dt \quad (12\text{-}5)$$

și

$$B_k = 2 \frac{1}{T} \int_0^T y \cos k\omega t \, dt . \quad (12\text{-}6)$$

În electrotehnică întîlnim mărimi periodice în general mai simple decît cele reprezentate prin relația (12-3).

Cînd funcția periodică este compusă din semiperioade ale căror suprafețe sînt egale și de sens contrar, rezultă, conform relației (12-2), că $C_0 = 0$. Pe de altă parte, dacă funcția periodică este și simetrică, adică ia aceeași valoare însă cu semnul schimbat cînd t devine $t + \frac{T}{2}$, coeficienții de ordin par $A_2, A_4, A_6, \cdots$ și $B_2, B_4, B_6, \cdots$ ai relației (12-4)

sînt nuli. În aceste condiții, funcția periodică conține numai armonice de ordin impar și relația sa ia forma

$$y = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \cdots + \\ + B_1 \cos \omega t + B_3 \cos 3\omega t + B_5 \cos 5\omega t + \cdots \quad (12\text{-}7)$$

Relațiile (12-5) și (12-6) devin, în acest caz,

$$A_k = 2\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y \sin k\omega t \, dt \quad (12\text{-}8)$$

și

$$B_k = 2\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y \cos k\omega t \, dt \quad (12\text{-}9)$$

Cînd semiperioada funcției nesinusoidale poate fi descompusă în două sferturi de perioadă egale și simetrice în raport cu ordonatele corespunzătoare abscisei $t = \frac{T}{4}$, toți termenii în cosinus dispar și funcția ia forma

$$y = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \cdots \quad (12\text{-}10)$$

În acest caz, relația care ne dă pe A_k devine

$$A_k = 2\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y \sin k\omega t \, dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin kx \, dx. \quad (12\text{-}11)$$

dacă notăm unghiul ωt cu x.

În practica curenților alternativi, mărimile periodice întîlnite nu conțin toate armonicele din relația (12-10). Obișnuit ele conțin numai armonica fundamentală și una sau două armonice de ordin superior, ale căror amplitudini sînt mai accentuate, celelalte armonice fiind practic neglijabile.

12-3. Forme simple de funcții periodice nesinusoidale

Vom examina cîteva forme simple de curbe periodice pe care le întîlnim mai des în electrotehnică și care satisfac, pe de-antregul sau numai parțial, condițiile de simetrie arătate mai sus. Mai întîi vom examina curbele care satisfac ambele condiții de simetrie, deci cărora li se aplică relația (12-10), apoi pe cele care satisfac numai prima condiție de simetrie, deci cărora li se aplică relația (12-7).

În fig. 12-1*a* este reprezentată forma unei curbe aplatisate (turtite), pe care o întîlnim în studiul tensiunii dintr-un circuit electric cu fier parcurs de un curent alternativ sinusoidal (vezi par. 13-3). Această curbă periodică poate fi descompusă în două armonice, una de ordinul întîi (fundamentala) și una de ordinul trei, adică poate fi pusă sub forma

$$y = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t. \quad (12\text{-}12)$$

Se vede că valoarea de vîrf (amplitudinea) acestei curbe rezultă dacă facem $\omega t = 90^0$ şi este dată de relaţia

$$y = A_1 - A_3 .$$

Prin urmare, cu cît valoarea relativă a amplitudinii armonicei de ordinul trei faţă de amplitudinea fundamentalei este mai mare, cu atît o

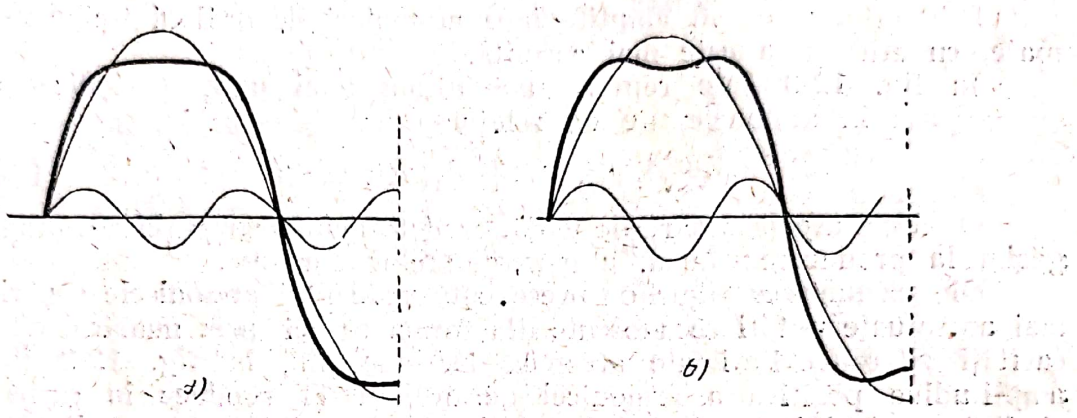


Fig. 12-1. Forma curbelor periodice aplatisate

asemenea curbă este mai plată. De la o anumită valoare relativă în sus a acestei amplitudini, forma curbei primitive începe să prezinte la mijloc o depresiune (fig. 12-1 *b*) care creşte odată cu amplitudinea armonicei de ordinul trei şi, în decursul unei semiperioade, apar două valori de vîrf, situate simetric faţă de jumătatea semiperioadei.

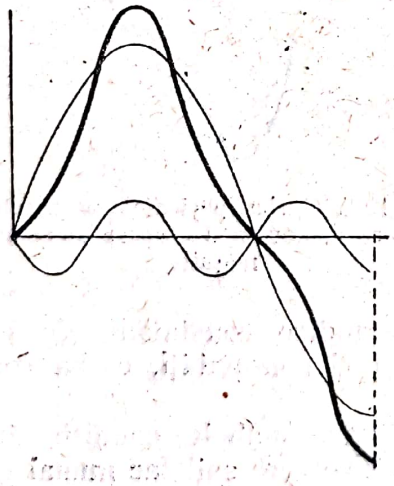


Fig. 12-2. Forma curbei periodice ascuţite

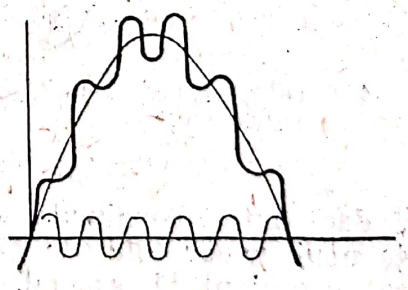


Fig. 12-3. Undă periodică conţinînd armonica 11

În fig. 12-2 este reprezentată forma unei curbe periodice ascuţite, pe care o întîlnim în studiul curentului care străbate un circuit electric cu fier, supus unei tensiuni electrice sinusoidale (vezi par. 13-2). O asemenea curbă se poate descompune tot într-o armonică de ordinul în-

tii şi una de ordinul trei, aceasta din urmă începînd însă cu valori negative. Deci relaţia curbei ascuţite este

$$y = A_1 \sin \omega t - A_3 \sin 3\omega t \ , \qquad (12\text{-}13)$$

iar valoarea sa de vîrf,

$$y = A_1 + A_3 \ .$$

Prin urmare, cu cît amplitudinea armonicei de ordinul trei este mai mare, cu atît curba este mai ascuţită.

În fig. 12-3 este reprezentată forma unei unde periodice care, descompusă în armonice, ne dă relaţia

$$y = A_1 \sin \omega t + A_{11} \sin 11\omega t \cdot \qquad (12\text{-}14)$$

O formă asemănătoare de undă, cu deformaţii mai puţin accentuate, o găsim la producerea f.e.m. a generatoarelor sincrone.

Din examinarea figurilor precedente vedem că armonicele superioare mai accentuate pot fi recunoscute din forma curbei prin numărul de concavităţi şi convexităţi ale acesteia. De exemplu, în fig. 12-3 fiecare amplitudine pozitivă a armonicei de ordinul 11 produce în curba periodică o convexitate şi fiecare amplitudine negativă, o concavitate. Prin

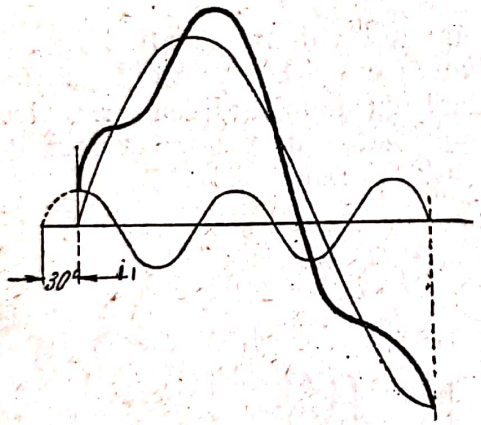


Fig. 12-4. Curbă periodică ascuţită cu simetrie parţială

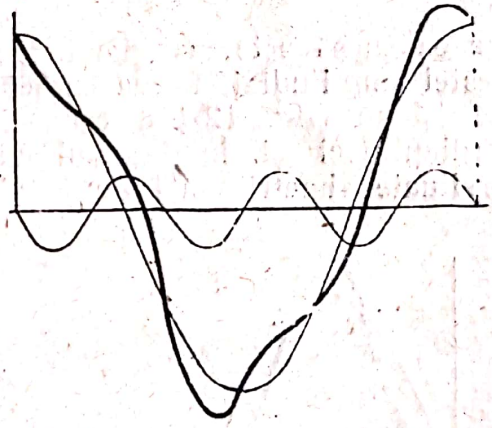


Fig. 12-5. Curba periodică precedentă, în care armonica 3-a apare cu semnul negativ

urmare, dacă într-o semiundă a curbei periodice constatăm, de pildă, existenţa unui număr total de 11 convexităţi şi concavităţi, curba conţine armonica de ordinul 11, ş.a.m.d.

Toate curbele examinate mai sus satisfac ambele condiţii de simetrie. Vom examina acum cîteva curbe periodice care satisfac numai prima condiţie de simetrie.

În fig. 12-4 este reprezentată o curbă periodică dată de relaţia

$$y = A_1 \sin \omega t + A_3 \cos 3\omega t \ . \qquad (12\text{-}15)$$

După cum rezultă din figură, valorile de vîrf ale curbei periodice nu se mai găsesc la mijlocul semiundei, sau aşezate simetric faţă de acest mijloc, ca în cazurile precedente ale dublei simetrii, ci sînt deplasate faţă de mijlocul semiperioadei.

Ţinînd seama că $\cos 3\omega t = \sin(3\omega t + 90^0)$, relaţia (12-15) poate fi pusă şi sub forma unei sume de sinsuri, decalate între ele, la origine, cu un unghi de 30^0

$$y = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin(3\omega t + 90^0) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3(\omega t + 30^0), \quad (12\text{-}16)$$

ceea ce rezultă şi din fig. 12-4.

Curbei reprezentate în fig. 12-5, îi corespunde relaţia

$$y = A_1 \cos \omega t - A_3 \sin 3\omega t = A_1 \sin(\omega t + 90^0) - A_3 \sin 3\omega t \cdot \quad (12\text{-}17)$$

Vom întîlni această curbă periodică în studiul curentului de magnetizare al circuitelor cu fier cînd se ţine seama de fenomenul histerezis (par. 13-3).

12-4. Metode de descompunere în armonice a curbelor periodice nesinusoidale

Cel mai adesea funcţia periodică (curent, tensiune, flux etc.) ce trebuie descompusă în seria lui Fourier nu este dată sub formă analitică, ci sub forma unei curbe numită *oscilogramă*. care se înregistrează cu ajutorul oscilografelor (vezi par. 15-31).

Curbele obţinute pe această cale pot fi descompuse în armonicele lor componente prin a) metoda grafică, b) metoda analitică.

a) Metoda grafică.

Există diferite procedee grafice de determinare a armonicelor unei funcţii periodice atunci cînd cunoaştem, ridicată experimental, curba după care variază funcţia. Vom descrie, pe scurt, unul din aceste procedee şi anume *metoda Krug-Roth*.

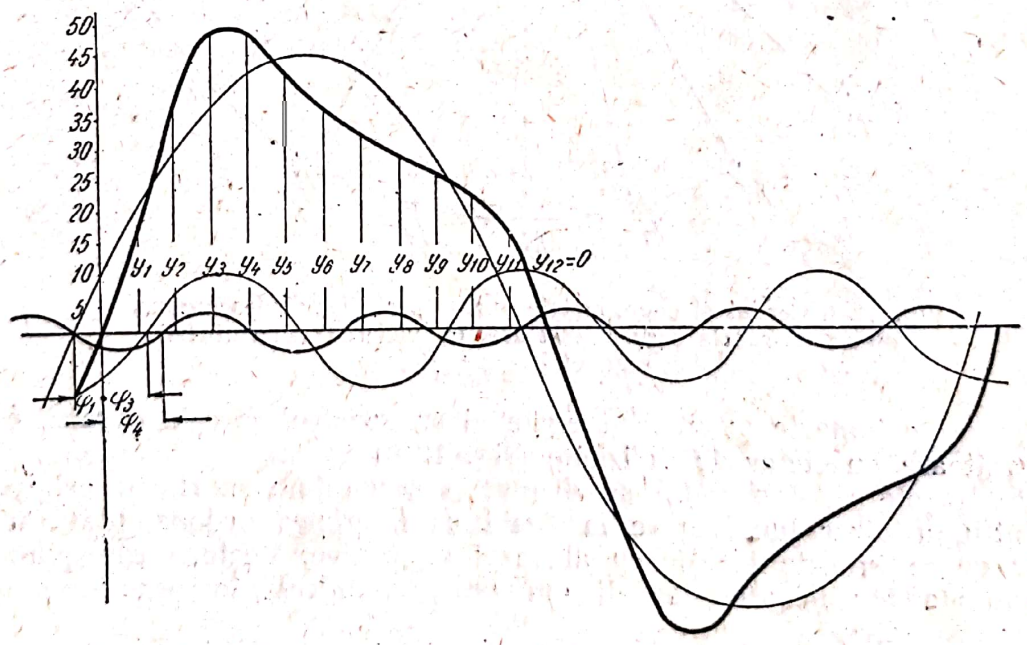


Fig. 12-7. Descompunerea pe cale grafică a unei curbe periodice în armonicele sale

Să presupunem că ni se cere să descompunem, în armonicele sale, curba reprezentată în fig. 12-7. Pentru aceasta, se procedează în modul următor:

Se împarte segmentul de dreaptă de pe axa absciselor, corespunzător unei perioade a curbei nesinusoidale date, într-un număr n de părți egale, de pildă $n = 24$ și se trasează, prin punctele obținute, ordonatele $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n$.

Pentru a se obține amplitudinea și decalajul primei armonice, se trasează, cu o rază egală cu amplitudinea curbei periodice, o circumfe-

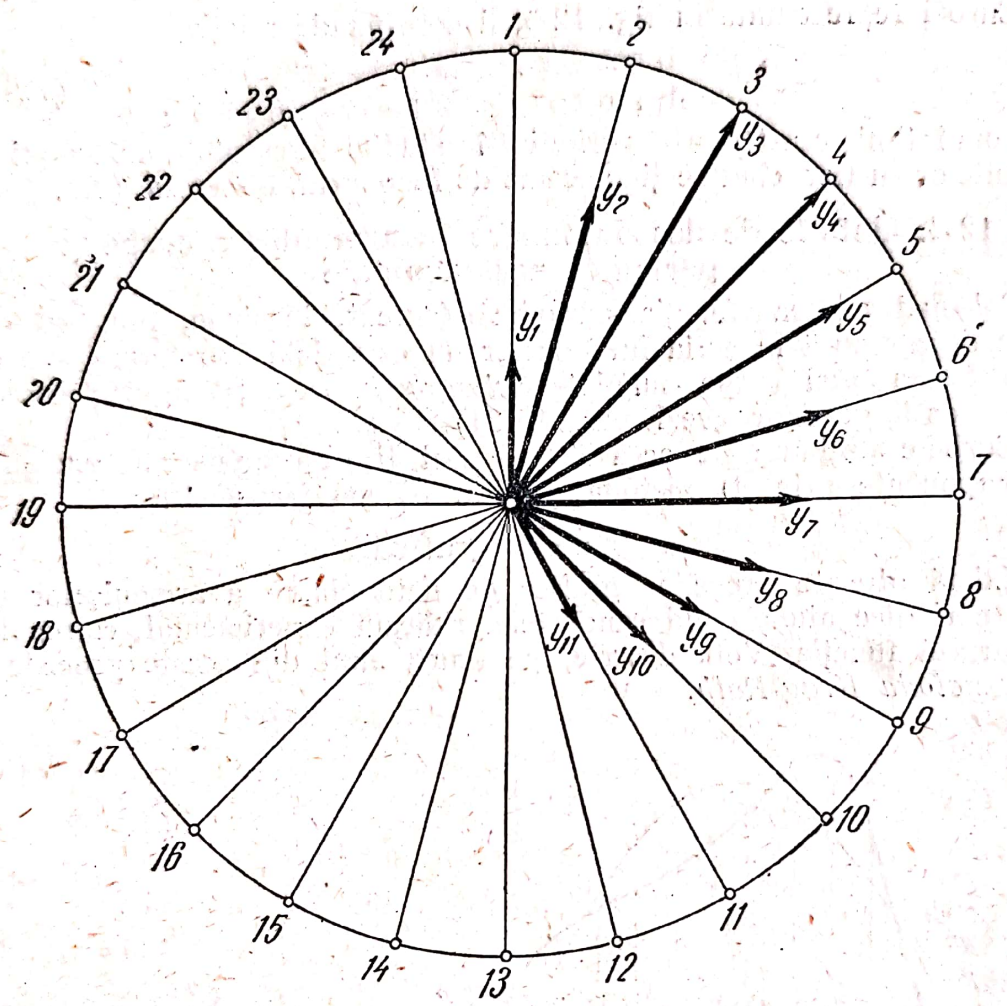


Fig. 12-8. Cercul și coordonatele curbei periodice de descompus, dispuse pe razele corespunzătoare, în vederea determinării armonicei fundamentale

rință, care se împarte în n părți egale și se construiesc cele n raze, corespunzătoare punctelor de diviziune (fig. 12-8).

Pe razele circumferinței se dispun o serie de vectori, cu originea în centru, a căror lungime se ia egală cu lungimea ordonatei al cărui număr de ordin este identic cu al razei respective. Vectorii corespunzători ordonatelor negative se dispun pe prelungirea, în sens opus, a razelor respective.

Vectorii astfel construiți sînt însumați geometric (fig. 12-9). Lungimea vectorului rezultant împărțită prin $\frac{n}{2} = \frac{24}{2} = 12$, dă amplitudinea A_1 a armonicei fundamentale. Faza φ_1 a acestei armonice este

dată de unghiul cu care vectorul rezultant este decalat față de o direcție perpendiculară pe raza corespunzătoare punctului O (24) de pe cerc. Această fază reprezintă și decalajul dintre armonica fundamentală și curba periodică. Semnul unghiului se socotește ca și la diagramele vec-

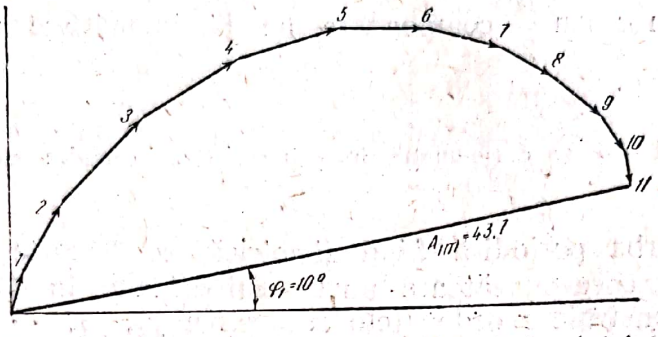


Fig. 12-9. Determinarea amplitudinii și decalajului armonicei fundamentale

toriale, considerîndu-se direcția perpendiculară pe raza punctului O ca vector de origine a timpilor.

Dacă curba periodică ce se studiază satisface prima condiție de simetrie, adică prezintă valori egale și de semn schimbat cînd timpul crește cu o jumătate de perioadă, ne putem limita numai la însumarea celor $\frac{n}{2}$ vectori, corespunzători ordonatelor curbei pentru o jumătate de perioadă, așa cum s-a procedat în fig. 12-9. Este evident că în acest caz amplitudinea armonicei fundamentale se obține împărțind vectorul rezultant cu $\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{4} = 6$.

Deci, și într-un caz și în altul, vectorul rezultant reprezintă, la o anumită scară, vectorul primei armonice.

Pentru a se determina vectorul armonicei a treia, se recurge la aceeași construcție a circumferinței cu n raze ca și pentru armonica fundamentală. De data aceasta, vectorii, egali în mărime cu ordonatele curbei periodice, sînt așezați pe raze ale căror numere de ordine sînt de trei ori mai mare decît acelea ale ordonatelor respective. Prin urmare, vectorul 1, corespunzător ordonatei 1, se așază pe raza $1 \cdot 3$, vectorul, corespunzător ordonatei 2, pe raza $2 \cdot 3 = 6$ ș.a.m.d. (fig. 12-10). Vectorul rezultant al însumării geometrice a celor n componente, în cazul general, împărțit prin $\frac{n}{2}$, sau al celor $\frac{n}{2}$ componente, în cazul curbei simetrice, împărțit prin $\frac{n}{4}$, determină mărimea și faza armonicei a treia.

Vectorul armonicei a cincea se obține dispunîndu-se vectorii egali în mărime cu ordonatele curbei periodice pe razele circumferințelor ale

căror numere de ordine sînt de cinci ori mai mari decît acelea ale ordonatelor respective, utilizîndu-se razele în ordinea următoare: $1 \cdot 5$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 5 = 15$ ş.a.m.d. Vectorul rezultant, împărţit prin $\frac{n}{2}$ sau prin $\frac{n}{4}$, după cum folosim n sau $\frac{n}{2}$ componente, ne dă, în mărime şi fază, armonica a cincea.

Exemplu 12-1. Să se descompună în primele trei armonice curba reprezentată în fig. 12-7.

Soluţia: Curba periodică fiind simetrică, se împarte porţiunea de axă a absciselor corespunzătoare unei semiperioade în 12 părţi egale ($n = 24$) şi se construiesc ordonatele respective y_1, y_2, $\cdots$ y_{12}.

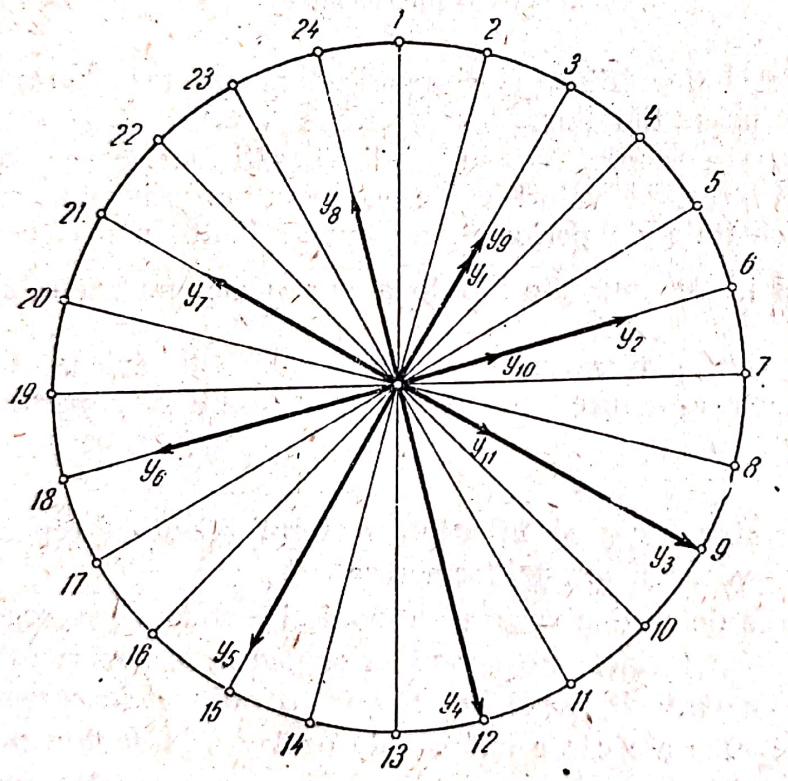


Fig. 12-I0. Cercul şi ordonatele curbei periodice de descompus, dispuse pe razele corespunzătoare, în vederea determinării armonicei de ordinul trei

1) Pentru a se obţine amplitudinea şi faza primei armonice se construieşte o circumferinţă de rază egală cu amplitudinea (ordonată de vîrf) a funcţiei periodice care se împarte în $n = 24$ părţi şi se trasează prin punctele de origine razele respective (fig. 12-8).

Se dispun apoi, pe primele 12 raze ale cercului, cei 12 vectori egăli în mărime cu ordonatele corespunzătoare ale curbei periodice, după

care se procedează la însumarea acestor vectori (fig. 12-9). Vectorul rezultant împărțit prin $\frac{n}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6$, ne dă amplitudinea A_{1m} și faza φ_1 a primei armonice

$$A_{1m} = 43{,}7 \quad \text{și} \quad \varphi_1 = 10° .$$

2) Amplitudinea și faza armonicei a treia. Se construiește aceeași circumferință cu aceleași raze ca și în cazul precedent și se așază vectorul 1, egal în mărime cu ordonata 1, pe raza 3, vectorul 2, egal în mărime

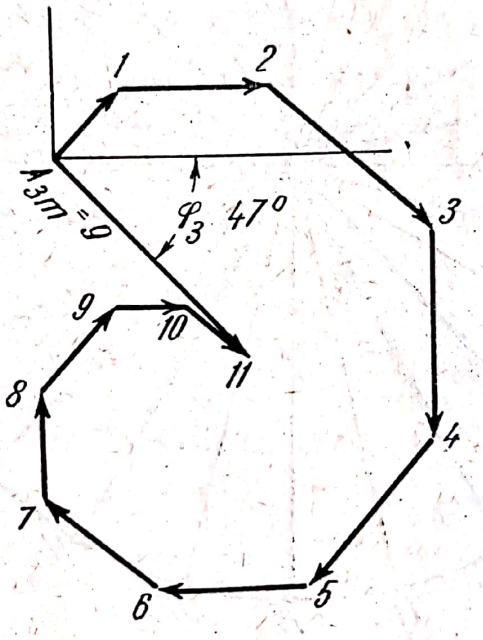


Fig. 12-11. Determinarea amplitudinii și decalajului armonicei de ordinul trei

cu ordonata 2, pe raza 6 ș.a.m.d. procedîndu-se la însumarea vectorilor (fig. 12-11). Vectorul rezultant împărțit prin 6 ne dă amplitudinea A_{3m} și faza φ_3 a armonicei a treia

$$A_{3m} = 9{,}0 \quad \text{și} \quad \varphi_3 = -47° .$$

3) Amplitudinea și faza armonicei a cincea.

Se procedează în mod analog (fig. 12-12 și 12-13), obținîndu-se

$$A_{5m} = 3{,}3 \quad ; \quad \varphi_3 = -110° .$$

Ecuația curbei este

$$y = 43{,}7 \sin (\omega t + 10°) + 9 \sin (3\omega t - 48°) + 3{,}3 \sin (5\omega t - 110°) =$$

$$= 47{,}3 \sin (\omega t + 10°) + 9 \sin 3 (\omega t - 16°) + 3{,}3 \sin 5 (\omega t - 22°) .$$

Armonicele au fost construite în aceeași figură ca și curba primitivă (fig. 12-7).

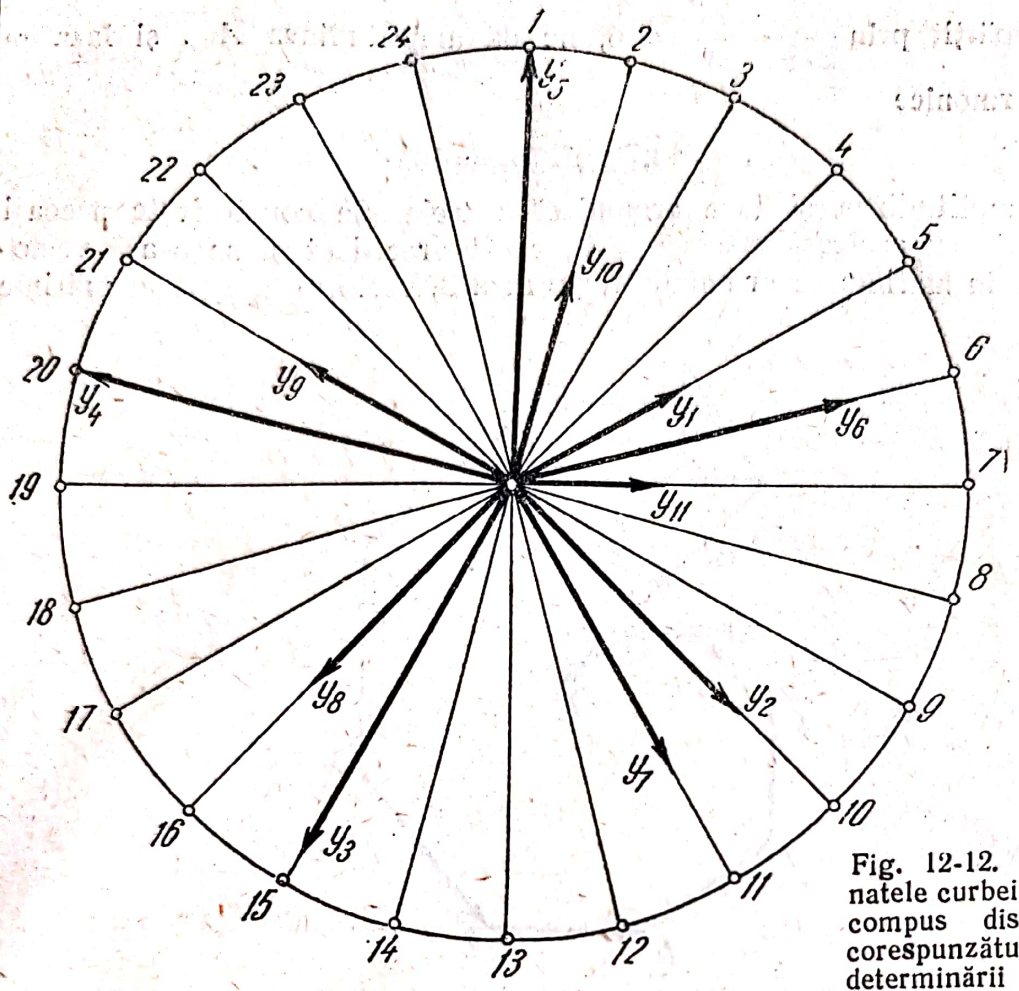


Fig. 12-12. Cercul și ordonatele curbei armonice de descompus dispuse pe razele corespunzătuare în vederea determinării armonicei de ordinul cinci

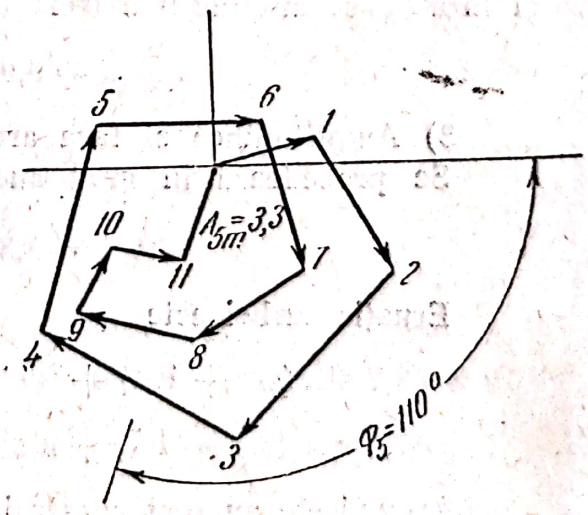


Fig. 12-13. Determinarea amplitudinii și decalajului armonicei de ordinul cinci

b) Metoda analitică

Se aplică atunci cînd avem de-a face cu curbe periodice simple, de formă regulată și simetrică, în primul rînd cu curbe de formă geometrică. Asemenea curbe conțin numai armonice de ordin impar și li se aplică relația (12-10).

Ne propunem să descompunem, prin această metodă, curba reprezentată în fig. 12-14, care reprezintă forma unui trapez isoscel.

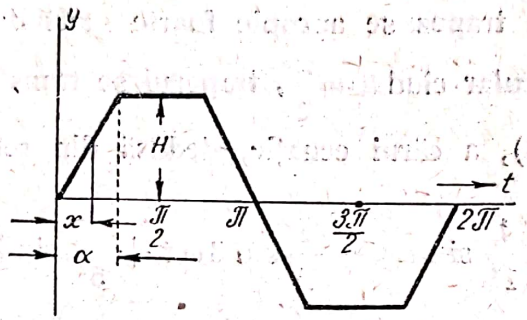


Fig. 12-14. Curbă periodică în formă de trapez isoscel

Pentru a se obține amplitudinea armonicei de ordinul k, aplicăm relația (12-11)

$$A_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin kx\, dx \quad ,$$

ținînd seama de notațiile din fig. 12-14.

În intervalul dela $x = 0$ la $x = \alpha$, $y = \frac{H}{\alpha}x$;

„ „ „ „ $x = \alpha$ la $x = \frac{\pi}{2}$, $y = H$.

Deci

$$A_k = \frac{4H}{\pi\alpha}\int_0^{\alpha} x \sin kx\, dx + \frac{4H}{\pi}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin kx\, dx \ .$$

Făcînd calculele și înlocuind pe x cu ωt, se obține

$$y = f(t) = \frac{4H}{\pi\alpha}\left(\frac{1}{1^2}\sin\alpha\sin\omega t + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5\omega t + \dots\right). \qquad (12\text{-}18)$$

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{m}$, termenii multipli de m se anulează. În cazul particular cînd $\alpha = \frac{\pi}{3}$, toate armonicele multiple de 3 dispar și ecuația precedentă devine

$$y = \frac{6\sqrt{3}\,H}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t + \frac{1}{7^2}\sin 7\omega t - \cdots\right) \quad (12\text{-}19)$$

Un asemenea trapez se apropie foarte mult de o sinusoidă.

În cazul particular cînd $\alpha = \frac{\pi}{2}$, trapezul se transformă într-un triunghi isoscel (fig. 12-15), a cărui ecuație, dedusă din relația (2-18), este

$$y = \frac{8\,H}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t \cdots\right) . \quad (12\text{-}20)$$

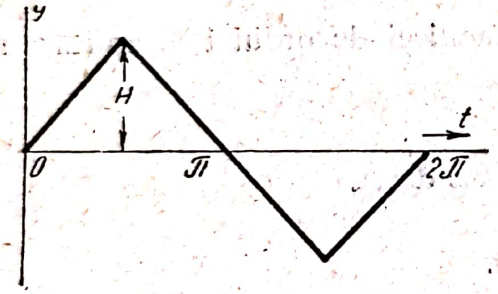


Fig. 12-15. Curbă periodică în formă de triunghi isoscel

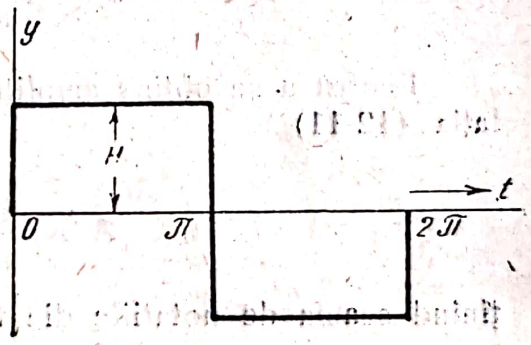


Fig. 12-16. Curbă periodică în formă de dreptunghi

În cazul cînd $\alpha = 0$, trapezul isoscel se transformă în dreptunghi (fig. 12-16) și ecuația (12-18) devine

$$y = \frac{4\,H}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right) . \quad (12\text{-}21)$$

12-5. Valorile eficace în cazul mărimilor periodice nesinusoidale

Am arătat, în par. 8-6, că valoarea eficace a unui curent alternativ este dată de realația (8-17) pe care o putem pune sub forma

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt . \quad (12\text{-}22)$$

Pentru a determina valoarea eficace a curentului alternativ nesinusoidal, descompunem acest curent în armonicele sale. Pentru a trata cazul cel mai general, vom presupune că valoarea instantanee a curentului conține și termenul I_0, prin urmare folosim relația (12-3) pusă sub forma

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_k + \cdots = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_2) + \cdots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \cdots \quad (12\text{-}23)$$

Ridicînd această serie la pătrat, vom constata că i^2 este suma pătratelor tuturor termenilor, la care se adaugă produsele duble ale fiecărui termen cu termenii următori, adică obținem relația

$$i^2 = \sum i_k^2 + \sum 2\, i_k\, i_n = \sum I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \sum 2\, I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)\, I_{nm} \sin(n\omega t + \psi_m - \varphi_n),$$

în care $k \neq n$.

Introducînd valoarea lui i^2, pusă sub această formă, în relația (12-14), obținem

$$I^2 = \sum \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2\, dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T 2\, i_k\, i_n\, dt. \quad (12\text{-}24)$$

Să examinăm integrala definită

$$\int_0^T 2\, i_k\, i_n\, dt = I_{km} I_{nm} \int_0^T 2 \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n)\, dt,$$

în care k și n sînt numere întregi, pozitive.

Ea poate fi descompusă în două integrale

$$\int_0^T 2 \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n)\, dt =$$

$$= \int_0^T \cos[(k-n)\omega t + (\psi_k - \psi_n) - (\varphi_k - \varphi_n)]\, dt -$$

$$- \int_0^T \cos[(k+n)\omega t + (\psi_k + \psi_n) - (\varphi_k + \varphi_n)]\, dt.$$

Deoarece $k \neq n$, rezultă că ambele integrale din membrul al doilea sînt nule, fiind integralele unei funcții sinusoidale luate pe un număr întreg de perioade, deci este nulă și integrala din membrul întîi al egalității. Prin urmare,

$$\sum \frac{1}{T} \int_0^T 2\, i_k\, i_n\, dt = 0$$

și relația (12-24) devine

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2\, dt = \sum \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2\, dt = I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \cdots + I_k^2 + \cdots;$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă valoarea eficace a curentului periodic nesinusoidal

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\cdots+I_k^2+\cdots} \qquad (12\text{-}25)$$

În această relație I_0^2 reprezintă pătratul componentei constante a curentului periodic, iar $I_1^2=\frac{I_{1m}^2}{2}$, $I_2^2=\frac{I_{2m}^2}{2}$, ș.a.m.d., reprezintă pătratele valorilor eficace ale armonicelor acestui curent.

Printr-un raționament analog obținem ca valoare eficace a f.e.m. periodice, respectiv a tensiunii periodice,

$$E=\sqrt{E_0^2+E_1^2+E_3^2+\cdots+E_k^2+\cdots} \qquad (12\text{-}26)$$

și

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\cdots+U_k^2+\cdots} \qquad (12\text{-}27)$$

12-6. Curenții produși de tensiuni periodice nesinusoidale aplicate circuitelor electrice

Ne propunem să determinăm curentul într-un circuit cu parametrii R, L, C constanți, legați în serie, cînd se aplică circuitului o tensiune periodică nesinusoidală. În acest scop, descompunem tensiunea în seria armonicelor sale. Vom avea

$$=U_0+u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots,$$

unde U_0 este componenta constantă, iar restul termenilor seriei reprezintă funcții sinusoidale de timp, de forma

$$u_k=U_{km}\sin(k\omega t+\psi_k).$$

Prin prezența în circuit a condensatorului, curentul produs de termenul constant al tensiunii este zero. Armonicele de tensiune produc fiecare cîte un curent alternativ sinusoidal de aceeași frecvență ca și armonica respectivă. Prin urmare, în circuit vom avea un termen fundamental și o serie de armonice superioare de curent.

Aplicînd principiul suprapunerii, curentul periodic i din circuit este dat de suma curenților produși de componentele tensiunii, adică vom avea expresia

$$i=i_1+i_2+\cdots+i_k+\cdots,$$

în care o armonică oarecare de ordinul k are ca expresie

$$i_k=I_{km}\sin(k\omega t+\psi_k-\varphi_k).$$

Amplitudinea acestei armonice este

$$I_{km}=\frac{U_{km}}{\sqrt{R^2+\left(k\omega L-\frac{1}{k\omega C}\right)^2}}, \qquad (12\text{-}28)$$

iar decalajul ei față de armonica de același ordin a tensiunii

$$\varphi_k=\operatorname{arctg}\frac{k\omega L-\frac{1}{k\omega C}}{R}. \qquad (12\text{-}29)$$

Prin urmare, ca și tensiunea aplicată, curentul din circuit este o funcție periodică nesinusoidală de timp, conținînd același număr de armonice ca și aceasta.

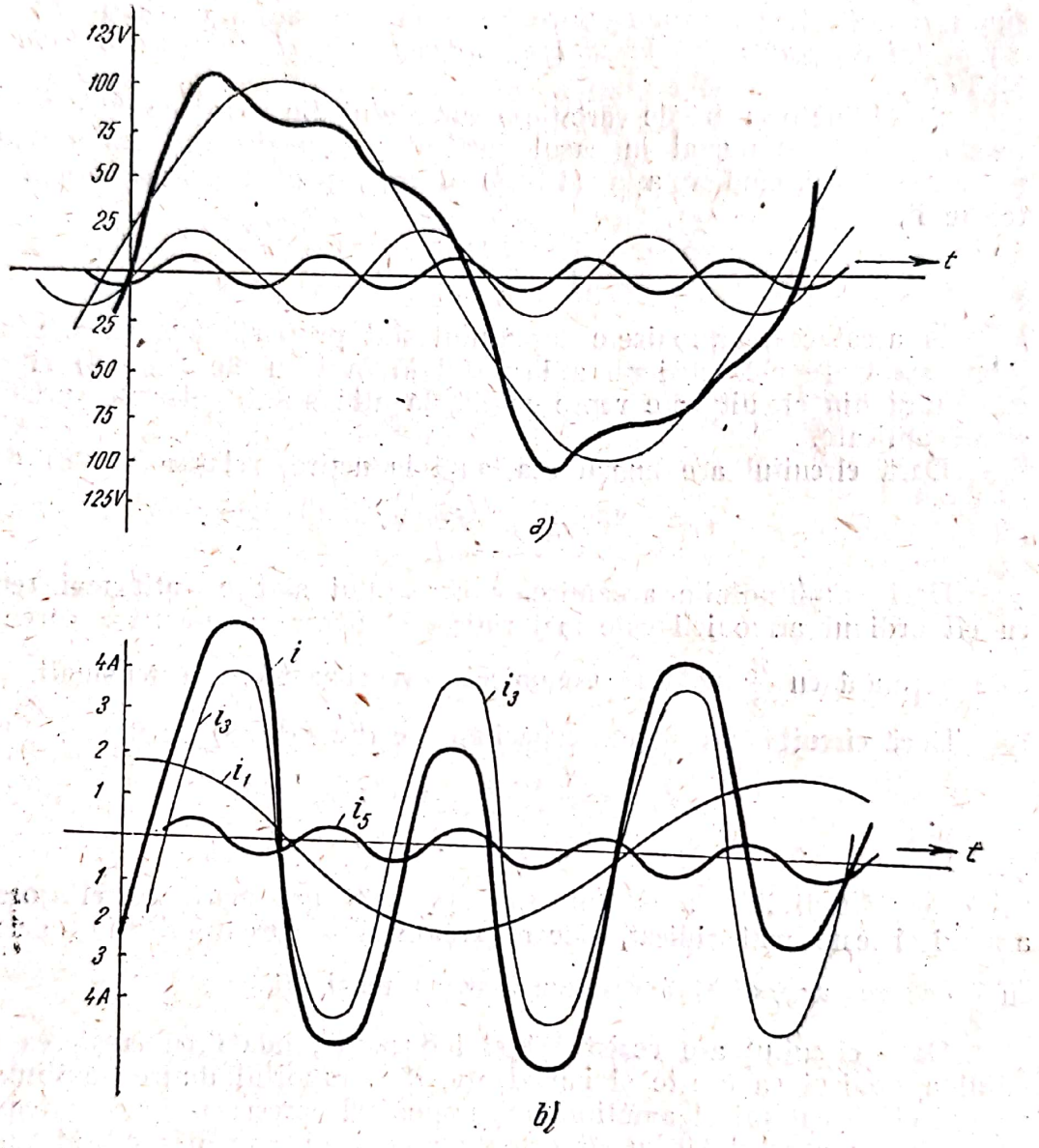


Fig. 12-17. Curba nesinusoidală a tensiunii aplicate unui circuit, curentul nesinusoidal corespunzător și armonicele respective ale tensiunii și curentului

Impedanța unei armonice de un ordin oarecare fiind

$$Z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_k^2},$$

în care $X_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C}$, rezultă că, în ipoteza că neglijăm efectul pelicular asupra rezistenței R, deci considerînd această rezistență constantă la diversele armonice ale f.e.m., impedanța circuitului și unghiul de

decalaj φ_k depind de ordinul armonicei respective. În consecință, armonicele curentului diferă de armonicele corespunzătoare ale tensiunii aplicate și forma curentului alternativ nesinusoidal i este diferită de aceea a tensiunii u aplicate circuitului. Spre deosebire de curba tensiunii, *în curba curentului nu predomină armonica fundamentală, ci armonica a treia* (fig. 12-17 *b*).

Se obține o curbă de variație a curentului din circuit asemenea curbei tensiunii aplicate numai în cazul particular cînd circuitul conține numai rezistență, deci cînd relația (12-28) devine, pentru oricare armonică a tensiunii,

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{R} .$$

În acest caz, armonicele curentului sînt proporționale cu armonicele corespunzătoare ale tensiunii aplicate și în fază cu ele ($\varphi_k = 0$) și curba curentului din circuit este reprezentată, la altă scară, chiar de curba tensiunii aplicate.

Dacă circuitul are numai reactanță inductivă, relația (12-28) devine

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{k\omega L} .$$

Deci amplitudinile armonicelor curentului sînt cu atît mai reduse, cu cît ordinul armonicii este mai ridicat și fiecare armonică a curentului este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea armonicei corespunzătoare a tensiunii.

Dacă circuitul are numai capacitate, relația (12-28) devine

$$I_{km} = \frac{U_{km}}{\frac{1}{k\omega C}} = k\omega C U_{km} ,$$

adică amplitudinile curentului sînt cu atît mai mari, cu cît ordinul armonicei este mai ridicat, fiecare armonică a curentului fiind decalată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea armonicei corespunzătoare a tensiunii.

Dacă circuitul are rezistență și inductanță, odată cu creșterea ordinului armonicei va crește și impedanța, deci raportul dintre amplitudinea armonicei curentului și amplitudinea armonicei corespunzătoare a tensiunii va scade. În consecință, cu cît ordinul armonicei este mai ridicat, cu atît armonica respectivă din curba curentului va fi mai puțin pronunțată față de armonica corespunzătoare a tensiunii. Curba curentului va fi mai apropiată de sinusoidă (mai puțin deformată), decît aceea a tensiunii aplicate.

Cînd circuitul cuprinde rezistență și capacitate, fenomenul se petrece invers decît în cazul precedent. Odată cu creșterea ordinului armonicei, impedanța circuitului scade, deci crește raportul dintre amplitudinea armonicei curentului și armonica corespunzătoare a tensiunii aplicate. Cu alte cuvinte, armonicele curentului vor fi cu atît mai exagerate, față de armonicele corespunzătoare ale tensiunii aplicate, cu cît ordinul lor este mai mare. În aceste condiții, este evident că curba curentului din circuit se depărtează și mai mult de sinusoidă, este mai deformată decît curba tensiunii aplicate.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul general, al prezenței în circuit a celor trei parametrii, R, L și C, cînd amplitudinea unei armonice oarecare este dată de relația (12-28), circuitul poate fi acordat în rezonanță cu una din armonicele superioare ale tensiunii. Pentru această armonică impedanța circuitului, redusă la rezistența R, are valoarea minimă, iar armonica respectivă a curentului va apare mult mai pronunțată decît armonica corespunzătoare a tensiunii.

Cînd tensiunea nesinusoidală este aplicată unui circuit format din ramuri în paralel, curentul din circuitul neramificat se determină în modul următor: Se calculează, sub formă complexă, admitanța echivalentă a întregului circuit (vezi par. 10-5) pentru fiecare armonică a tensiunii aplicate și, cu ajutorul modulului și argumentului acestor admitanțe, se determină amplitudinea și decalajul fiecărei armonice a curentului. Prin însumarea acestor armonice se obține, grafic sau analitic, curba nesinusoidală a curentului total.

Exemplul 12-2. Se dă circuitul electric care conține următorii parametrii legați în serie: $R = 5\ \Omega$, $L = 0{,}03$ H și $C = 30\ \mu$F. Să se determine curentul din circuit, dacă i se aplică o tensiune periodică, de frecvență $f = 50$ Hz, dată de relația

$$u = 100\ sin\ \omega t + 20\ sin\ (3\omega t - 90^0) + 10\ sin\ (5\omega t + 45^0).$$

Soluția: Armonica fundamentală a curentului

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{1L} - X_{1C})^2} = \sqrt{5^2 + \left(314 \cdot 0{,}03 - \frac{10^6}{314 \cdot 40}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + (9{,}42 - 79{,}6)^2} = \sqrt{5^2 + (-60{,}18)^2} = 60{,}4\ \Omega.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{60{,}18}{5} = -12{,}036\ ;\quad \varphi_1 = -85°15'\ ;$$

$$I_{1m} = \frac{100}{60{,}4} = 1{,}65\ \text{A}.$$

Armonica de ordinul trei

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{3L} - X_{3C})^2} = \sqrt{5^2 + \left(3 \cdot 314 \cdot 0{,}03 - \frac{10^6}{3 \cdot 314 \cdot 40}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + (28{,}26 - 26{,}53)^2} = \sqrt{5^2 + 1{,}73^2} = 5{,}29\ \Omega.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{1{,}73}{5} = 0{,}346\ ;\quad \varphi_3 = 19°8'\ ;$$

$$I_{3m} = \frac{20}{5{,}29} = 3{,}78\ \text{A}.$$

Armonica de ordinul cinci

$$Z_5 = \sqrt{R^2 + (X_{5L} - X_{5C})^2} = \sqrt{5^2 + (47{,}1 - 15{,}92)^2} = \sqrt{5^2 + 31{,}18^2} = 31{,}8\ \Omega.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_5 = \frac{31{,}18}{5} \simeq 6{,}25\ ,\quad \varphi_5 = 80°55'\ ;$$

$$I_{5m} = \frac{10}{31{,}8} = 0{,}314\ \text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Curentul total este

$$i = i_1 + i_2 + i_5 = 1{,}65 \sin(\omega t + 85°15') + 3{,}78 \sin(3\omega t - 70°52') + \\ + 0{,}314 \sin(5\omega t - 54°8') \cdot$$

În fig. 12-17 au fost reprezentate : în *a)* tensiunea aplicată circuitului, împreună cu armonicele sale, în *b)* armonicele curetului și curba curentului periodic nesinusoidal.

12-7. Filtre electrice

Proprietatea circuitelor care conțin inductanță și capacitate de a prezenta impedanțe diferite pentru armonice de curent de ordin diferit, atunci cînd tensiunea aplicată circuitului conține armonice superioare, este utilizată pentru a înăbuși anumite armonice ale curentului sau, din potrivă, de a le amplifica. Pentru aceasta, se conectează în circuitul receptorului anumite circuite speciale, numite *filtre electrice*.

Dacă, de pildă, în curba tensiunii aplicate există o armonică de ordinul k a cărei prezență în curba curentului receptorului nu este dorită, se conectează în serie cu receptorul un filtru format dintr-o bobină de inductanță L și un condensator C legate în paralel (fig. 12-18 *a*). Prin

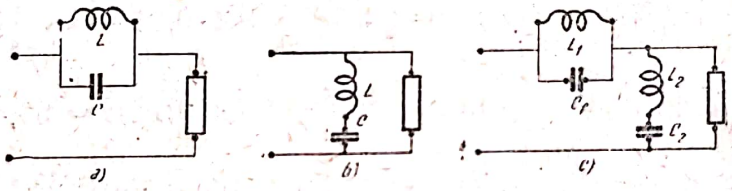


Fig. 12-18. Filtre electrice pentru înăbușirea anumitor armonice

acordarea în rezonanță a filtrului pentru armonica k, cînd, conform celor arătate în par. 9-12,

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C},$$

impedanța filtrului corespunzătoare armonicei k va fi foarte mare în comparație cu valoarea ei față de oricare altă armonică din circuit și armonica de ordinul k a curentului va fi redusă la o valoare neglijabilă.

Asemenea filtre se utilizează în mod curent în radiotehnică.

În același scop se poate întrebuința un filtru, legat în paralel cu receptorul, compus dintr-o bobină și un condensator legate în serie (fig. 12-18 *b*). Dacă se acordează circuitul filtrului în rezonanță cu armonica indezirabilă k, impedanța filtrului pentru această armonică devine aproape zero în comparație cu impedanța receptorului. Curentul i_k, care apare în circuitul dintre generator și filtru, produce în generator o cădere de tensiune u_{ok} aproximativ egală cu f.e.m. e_k a acestei armonice. La bornele receptorului armonica de acest ordin a tensiunii este egală cu diferența $e_k - u_{ok}$ care este foarte mică, deci curentul produs de ea în receptor este neglijabil.

Pentru eliminarea cît mai completă a unei anumite armonice, se utilizează uneori, simultan, ambele filtre, montate așa cum se arată în fig. 12-18 *c*.

Dacă dorim să scoatem în evidenţă sau să mărim în curba curentului unui receptor o armonică de un ordin oarecare k, cînd armonica respectivă există în curba tensiunii, se utilizează filtre electrice legate în circuitul receptorului după schema din fig. 12-19. În particular, acest procedeu se aplică atunci cînd dorim să accentuăm unda fundamentală a curentului din receptor. Se poate şi aci utiliza filtrul legat în serie cu recep-

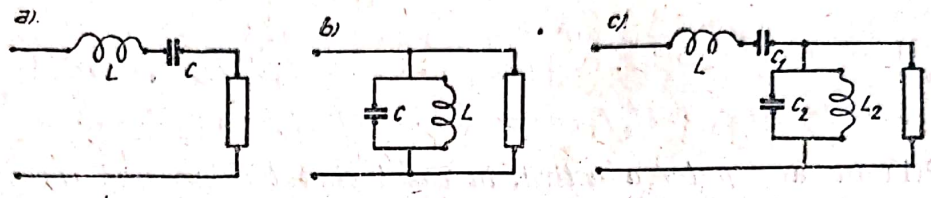


Fig. 12-19. Filtre electrice pentru întărirea anumitor armonice

torul (fig. 12-19 *a*) sau în derivaţie cu acesta (fig. 12-19 *b*) sau se pot utiliza ambele filtre întăritoare (fig. 12-19 *c*).

Cu ajutorul schemei din fig. 12-20 putem obţine, simultan, ate-

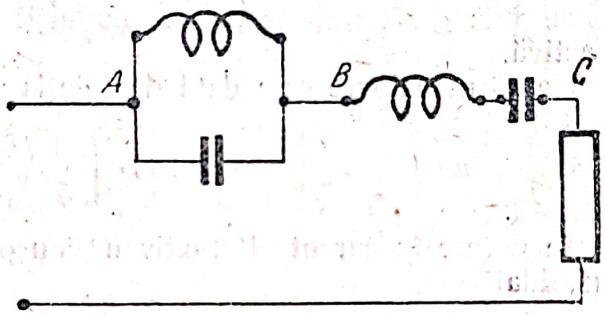


Fig. 12-20. Filtre electrice mixte pentru înăbuşirea unei anumite armonice şi întărirea altei armonice

nuarea armonicei de ordinul k şi accentuarea celei de ordinul n. În acest scop, parametri schemei se aleg astfel încît în porţiunea AB a circuitului să se producă rezonanţa curenţilor pentru armonica de ordinul k, iar în porţiunea BC, rezonanţa tensiunilor pentru armonica de ordinul n.

12-8. Puterea în regim nesinusoidal

Am arătat, în par. 9-9, că puterea activă în curent alternativ, egală cu puterea medie de-a lungul unei perioade, este dată de relaţia

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \int_0^T u\,i\,dt \qquad (12\text{-}30)$$

care se aplică oricare ar fi forma mărimilor periodice u şi i.

În cazul cînd aceste mărimi periodice sînt nesinusoidale, ele se descompun în armonicele respective şi relaţia precedentă devine

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots)\,(I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \cdots +$$

$$+ i_k + \cdots)\,dt = \sum_0^n \frac{1}{T}\int_0^T u_k\,i_k\,dt + \sum_0^n \frac{1}{T}\int_0^T u_k\,i_n\,dt\ ,$$

în care $k \neq n$. După cum s-a arătat în par. 12-5, integrala a doua din membrul al doilea al relației precedente este nulă, și expresia puterii active ia forma

$$P = \sum_0^n \frac{1}{T} \int_0^T u_k \, i_k \, dt \qquad (12\text{-}31)$$

sau

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_k + \cdots = U_0 I_0 + U_1 U_1 \cos \varphi_1 + \\ + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \cdots + U_k I_k \cos \varphi_k + \cdots \qquad (12\text{-}32)$$

Prin urmare, *puterea activă, în cazul cînd tensiunea și curentul din circuit sînt funcții periodice nesinusoidale, este egală cu suma puterilor active ale diferitelor armonice.*

Prin analogie cu regimul sinusoidal, puterea activă în regim nesinusoidal poate fi exprimată prin valorile eficace U și I, ale tensiunii și curentului nesinusoidal. Deoarece însă, în genere, puterea activă P este mai mică decît produsul UI al acestor valori, trebuie să utilizăm un coeficient oarecare α, mai mic decît unitatea, care, înmulțit cu acest produs, să ne dea puterea activă.

Coeficientul α, a cărui valoare este dată de relația

$$\alpha = \frac{P}{UI} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T u\, i\, dt\right] : \left[\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u\, i\, dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt}\right], \qquad (12\text{-}33)$$

este numit factor de putere în curent alternativ nesinusoidal.

În regim sinusoidal

$$\alpha = \cos \varphi .$$

Pentru a defini puterea în regim nesinusoidal se pornește de la următoarele considerații:

În acest regim, puterea aparentă poate fi pusă sub forma

$$S^2 = P^2 + P_c^2 = U^2 I^2 , \qquad (12\text{-}34)$$

în care P_c reprezintă puterea complementară care lipsește puterii active pentru a fi egală cu puterea aparentă (în cazul regimului sinusoidal $P_c = Q$), iar U și I sînt date de relațiile

$$U^2 = \sum_0^n U_k^2$$

și

$$I^2 = \sum_0^n I_n^2 .$$

Dacă notăm cu φ_n defazajul dintre armonica de curent de ordinul n față de armonica de tensiune de ordinul n, relația a doua de mai sus poate fi pusă sub forma

$$I^2 = \sum_0^n I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n) = \sum_0^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_0^n I_n^2 \sin^2 \varphi_n .$$

În aceste condiții, relația (12-34) devine

$$S^2 = \sum_0^n U_k^2 \cdot \sum_0^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_0^n U_k^2 \sum_0^n I_n^2 \sin^2 \varphi_n \cdot$$

Dacă ținem seama de identitatea lui Lagrange

$$\sum_0^n a_k^2 \sum_0^n b_n^2 = \left(\sum_0^n a_k b_n\right)^2 + \sum_0^n (a_k b_n - a_n b_k)^2 \ ,$$

se poate scrie

$$S^2 = \left(\sum_0^n U_n I_n \cos \varphi_n\right)^2 + \sum_0^n (U_k I_n \cos \varphi_n - U_n I_k \cos \varphi_k)^2 +$$

$$+ \left(\sum_0^n U_n I_n \sin \varphi_n\right)^2 + \sum_0^n (U_k I_n \sin \varphi_n - U_n I_k \sin \varphi_k)^2 \cdot \quad (12\text{-}35)$$

Primul termen din această expresie reprezintă pătratul puterii active P în regim nesinusoidal [relația (12-32)]. Comparînd relațiile (12-34) și (12-35) rezultă că puterea complementară are ca expresie

$$P_c^2 = \left(\sum_0^n U_n I_n \sin \varphi_n\right)^2 + \sum_0^n [(U_k I_n \cos \varphi_n - U_n I_k \cos \varphi_k)^2 +$$

$$+ (U_k I_n \sin \varphi_n - U_n I_k \sin \varphi_k)^2] \ , \quad (12\text{-}36)$$

în care termenul

$$\left(\sum_0^n U_n I_n \sin \varphi_n\right)^2$$

reprezintă pătratul sumei puterilor reactive ale fiecărei armonice în parte.

În urma propunerii Acad. Prof. C. Budeanu, s-a acceptat de electrotehnicienii din toată lumea ca puterea reactivă în regimul nesinusoidal să fie definită prin relația

$$Q = \sum_0^n U_n I_n \sin \varphi_n \ , \quad (12\text{-}37)$$

adică sub o formă analogă cu cea admisă pentru puterea activă.

Dacă se notează cu D^2 restul termenilor expresiei (12-35), puterea aparentă în regimurile nesinusoidale ia forma

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \ .$$

Prin urmare, puterea aparentă poate fi descompusă, în acest regim, în trei componente ortogonale și anume: puterea activă P, puterea reactivă Q și puterea D, care poartă numele de *putere deformantă*.

Valoarea puterii deformante este dată de relația

$$D = \sqrt{\sum_0^n [(U_k I_n \cos \varphi_n - U_n I_k \cos \varphi_k)^2 + (U_k I_n \sin \varphi_n - U_n I_k \sin \varphi_k)^2]} \ .$$

Dacă desfacem parantezele de sub semnul sumă, relaţia puterii deformante, după o serie de transformări, ia forma

$$D = \sqrt{\sum_{0}^{n} [U_k^2 I_n^2 + U_n^2 I_k^2 - 2 U_k U_n I_k I_n \cos(\varphi_k - \varphi_n)]} \quad , \quad (12\text{-}38)$$

care reprezintă expresia clasică a acestei puteri.

Noţiunea de putere deformantă a fost introdusă în ştiinţă de Acad. Prof. C. Budeanu. Prin prezenţa acestei puteri, regimurile nesinusoidale se mai numesc şi *regimuri deformante*.

Dacă punem factorul de putere α al regimului nesinusoidal [relaţia (12-33)] sub forma

$$\alpha = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \quad ,$$

se vede că prin prezenţa în circuit a puterii deformante, acest factor de putere este subunitar chiar atunci cînd puterea reactivă din circuit este nulă ($Q = 0$).

În practică se utilizează, de regulă, diagramele vectoriale şi în cazul regimului nesinusoidal, înlocuindu-se tensiunile şi curenţii de formă nesinusoidală prin tensiuni şi curenţi sinusoidali echivalenţi, avînd valorile eficace calculate ca mărimi nesinusoidale. Pentru a se păstra valoarea puterii active, mărimile echivalente sinusoidale se presupun decalate între ele cu un unghi al cărui cosinus este egal cu factorul de putere α al regimului nesinusoidal, dat de relaţia (12-33). Prin urmare

$$\cos\varphi = \alpha \cdot$$

Exemplul 12-3. Se cere să se determine valoarea eficace a tensiunii şi a curentului, puterea activă şi factorul de putere al circuitului din exemplul 12-2.

Soluţia:

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{1{,}41} = 71 \text{ V} ; \quad U_3 = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}2 \text{ V} ; \quad U_5 = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}1 \text{ V} \cdot$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{5041 + 201{,}64 + 50{,}41} = 72{,}75 \text{ V} \cdot$$

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}65}{\sqrt{2}} = 1{,}17 \text{ A} ; \quad I_3 = \frac{3{,}78}{\sqrt{2}} = 2{,}68 \text{ A} ; \quad I_5 = \frac{0{,}314}{\sqrt{2}} = 0{,}222 \text{ A}.$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{1{,}37 + 7{,}13 + 0{,}0985} = 3{,}01 \text{ A} \cdot$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{5}{60{,}4} = 0{,}083 ; \quad \cos\varphi_3 = \frac{5}{5{,}29} = 0{,}945 ; \quad \cos\varphi_5 = \frac{5}{31{,}8} = 0{,}157 \cdot$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 71 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}083 = 6{,}9 \text{ W} \cdot$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos\varphi_3 = 14{,}2 \cdot 2{,}68 \cdot 0{,}945 = 35{,}96 \text{ W} ;$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos\varphi_5 = 7{,}1 \cdot 0{,}222 \cdot 0{,}157 = 0{,}247 \text{ W} ;$$

$$P = P_1 + P_3 + P_5 = 6{,}9 + 35{,}8 + 0{,}24 = 43{,}107 \text{ W} \cdot$$

$$\alpha = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{43{,}107}{72{,}75 \cdot 301} = 0{,}2 \cdot$$

Scanned with OKEN Scanner

12-9. Armonice superioare în sistemele trifazate

Cînd f.e.m. produse de generatoarele electrice sînt nesinusoidale, relațiile stabilite în cap. XI cu privire la sistemele trifazate suferă unele modificări.

Să presupunem că generatorul produce un sistem trifazat simetric de f.e.m., dar că aceste f.e.m. sînt nesinusoidale. Aceasta înseamnă, totuși, că ele sînt identice ca formă și sînt decalate între ele cu $2\pi/3$. Valorile instantanee ale sistemului de f.e.m. pot fi exprimate prin relațiile

$$e_A = e_{A1} + e_{A3} + e_{A5} + \cdots = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t + E_{5m} \sin 5\omega t + \cdots ; \tag{12-34}$$

$$e_B = e_{B_1} + e_{B_3} + e_{B_5} + \cdots = E_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + E_{3m} \sin 3\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + E_{5m} \sin 5\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cdots ; \tag{12-35}$$

$$e_C = e_{C_1} + e_{C_3} + e_{C_5} + \cdots = E_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + E_{3m} \sin 3\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + E_{5m} \sin 5\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \cdots . \tag{12-36}$$

Valorile eficace ale f.e.m. pe fază sînt date de relația

$$E_A = E_B = E_C = \sqrt{\frac{E_{1m}^2}{2} + \frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{5m}^2}{2} + \cdots} = E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \cdots \tag{12-37}$$

Armonicele de ordinul trei din sistemul de mai sus pot fi puse sub forma

$$\left.\begin{aligned} e_{A3} &= E_{3m} \sin 3\omega t ; \\ e_{B3} &= E_{3m} \sin 3\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = E_{3m} \sin 3\omega t ; \\ e_{C3} &= E_{3m} \sin 3\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_{3m} \sin 3\omega t . \end{aligned}\right\} \tag{12-38}$$

Urmează deci că toate cele trei armonice de ordinul trei ale sistemului sînt în fază și formează un sistem homopolar (fig. 12-21).

La aceeași concluzie se ajunge și pentru armonicele multiple (9, 15, 21 etc.) ale armonicei de ordinul trei.

Să examinăm acum consecințele care decurg, în cazul conexiunii fazelor sistemului trifazat în stea și în triunghi, în ipoteza unor încărcări identice a fazelor, din constatarea că armonicele de ordinul trei și multiplu de trei sînt homopolare.

În cazul conexiunilor fazelor generatorului în stea (fig. 11-5) prima consecinţă importantă este că dispar armonicele de ordinul trei şi multiplu de trei din tensiunea pe linie.

Într-adevăr, deoarece tensiunea pe linie, potrivit relaţiei (11-3), este

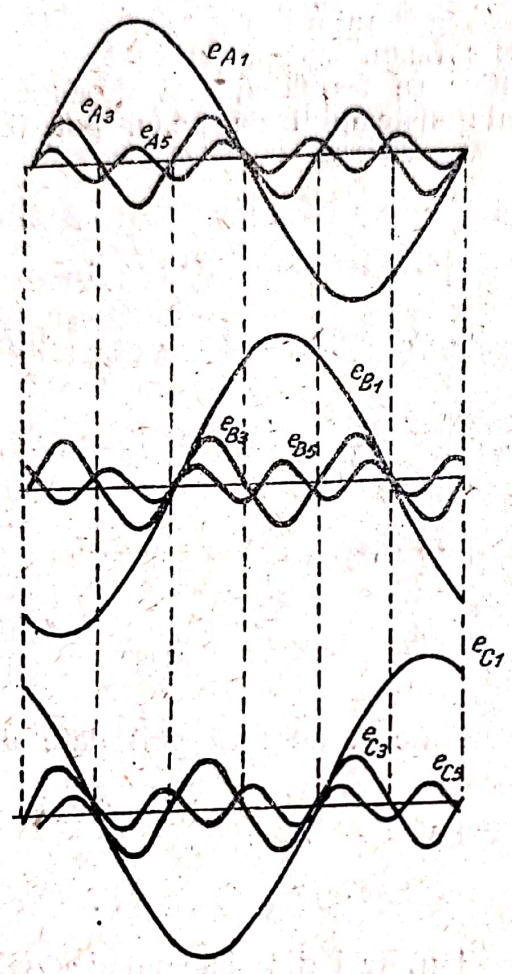


Fig. 12-21. Armonicele unui sistem trifazat

dată de diferenţa a două tensiuni pe fază, diferenţa dintre armonicele de ordinul trei şi multiplu de trei de pe fazele respective este nulă, aceste armonice fiind egale ca valoare şi în fază.

Vom avea, ca valoare eficace a tensiunii pe linie,

$$U_l = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + \cdots} \quad . \quad (12\text{-}39)$$

Tensiunea eficace pe fază a sistemului fiind

$$U_f = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \cdots},$$

rezultă că

$$\frac{U_l}{U_f} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + \cdots}}{\sqrt{U_1 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \cdots}} < \sqrt{3} \quad .$$

Este evident că în aceste condiții forma curbei tensiunilor pe linie diferă de aceea a tensiunilor pe fază.

În cazul conexiunilor în triunghi ale fazelor generatorului, înfășurările celor trei faze formează un circuit închis (fig. 11-9) în care armonicele de ordinul trei și multiplu de trei al f.e.m. homopolare se adună și dau o f.e.m. totală

$$e = 3e_3 + 3e_9 + e_{15} + \cdots = 3(e_3 + e_9 + e_{15} + \cdots),$$

suma celorlalte f.e.m. fiind nulă, ele formînd sisteme simetrice.

Valoarea eficace a acestei f.e.m. este

$$E = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \cdots}$$

F.e.m. totală produce în circuitul închis al fazelor un curent total de circulație

$$i = i_3 + i_9 + i_{15} + \cdots , \qquad (12\text{-}40)$$

a cărui valoare eficace este

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \cdots} .$$

Dacă notăm cu Z_3, Z_9 etc. impedanțele fiecărei faze a generatorului pentru armonicele respective, valoarea eficace a curentului fiecărei armonice este

$$I_3 = \frac{I_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3E_{3m}}{3Z_3} ; \quad I_9 = \frac{I_{9m}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3E_{9m}}{3Z_9} \quad \text{etc.}$$

Curentul total produce, în fiecare fază, căderi de tensiune egale și de sens opus cu f.e.m. care îl produce, deci compensează complet această f.e.m. și, odată cu ea, toate armonicele homopolare de ordinul trei și multiplu de trei care o compun. În felul acesta, tensiunile de linie nu vor mai conține aceste armonice.

În consecință, valoarea eficace a tensiunii de linie este

$$U_l = \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \cdots} \qquad (12\text{-}41)$$

Urmează, din cele expuse, că *atît în cazul conexiunilor în stea cît și în cazul celor în triunghi ale fazelor generatoarelor electrice de curent alternativ, tensiunile pe linie nu conțin armonice de ordinul trei și multiplu de trei.*

Această concluzie este valabilă și pentru transformatoarele electrice.

Să examinăm influența armonicelor tensiunii asupra curenților de sarcină ai sistemului trifazat și asupra tensiunii dintre punctele neutre ale generatorului și ale receptorului.

Cînd fazele generatorului sînt legate în stea, iar ale receptorului în triunghi, lipsind armonica de ordinul trei și multiplu de trei din tensiunea pe linie, aceste armonice vor lipsi și din curenții pe linie. Vom avea, pentru generator

$$I_l = I_f = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \cdots} , \qquad (12\text{-}43)$$

iar pentru receptor,

$$I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \cdots} \quad .$$

Într-un sistem trifazat cu patru conductoare (generatorul în stea, receptorul în stea și distribuția cu fir neutru), în cazul unor tensiuni pe faze sinusoidale și simetrice și a unei sarcini uniforme, curentul în firul neutru este nul.

În cazul unor tensiuni pe faze simetrice nesinusoidale, curenții pe fază vor fi simetrici și vor conține și armonicele homopolare de ordinul trei și multiplu de trei. În consecință, valoarea instantanee a curentului în firul neutru nu va mai fi nulă ci va fi egală cu suma valorilor instantanee a acestor armonice homopolare, deoarece suma armonicelor fundamentale și a armonicelor de alt ordin decît ordinul trei și multiplu de trei este nulă.

Prin urmare, valoarea eficace a curentului în firul neutru este dată, în acest caz, de relația

$$I_0 = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \cdots} \quad . \qquad (12\text{-}42)$$

Să presupunem acum că distribuția nu are fir neutru (fig. 11-16). Am arătat în par. 11-5 că, dacă f.e.m. pe fază sînt sinusoidale și simetrice și sarcina este uniformă, tensiunea dintre punctele neutre ale generatorului și receptorului de energie este zero, adică deplasarea punctului neutru este nulă.

Dacă f.e.m. sînt nesinusoidale, în curbele curentului nu mai pot apare armonicele de ordinul trei și multiplu de trei ale acestuia, deoarece, lipsind firul neutru, aceste armonice homopolare nu au pe unde să se închidă. Aceasta provoacă o deplasare a punctului neutru, care se explică în modul următor:

Fiecare armonică a tensiunilor pe fază ale generatorului produce o armonică a tensiunii de deplasare a punctului neutru, dată de relația (11-6), în care $Y_0 = 0$ și $Y_A = Y_B = Y_C = Y_f$. Pentru armonica principală vom avea

$$\underline{U}_{01} = \frac{\underline{U}_{A1}\,\underline{Y}_1 + \underline{U}_{B1}\,\underline{Y}_1 + \underline{U}_{C1}\,\underline{Y}_1}{3\underline{Y}_1} = \frac{1}{3}\,(\underline{U}_{A1} + \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{C1}) \quad .$$

Deoarece, însă, pentru armonica fundamentală avem

$$\underline{U}_{A1} + \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{C1} = 0 \quad ,$$

rezultă că

$$\underline{U}_{01} = 0 \quad .$$

Aceeași concluzie o scoatem pentru toate armonicele de ordin superior, altele decît armonica de ordinul trei și multiplu de trei.

Pentru armonica de ordinul trei, tensiunea de deplasare a punctului neutru este

$$U_{03} = \frac{\underline{U}_{A3} + \underline{U}_{B3} + \underline{U}_{C3}}{3\,Y_3}\,\underline{Y}_3 = \frac{1}{3}\,(\underline{U}_{A3} + \underline{U}_{B3} + \underline{U}_{C3}) \quad .$$

Deoarece armonicele de ordinul trei ale sistemului sînt homopolare, adică au amplitudini egale și sînt în fază, rezultă

$$\overline{U}_{03} = \frac{3\overline{U}_{A3}}{3} = \overline{U}_{A3} = \overline{U}_{B3} = \overline{U}_{C3} \quad . \qquad (12\text{-}45)$$

La fel putem constata că și celelalte armonice pe fază de ordin multiplu de trei produc armonice ale tensiunii de deplasare a punctului neutru egale cu ele însăși.

Urmează că între punctele neutre ale generatorului și receptorului apare o tensiune de frecvență triplă decît a tensiunii fundamentale, a cărei valoare eficace este

$$\overline{U}_0 = \sqrt{\overline{U}_{A3}^2 + \overline{U}_{A9}^2 + U_{A15}^2 + \cdots} \quad . \qquad (12\text{-}4)$$

Această tensiune poate constitui un pericol de electrocutare.

Prin urmare, în acest caz, curenții pe fază și cei pe linie, care sînt egali cu ei, nu conțin armonicele de ordinul trei și multiplu de trei. De exemplu, pentru faza A avem

$$\overline{I}_{A3} = (\overline{U}_{A3} - \overline{U}_{03})\,\overline{Y}_3 = (\overline{U}_{A3} - \overline{U}_{A3})\,\overline{Y}_3 = 0 \quad ;$$

$$\overline{I}_{A9} = (\overline{U}_{A9} - \overline{U}_{09})\,\overline{Y}_9 = (\overline{U}_{A9} - \overline{U}_{A9})\,\overline{Y}_9 = 0 \quad ;$$

ș.a.m.d., și la fel pentru fazele B și C.

Valoarea eficace a curentului este

$$I_A = \sqrt{I_{A1}^2 + I_{A5}^2 + I_{A7}^2 + \cdots} \quad . \qquad (12\text{-}4)$$

În cazul cînd fazele generatorului sînt legate în triunghi și el debitează pe un circuit exterior (fig. 11-9), deoarece tensiunile pe fază, pentru motivul arătat mai sus, nu conțin armonicele de ordinul trei și multiplu de trei, nici curenții pe linie nu vor conține aceste armonice.

Valoarea eficace a curentului pe linie este

$$I_l = \sqrt{3}\,\sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \cdots} \quad , \qquad (12\text{-}4)$$

iar cea a curentului pe fază în înfășurarea generatorului,

$$I_f = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \cdots} \quad . \qquad (12\text{-}4)$$

Rezultă că raportul între curentul de linie și cel pe fază este mai mic decît $\sqrt{3}$, căci

$$\frac{I_l}{I_f} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{I_1^2 + 0 + I_5^2 + I_7^2 + 0 + I_{11}^2 + \cdots}}{\sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + I_{11}^2 + \cdots}} < \sqrt{3} \quad .$$

12-10. Concluzii asupra prezenței în circuite a armonicelor superioare

Din cele expuse mai sus rezultă că prezența armonicelor superioare în rețelele electrice produce o serie de fenomene nedorite, printre care sînt de semnalat: reducerea factorului de putere, pericolul rezonanței unor armonice superioare, însoțită de apariția de supratensiuni în diverse puncte ale rețelei, apariția unor fenomene perturbatorii în transmisiile de radio și în liniile de telecomunicație, în cazul unor armonice de frecvența sunetului etc.

De aceea generatoarele de curent alternativ (alternatoarele), care alimentează cu energie rețelele electrice, se construiesc în așa fel încît să producă f.e.m. cît mai sinusoidale.

Totuși sînt unele aplicații, de pildă în instalațiile de comandă automată și de reglare automată de mică putere și într-o serie de instalații speciale, cînd este necesar ca forma curbei tensiunii și a curentului să difere de sinusoidă, adică ele să conțină armonice superioare. Printr-unul din procedeele arătate mai sus, unele din aceste armonice sînt amplificate și pot fi utilizate în anumite scopuri.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XIII

CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV CU BOBINE CU MIEZ DE FIER

13-1. Inductanțe constante și inductanțe variabile în timpul perioadei

În problemele și fenomenele examinate pînă acum am considerat tacit că inductanța circuitului este constantă, independentă de variația intensității curentului în decursul unei perioade, ceea ce implică o valoare constantă pentru permeabilitatea mediului. Acesta este cazul cînd liniile de inducție magnetică, înlănțuite cu circuitul respectiv, se închid numai prin aer, al cărui coeficient de permeabilitate, practic egal cu μ_0, este constant.

În prezența însă a substanțelor feromagnetice, coeficientul de permeabilitate nu rămîne constant decît cu totul aproximativ și numai dacă inducția, în timpul perioadelor, rămîne tot timpul departe de valorile corespunzătoare saturației.

Circuitele electrice conțin, foartea adesea, porțiuni prevăzute cu miezuri de fier: bobine de reactanță, transformatoare, mașini electrice, aparate de măsură etc., în care, pentru motive economice, inducția este împinsă la valori uneori foarte ridicate. În aceste porțiuni de circuit, fluxul magnetic se închide, total sau parțial, prin circuitul magnetic de fier.

Inductanța în aceste porțiuni de circuit nu se mai păstrează constantă, ci depinde de valoarea curentului din înfășurarea bobinei respective prevăzute cu miez de fier sau, ceea ce este același lucru, de tensiunea la bornele bobinei. În consecință relația

$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

care ne dă f.e.m. indusă în bobină, nu mai poate fi folosită.

În acest caz, se utilizează relația

$$e = -w\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

în care φ este fluxul variabil prin cele w spire ale bobinei.

Dacă u este tensiunea aplicată bobinei și r este rezistența circuitului său electric, avem, conform legii a doua a lui Kirchhoff,

$$u - w\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = ri,$$

de unde

$$u = r\,i + w\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,t}\,. \tag{13-1}$$

În ipoteza că neglijăm rezistența r, relația precedentă devine

$$u = -e = w\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\,t}\,, \tag{13-2}$$

adică tensiunea aplicată echilibrează f.e.m. de inducție a bobinei.

Dacă aplicăm bobinei cu miez de fier o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = \sqrt{2}\,U\sin\left(\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right),$$

fluxul magnetic al bobinei va fi de asemenea sinusoidal, deoarece, conform relației (13-2),

$$\mathrm{d}\,\varphi = \frac{1}{w}\,u\,\mathrm{d}\,t = \frac{\sqrt{2}\,U}{w}\sin\left(\omega\,t + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\,t\,,$$

de unde obținem relația

$$\varphi = \sqrt{2}\,\frac{U}{w\,\omega}\sin\omega\,t = \Phi\sin\omega\,t\,, \tag{13-3}$$

în care

$$\Phi = \sqrt{2}\,\frac{U}{w\,\omega}\,. \tag{13-4}$$

În relația (13-3) am presupus că valoarea constantei de integrare, care reprezintă un flux de valoare constantă ce nu intervine în fenomenul echilibrării tensiunii aplicate, este zero.

Cu toate că tensiunea aplicată circuitului electric prevăzut cu miez de fier este sinusoidală și odată cu ea fluxul magnetic al circuitului, totuși, din cauza formei neliniare a curbei de magnetizare, curentul în acest circuit este nesinusoidal.

Curba curentului într-un asemenea circuit se determină pe cale grafică, din curba de magnetizare a materialului feromagnetic respectiv, dedusă pe cale experimentală, și din curba sinusoidală a fluxului [relația (13-3)].

Vom considera succesiv două cazuri: cînd fenomenul histerezis din fierul circuitului magnetic al bobinei poate fi neglijat și cînd se ține seama de acest fenomen. În ambele cazuri vom neglija pierderile prin curenți Foucault.

13-2. Curentul din circuitul cu miez de fier cînd se neglijează fenomenul histerezis

Să presupunem dată curba de magnetizare $\varphi = f\,(i)$ a materialului feromagnetic care constituie sîmburele bobinei de fier și curba sinusoidală $\varphi = \Phi\sin\omega\,t$ de variație a fluxului din bobină (fig. 13-1).

În cazul de față, în care neglijem atît pierderile Joule-Lenz în circuit, prin neglijarea rezistenței r a acestuia, cît și pierderile prin fenomenul histerezis în miezul feromagnetic, în circuit nu va apare nici o putere activă, deci curentul nu va avea nici o componentă activă, în fază cu tensiunea aplicată. Prin urmare, el va fi decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii aplicate, adică va fi în fază cu fluxul pe care îl produce. Va fi un curent pur inductiv, un *curent magnetizant.*

În fig. 13-1 se arată, prin linii întrerupte, modul cum se determină un punct oarecare c al curbei curentului bobinei, corespunzător unui flux $\Phi = ab$ al miezului feromagnetic. Repetînd aceeași construcție pentru diverse momente ale unei perioade a fluxului și unind între ele punctele astfel determinate, se obține curba curentului $i = f(t)$.

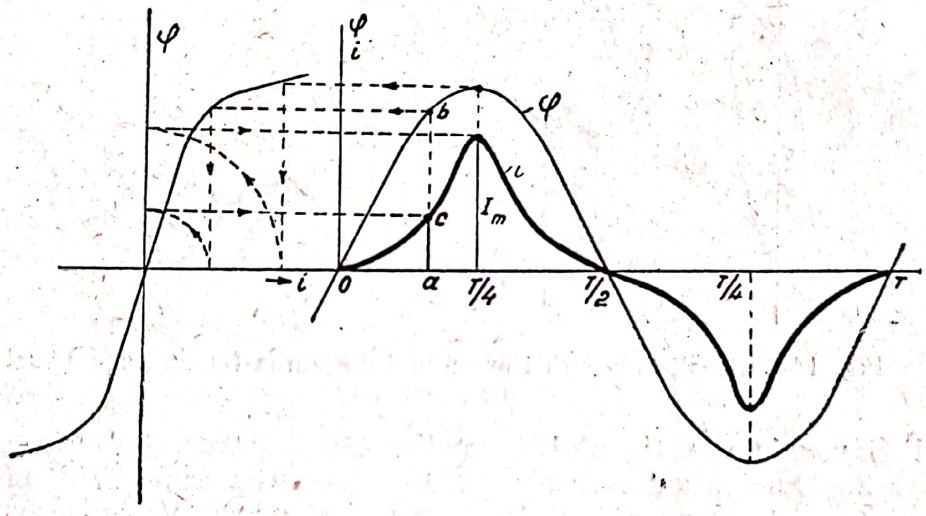


Fig. 13-1. Construirea curbei curentului din curba fluxului și din curba de magnetizare

Așa cum trebuia să ne așteptăm, curba curentului este în fază cu cea a fluxului magnetic, cele două curbe, una nesinusoidală, cealaltă sinusoidală, trecînd simultan prin zero și valorile lor maxime.

Curba curentului magnetizant este o curbă ascuțită, simetrică, la fel cu aceea examinată în par. 12-3 și reprezentată în fig. 12-2, deci care conține, în afară de armonica fundamentală, o pronunțată armonică de ordinul trei. În cazul unei saturații accentuate a miezului de fier, curba curentului va conține, într-o măsură mai redusă, și armonicele de ordinul cinci și șapte.

Dacă fierul circuitului magnetic lucrează complet nesaturat, curba de variație a curentului de magnetizare este practic o sinusoidă.

13-3. Curentul din circuitul cu miez de fier, cînd se ține seama de fenomenul histerezis

În general trebuie să ținem seama de fenomenul histerezis care apare în fierul circuitelor respective. În acest caz, procesul ciclic de magnetizare și demagnetizare a miezului de fier se face după cele două ramuri ale buclei de histerezis.

Ca și în cazul precedent, la o tensiune sinusoidală aplicată circuitului electric fluxul din circuitul magnetic este sinusoidal, dar curba de variație a curentului din circuit este nesinusoidală.

Deoarece fenomenul histerezis produce o pierdere de energie activă, curentul din circuit va avea o componentă activă care să acopere această pierdere. Urmează că el va fi decalat, față de tensiunea aplicată, cu un unghi mai mic de $\frac{\pi}{2}$, deci va fi în avans față de flux cu un anumit unghi β.

Curba curentului se construiește cu ajutorul buclei de histerezis și a

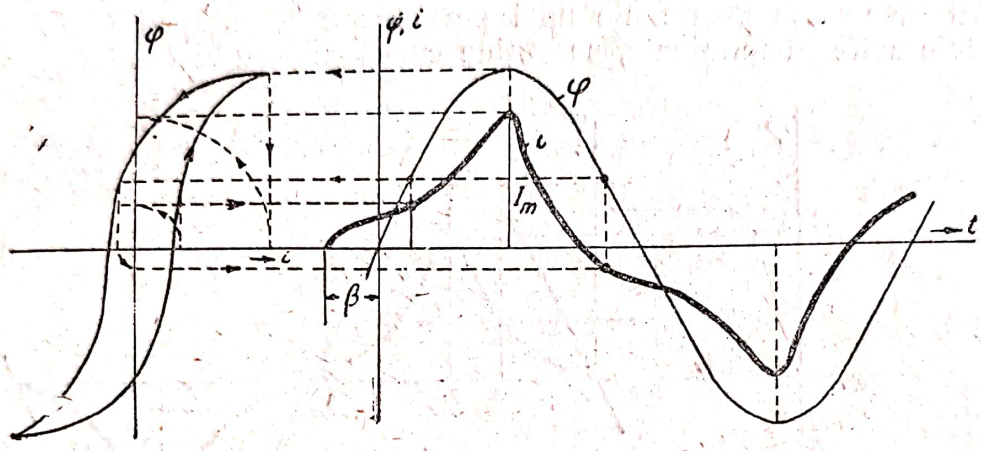


Fig. 13-2. Construirea curbei curentului din curba fluxului și din bucla de histerezis

curbei sinusoidale a fluxului magnetic. Construcția este reprezentată în fig. 13-2. După cum rezultă din figură, curba curentului prezintă o deformație mai accentuată decît în cazul precedent. Valorile maxime ale celor două curbe au loc simultan, însă fluxul magnetic trece prin valorile zero cu unghiul β în urma curentului.

Se numește *curent echivalent* al curentului real din circuit, un curent

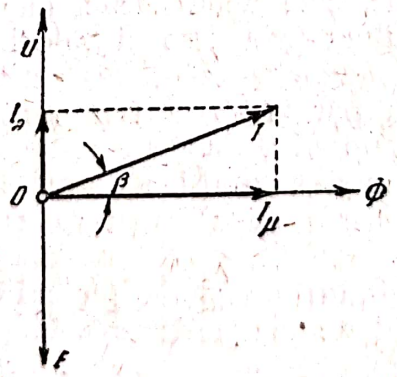


Fig. 13-3. Diagrama vectorială a bobinei cu miez

sinusoidal a cărei valoare eficace I este egală cu valoarea eficace a curentului real și care, sub acțiunea aceleiași tensiuni aplicate circuitului, produce în circuit o putere activă egală cu aceea consumată prin fenomenul histerezis. Diagrama vectorială a bobinei, construită în aceste condiții,

este reprezentată în fig. 13-3. Unghiul β cu care vectorul $\bar{I}$ se găsește în avans față de flux se numește *unghi de avans histerezis* sau *unghi de pierderi prin histerezis*.

În diagrama din fig. 13-3, vectorul $\bar{I}$ al curentului echivalent a fost descompus într-o componentă activă $\bar{I}_a$, în fază cu tensiunea aplicată $\bar{U}$, și o componentă magnetizantă $\bar{I}_\mu$, în fază cu fluxul magnetic Φ.

Cînd se neglijează fenomenul de histerezis, $\beta = 0$, $I_\mu = I$ și revenim la cazul precedent.

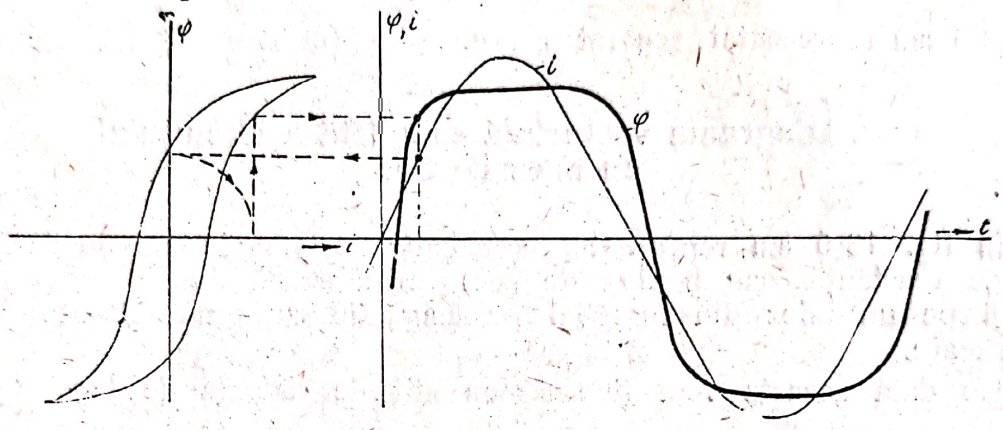


Fig. 13-4. Construirea curbei fluxului magnetic din curba de curent și bucla de histerezis

Dacă înfășurarea bobinei, în loc să fie alimentată în derivație, printr-o tensiune alternativă sinusoidală, este alimentată în serie, printr-un curent sinusoidal

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t ,$$

fluxul din circuitul magnetic al bobinei, din cauza fenomenului de saturație al miezului feromagnetic, devine nesinusoidal. În consecință, f.e.m.

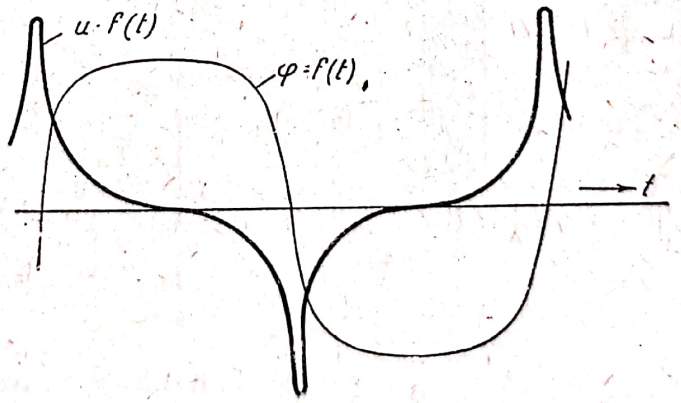


Fig. 13-5. Curba aplatisată a fluxului magnetic și tensiunea corespunzătoare

indusă în circuit și tensiunea la bornele circuitului vor fi, ca și fluxul, nesinusoidale.

Forma curbei de variație a fluxului se deduce pe cale grafică ca și în cazurile precedente, din bucla de histerezis și din sinusoida curentului (fig. 13-4). Se obține pentru $\varphi = f(t)$ o curbă aplatisată,

a cărei formă am studiat-o în par. 12-3, care conține armonicele de ordinul trei, uneori și cele de ordinul cinci.

Pentru a se obține curba de variație a f.e.m. induse, respectiv a tensiunii la bornele bobinei care o echilibrează și care este deci simetrică cu ea în raport cu axa absciselor, ne servim de constatarea că tangenta unghiului de înclinație γ al unei drepte tangente la curba $\varphi = f(t)$, adică expresia $\operatorname{tg}\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, este proporțională cu f. e. m. indusă. În fig. 13-5 am reprezentat separat curbele $\varphi = f(t)$ și $u = f(t)$.

13-4. Diagrama vectorială completă a circuitului cu miez de fier

În fig. 13-6 am reprezentat schematic o bobină de inducție (bobină de reactanță sau bobină de șoc) care constă dintr-o înfășurare, așezată pe un miez din material feromagnetic cu permeabilitate magnetică mare.

De data aceasta vom ține seama atît de căderea de tensiune în

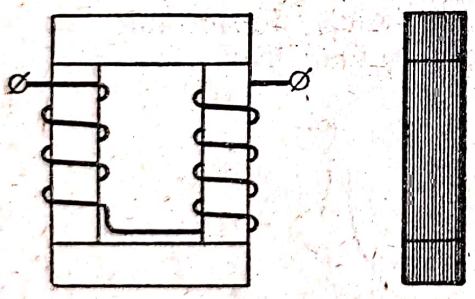


Fig. 13-6. Bobină cu miez de fier

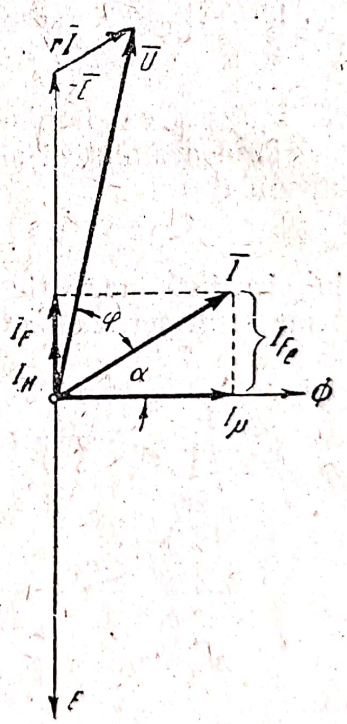


Fig. 13-7. Diagrama vectorială a unei bobine cu miez de fier, ținînd seama de rezistența activă a înfășurării

rezistența r a circuitului bobinei, cît și de pierderile în fierul bobinei prin curenți Foucault care însoțesc întotdeauna pierderile prin histerezis.

Ca și în primele două cazuri precedente, considerăm că tensiunea aplicată bobinei este sinusoidală, iar fluxul în bobină este dat de relația $\varphi = \Phi \sin \omega t$.

În ipoteza că nu există scăpări de flux, fluxul φ străbate toate spirele bobinei şi avem, între valorile instantanee ale circuitului, relaţia (13-1)

$$u = w\frac{d\varphi}{dt} + ri.$$

Ţinînd seama că

$$w\frac{d\varphi}{dt} = -e = -w\omega\Phi\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}E\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

ecuaţia precedentă devine, vectorial,

$$\overline{U} = -\overline{E} + r\overline{I}. \qquad (13\text{-}5)$$

Diagrama vectorială (fig. 13-7) se construieşte luînd fluxul Φ ca origine de fază. Decalat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma fluxului se construieşte vectorul f.e.m. induse $E = 4{,}44\ f\ w\ \Phi$. Egal şi de sens opus acestei f.e.m. se construieşte vectorul $-\overline{E}$. Decalat cu un unghi α în avans faţă de fluxul φ se construieşte vectorul curentului echivalent $\overline{I}$. Descompunînd acest vector în cele două componente ale sale, una în fază cu fluxul Φ, cealaltă decalată în avans cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de flux, obţinem componenta reactivă magnetizantă I_μ şi componenta activă a curentului, corespunzătoare pierderilor totale în fier, pe care o vom nota cu I_{Fe}. Această din urmă componentă cuprinde două părţi: una I_H, corespunzătoare pierderilor prin histerezis şi a doua I_F, corespunzătoare pierderilor prin curenţi Foucault. Prin urmare

$$I_{Fe} = I_H + I_F \qquad (13\text{-}6)$$

şi

$$I = \sqrt{I_{Fe}^2 + I_\mu^2}. \qquad (13\text{-}7)$$

Dacă adăugăm vectorului $-\overline{E}$, vectorul $\overline{rI}$, al căderii ohmice, obţinem vectorul $\overline{U}$ al tensiunii aplicată bobinei. Din construcţie rezultă şi decalajul φ dintre I şi U.

Unghiul α reprezintă unghiul de pierderi totale în fier ale bobinei. El poate fi determinat din relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_{Fe}}{I_\mu} \qquad (13\text{-}8)$$

în care, ţinînd seama că r este foarte mic şi că practic $E = U$,

$$I_{Fe} = \frac{p_{Fe}}{U},$$

în care p_{Fe} reprezintă pierderile în fier ale bobinei, egale cu puterea activă a acesteia din care se scad pierderile prin efect Joule-Lenz rI^2 în circuitul bobinei.

Pentru a reduce cît mai mult pierderile prin curenţi Foucault, miezurile feromagnetice se construiesc aşa cum s-a arătat în par. 7-6.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XIV

CURENTUL ELECTRIC ÎN VID ŞI GAZE

14-1. Emisia termoionică

Vidul reprezintă izolantul cel mai perfect. Se poate obține totuși un curent electric și prin vid, datorită proprietății de trecere prin vid a electronilor. Un asemenea curent electronic reprezintă ceea ce numim un *curent de convecție*, adică un curent electric care constă din mișcarea sarcinilor electrice în afara moleculelor corpului conducător.

Se numește *emisie electronică* fenomenul ieșirii electronilor liberi din conductorul electric aflat în vid. Ca să poată părăsi conductorul, electronul liber trebuie să învingă forțele de atracție care îl reține pe stratul superficial al acestuia; deci emisia electronică este însoțită de un consum de energie, numit *lucru mecanic de emisie*.

Electronul părăsește materia conductorului cînd energia lui cinetică este superioară lucrului mecanic de emisie. Energia electronilor se măsoară

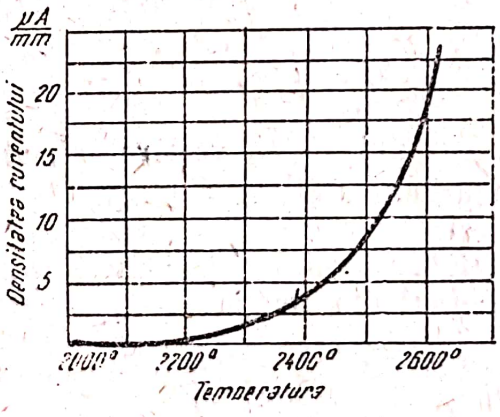


Fig. 14-1. Variația densității curentului termoionic la conductorul de wolfram

în *electroni-volți* (simbol eV). *Un electron-volt reprezintă energia pe care o dobîndește un electron accelerat printr-o diferență de potențial de un volt.*

La temperatura normală, ieșirea electronilor din conductor este practic inexistentă, deoarece energia lor cinetică, la această temperatură, este inferioară lucrului mecanic de emisie.

Prin încălzirea metalului, viteza electronilor săi se mărește, mărindu-se astfel numărul electronilor care pot părăsi metalul. Cînd metalul ajunge la incandescență, fenomenul devine foarte activ și el capătă denumirea de *emisie termoionică* sau *termoelectronică*.

Numărul de electroni emiși prin unitatea de suprafață a metalului, în unitatea de timp, depinde de natura metalului, de suprafața sa, de temperatura la care se găsește etc.

Densitatea unui curent termoionic în vid este dată de relația

$$\delta = A\,T^2\,e^{-\frac{B}{T}}, \qquad (14\text{-}1)$$

în care δ este densitatea curentului în A/mm², T temperatura absolută a metalului, A și B constante, ale căror valori sînt date, pentru metalele uzuale, în tabela 14-1.

Tabela 14-1

Valorile constantelor *A* și *B* pentru cîteva metale

Metalul	A	B
Wolfram	0,602	53 400
Molibden	0,602	51 500
Toriu	0,602	38 900

Variația densității curentului termoionic emis de un catod de wolfram în funcție de temperatura sa este reprezentată prin curba din fig. 14-1.

Fenomenul emisiei termoionice este aplicat în funcționarea tuburilor electronice, cu doi sau mai mulți electrozi, de care ne vom ocupa în vol. II al prezentei lucrări.

13-2. Variația emisiei electronice cu intensitatea cîmpului electric

Dacă catodul emițător de electroni se găsește într-un cîmp electric puternic, lucrul mecanic necesar emisiei electronilor scade. Scăderea aceasta este de 1 eV la 7.10^8 V/m. Se poate deci obține o emisie electronică și în cazul unor electrozi reci, cu condiția de a se aplica între ei o tensiune suficient de mare. În acest caz, electronii sînt smulși de pe suprafața metalului catodului de forța cîmpului electric care se formează între cei doi electrozi. O asemenea emisie poate avea loc și în cazul unui catod incandescent, obținîndu-se, în acest caz, un curent de convecție mărit.

14-3. Fotoemisia

În cazul electrozilor reci, se poate obține o emisie electronică apreciabilă și cu cîmpuri electrice slabe, cînd energia necesară desprinderii electronului se obține în contul unei energii de radiație, de exemplu cu ajutorul razelor ultraviolete sau al razelor X care lovesc electrodul.

În cazul unor catozi din metale alcaline (sodiu, potasiu, cesiu, rubidiu), energia poate fi produsă și de razele luminoase. Emisia electronică se numește în acest caz *fotoemisie* și fenomenul poartă numele de

efect fotoelectric. În sens general, prin fotoemisie se înțelege orice emisie de electroni, de către o suprafață metalică, sub influența unei radiații electromagnetice de lungime de undă convenabilă.

Fenomenul fotoelectric stă la baza funcționării *celulelor fotoelectrice (fotoelementelor)*, de care vom vorbi în vol. II al prezentei lucrări.

14-4. Conductibilitatea gazelor prin ionizare

În condiții fizice normale gazele sînt izolante, ele fiind lipsite complet de electroni liberi și de ioni. Sub formă gazoasă chiar metalele devin izolante. Prin ionizarea provocată de un *agent extern*, gazele își pierd proprietatea de bun izolant. Ionizarea poate fi provocată prin acțiunea asupra gazului a razelor X, a celor ultra-violete, a radiației substanțelor radioactive, prin temperaturi ridicate și, în fine, prin acțiunea unui cîmp electric puternic.

Procesul de ionizare desface moleculele neutre ale gazului în ioni pozitivi și ioni negativi. Ionizarea se obține, de pildă, prin desprinderea unui electron dintr-o moleculă a gazului care este astfel transformată într-un ion pozitiv. Electronul desprins se unește cu o moleculă neutră oarecare, formînd un ion negativ. Sub acțiunea agentului extern (factorul ionizant) se formează, în modul acesta, în unitatea de timp, un anumit număr de ioni pe cm^3 de gaz, care rămîne constant.

Să considerăm un balon de sticlă umplut cu un gaz oarecare, prevăzut cu doi electrozi (fig. 14-2) și să supunem gazul unui factor io-

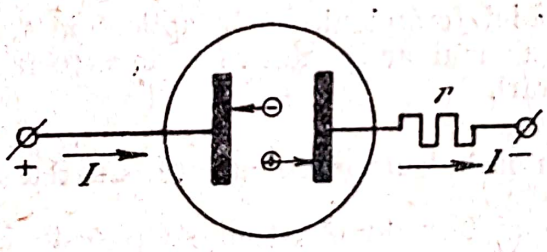


Fig. 14-2. Gazul supus unei acțiuni de ionizare

nizant exterior. Dacă aplicăm electrozilor o tensiune, sub acțiunea forțelor cîmpului electric ionii pozitivi se deplasează în sensul cîmpului, iar electronii și ionii negativi în sens invers, formîndu-se astfel, în interiorul gazului, un curent electric.

Dacă tensiunea aplicată electrozilor crește, vom constata că odată cu ea crește și curentul din circuit, după curba reprezentată în fig. 14-3 care se numește *caracteristica voltamperică* a dispozitivului. La început curentul crește aproape proporțional cu tensiunea (porțiunea OA a curbei), pentru ca apoi să crească din ce în ce mai puțin cu tensiunea aplicată (porțiunea AB a curbei). La o anumită valoare a tensiunii aplicate, curentul atinge o valoare limită peste care nu mai poate crește și curba voltamperică devine paralelă cu axa absciselor, formînd astfel o treaptă.

Curentul constant, corespunzător acestei trepte, se numește *curent de saturație*. Acest curent corespunde totalității ionilor produși în gaz, în unitatea de timp, prin acțiunea agentului exterior de ionizare.

Curentul de saturație în mediul gazos a fost descoperit și studiat de profesorul rus *A. G. Stoletov*.

Conductabilitatea gazelor provocată de acțiunea ionizantă a agenților exteriori poartă numele de *conductibilitate dependentă*. Această conductibilitate dispare odată cu încetarea acțiunii ionizatorului.

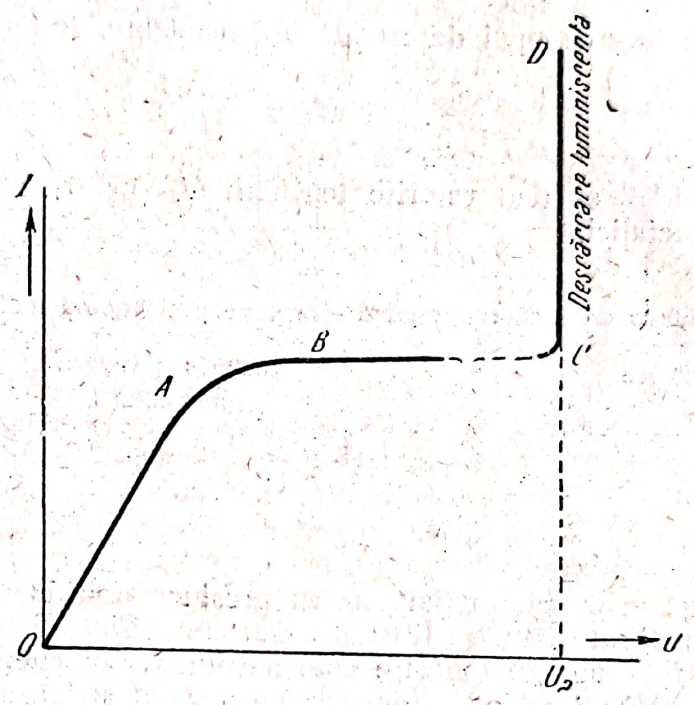


Fig. 14-3. Caracteristica voltamperică

Un cîmp electric puternic, creat într-un mediu gazos, poate produce o *descărcare independentă*. În acest caz ionizarea gazului se face prin șocuri, în modul următor:

În oricare gaz se găsește, întotdeauna, o mică cantitate de sarcini electrice. Sub acțiunea unui cîmp electric puternic, aceste sarcini primesc o accelerație, deci înmagazinează o energie cinetică, dată de relația

$$\frac{m_0 v_{max}^2}{2},$$

destul de puternică pentru a putea sparge sau ioniza molecula neutră pe care o întîlnește în cale și a degaja din ea electronii liberi. Noile sarcini electrice astfel create ionizează, sub acțiunea cîmpului, alte molecule neutre și procesul se desfășoară *în lanț*. Conductibilitatea gazului dintre electrozi crește brusc și, odată cu ea, intensitatea curentului din circuit, care nu este limitată decît de rezistența r intercalată în circuit (ramura CD a caracteristicii voltamperice din fig. 14-3).

Tensiunea la care apare ionizarea în lanț și creșterea bruscă a curentului se numește *tensiune de aprindere*. Odată cu atingerea tensiunii de aprindere, gazul dintre electrozi devine luminiscent.

Energia necesară ionizării unei molecule de gaz se poate exprima prin relația

$$W_i = U_i e_0 , \tag{14-2}$$

în care U_i este tensiunea de ionizare, adică diferența de potențial dintre punctele extreme ale drumului parcurs de electron în cîmpul electric, în timpul parcursului său liber.

Pentru producerea unei descărcări independente, trebuie ca

$$\frac{m_0 v^2}{2} \geq U_i e_0 . \tag{14-3}$$

În tabela 14-2 se dau valorile tensiunii U_i pentru o serie de gaze și de vapori metalici.

Tabela 14-2

Tensiunea de ionizare pentru cîteva gaze și vapori metalici

Gazul sau vaporii metalului	U_i în V	Gazul sau vaporii metalului	U_i în V
Cesiu	3,9	Oxigen	13,5
Caliu	4,3	Azot	14,5
Mercur	10,4	Neon	21,5

Se înțelege ușor că într-un gaz cu presiune scăzută, deci cu atomii rari, distanța medie de parcurs liber a electronului fiind mare, pentru a se obține aceeași tensiune de ionizare este nevoie de un cîmp electric, deci de o tensiune aplicată electrozilor mai mică decît în cazul unui gaz cu presiune mare.

Nu toți electronii supuși cîmpului electric produc ionizarea moleculelor gazului. O parte din acești electroni nu acumulează o energie suficientă pentru a satisface relația (14-3) și a putea astfel ioniza moleculele gazului pe care le întîlnesc. Prin ciocnirea sa cu un atom al gazului, un asemenea electron transmite atomului energia sa cinetică. Energia atomului respectiv crește, unul din electronii care se învîrtesc în jurul nucleului pozitiv al atomului trece pe o orbită mai periferică, corespunzătoare unui nivel energetic mai ridicat. După un timp foarte scurt, de 10^{-7}-10^{-8} secunde, electronul se întoarce din nou pe orbita anterioară, degajînd astfel, sub forma unei radiații luminoase (o *cuantă de lumină*), energia excedentară. Atomii neutri ai gazului sînt supuși unui proces de excitație care se manifestă prin luminiscența gazului.

14-5. Descărcări independente în gaze rarefiate

Să considerăm un tub de sticlă umplut cu aer sau cu azot la presiunea atmosferică, prevăzut cu doi electrozi formați din plăci metalice așezate transversal la capetele tubului (fig. 14-4). Dacă aplicăm tubului o tensiune de curent continuu, care să producă un cîmp electric de cca 10 kV/m, se constată că nu se produce nici o descărcare electrică. Dacă scădem presiunea gazului din tub, se constată că, începînd de la o anumită valoare a acesteia în jos (de pildă de la 40 torri), între electrozi apare

o descărcare luminoasă și în tub se stabilește un curent de ordinul a cîtorva miliamperi. Aspectul și intensitatea acestei descărcări variază cu gradul vidului realizat. La o presiune în tub scoborîtă la cca un torr, aspectul fasciculului luminos din tub se prezintă în modul următor:

Pornind de la catodul *C*, întîlnim mai întîi o pătură subțire foarte luminoasă, numită *teacă catodică,* după care urmează un spațiu obscur, numit *spațiul lui Crookes,* a cărui lungime se mărește pe măsură ce pre-

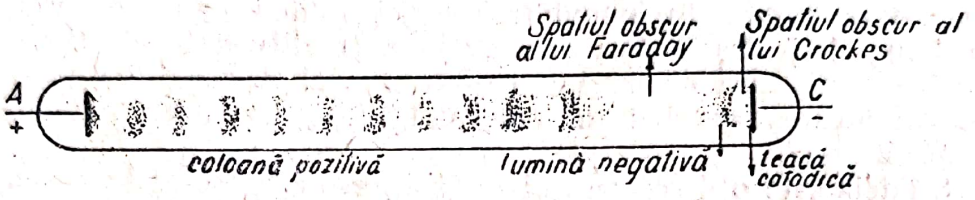


Fig. 14-4. Fenomene electrice și luminoase într-o descărcare în gaze

siunea scade. Urmează apoi o regiune slab luminoasă, numită *lumină negativă,* după care întîlnim o a doua regiune întunecată, numită *spațiul obscur al lui Faraday.* Între spațiul obscur al lui Faraday și anodul *A* se găsește o coloană luminoasă numită *coloana pozitivă,* care se termină cu o zonă îngustă de luminozitate destul de puternică, lipită de anod.

Iluminarea tubului este produsă de strălucirea acestei coloane pozitive Ea se datorește excitării și ionizării moleculelor gazului sub acțiunea cîmpului dintre electrozi și, în parte, sub acțiunea electronilor veniți de la catod.

La presiuni de ordinul de un torr, coloana pozitivă umple aproape în întregime tubul, oricare ar fi lungimea lui, și se apropie pînă la doi sau trei centimetri de catod.

Dacă un asemenea tub este supus unei tensiuni alternative, dispoziția zonelor de lumină se inversează în ritmul variației tensiunii, deci cu o frecvență dublă decît aceea a curentului de alimentare. Din cauza inerției retinei, ochiul nu poate urmări aceste schimbări și tubul apare ca luminat uniform.

Asemenea tuburi cu descărcări luminiscente se folosesc ca surse de lumină. Drept gaze de umplere servesc neonul (dă o lumină roșie), heliul (dă o lumină gălbuie), azotul (dă o lumină galben-roșie) etc. Dacă se combină în interiorul aceluiași tub două sau mai multe din aceste gaze, se poate obține o mare varietate de nuanțe intermediare.

Tuburile cu descărcări luminiscente se construiesc din sticlă și au diametre între 15-30 mm. Electrozii de la capete se fac din fier. Presiunea interioară nu depășește cîțiva torri. Curentul nominal de funcționare variază, după dimensiunile tubului, între 20-100 mA. Tensiunea necesară funcționării unui astfel de tub este de 800-1000 V pe metru de lungime. La aprindere, tensiunea trebuie mărită cu 70-80% peste cea nominală.

Lumina nefiind produsă prin incandescență, temperatura tubului este numai de 35° C, iar a electrozilor de circa 150° C.

14-6. Scînteia electrică

Scînteia electrică constituie o formă de descărcare în gaze, provocată de un cîmp electric foarte puternic. Sub acțiunea unui asemenea cîmp, ionizarea gazului se extinde pe toată lungimea dintre electrozi. Ionizarea nu afectează întregul volum de gaz cuprins în spațiul dintre electrozi, ci se concentrează în anumite canale, a căror formă neregulată depinde de drumul cel mai ușor de ionizat. Scînteia care apare între electrozi urmează aceste drumuri ionizate și ia forma lor neregulată. Temperatura gazului în lungul traiectoriei scînteii se ridică brusc. Gazul (sau aerul, dacă descărcarea are loc în aer) dilatîndu-se brusc, produce o undă sonoră care dă sunetul caracteristic al descărcărilor prin scîntei. Cînd descărcarea are loc în atmosferă, între doi nori, sunetul poartă numele de *tunet*.

Scînteia este o descărcare disruptivă, care apare cînd tensiunea atinge o anumită valoare, numită *tensiune explozivă*.

Tensiunea la care apar scînteile între electrozi în gaze depinde de distanța dintre electrozi, de forma acestora și de presiunea gazului respectiv. Pe aceste considerații se bazează construcția și funcționarea *eclatorului cu sfere (spinterometrul)*, utilizat pentru măsurarea valorii maxime (valorii de creastă) a tensiunilor înalte și foarte înalte. După distanța dintre sfere la care apare scînteia, se poate determina, în funcție de diametrul sferelor, tensiunea dintre ele care este tensiunea de măsurat.

În tabela 14-3 se dau valorile distanței explozive s în aer pentru două sfere de diametru d, în funcție de valorile tensiunii U.

Odată cu apariția scînteii, tensiunea scade brusc după o lege exponențială sau oscilatorie amortizată.

Tabela 14-3

Valorile distanței explozive s dintre două sfere în funcție de tensiunea aplicată

s în cm	Diametrul d în cm			
	1	2	10	20
0,1	5 000			4 600
0,2	8 700	8 500		7 000
0,5	17 900	17 900		17 400
1	29 300	32 000	32 100	31 800
5		76 800	128 000	138 000
10			200 000	247 000
40				555 000

Scînteia electrică poate să apară și în medii dielectrice lichide sau solide. Dacă mediul este solid, el rămîne perforat. Prin urmare, fenomenul apariției scînteii electrice prezintă în tehnica izolanților o importanță capitală.

14-7. Arcul electric

Arcul electric reprezintă o formă particulară de descărcare în gaze, caracterizată printr-o mare densitate de curent la o tensiune relativ mică între electrozi.

Arcul electric se poate produce, de exemplu, între doi electrozi de cărbune legați printr-o rezistență la bornele unei surse de curent. Pentru

a amorsa arcul, cărbunii sînt apropiați unul de altul și curentul care se stabilește între ei îi încălzește la o temperatură ridicată. Dacă îndepărtăm apoi electrozii unul de altul, se obține descărcarea între electrozi pe care o numim *arc electric* care radiază o lumină foarte vie. Rezistența din circuitul arcului este necesară, între altele, pentru a limita curentul de scurt-circuit la amorsarea arcului.

Apariția arcului este provocată de o puternică ionizare a gazului, produsă în special de electronii emiși de catodul incandescent. O incandescență mai mare decît a catodului o prezintă anodul, în care bombardarea electronilor veniți de la catod provoacă un crater, a cărui temperatură atinge 4 000° C.

Gazele și vaporii dintre electrozi, care formează flacăra arcului, se încălzesc la temperatura de 4 800° C, prezentînd astfel o bună conductibilitate electrică prin ionizarea activă care se produce la această temperatură înaltă.

La creșterea curentului, temperatura flacării se mărește, ceea ce produce o creștere a conductanței arcului și, în consecință, o reducere a tensiunii de la bornele arcului. Așa se explică forma descrescîndă a caracteristicii voltamperice a arcului electric (fig. 14-5).

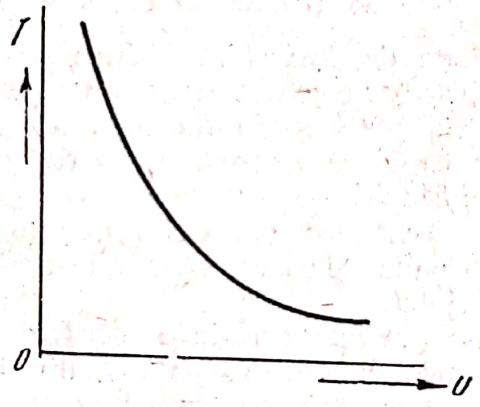


Fig. 14-5. Caracteristica voltamperică a arcului electric

Arcul electric a fost descoperit în anul 1802 de *V. V. Petrov*, profesor de fizică la Academia de Medicină din Petersburg. El se întrebuința în trecut foarte mult la iluminat. Procedeul iluminării prin arc a fost descoperit de inginerul rus *P. N. Iablocicov* în 1876 și a fost primul procedeu de iluminat electric.

În prezent arcul electric se aplică la lămpile proiectoarelor electrice și ale aparatelor de proiecție. Datorită temperaturii mari pe care o degajă, arcul electric mai este utilizat la cuptoarele electrice, la sudura electrică etc. De asemenea, o largă utilizare a arcului electric o prezintă funcționarea redresoarelor industriale de curent alternativ: redresoarele cu vapori de mercur, gazotroanele, tiratroanele etc., în care arcul electric se produce între un catod incandescent și un anod rece. De toate aceste aplicații ale arcului electric ne vom ocupa în vol. II al lucrării.

14-8. Descărcări prin efluvii

Am arătat în par. 5-5 că în jurul vîrfurilor unui corp electrizat presiunea electrică a cîmpului asupra electronilor este foarte mare și sarcinile sînt silite să părăsească conductorul. Electricitatea se scurge prin vîrfuri și această scurgere poartă numele de *descărcare prin efluvii*. Electronii și ionii puși în mișcare antrenează cu ei și moleculele de aer, dînd astfel naștere unui „vînt electric". Efluviul începe la un potențial al conductorului mai redus atunci cînd vîrful este încărcat negativ, deci cînd emite electroni. El este însoțit de o slabă luminiscență în vecinătatea vîrfului și de un ușor pîrîit.

Efectul descărcărilor prin vîrfuri, sub forma efluviilor, este folosit în funcționarea paratrăsnetelor.

Cînd un nor încărcat cu electricitate, să zicem pozitivă, trece deasupra unui imobil, induce în el o sarcină negativă. Dacă diferența de potențial dintre nor și imobil este destul de ridicată, se produce o descărcare disruptivă și imobilul este trăsnit. Dacă imobilul este prevăzut cu paratrăsnete puse la pămînt, sarcinile negative induse în el sînt disipate în aer printr-o scurgere lentă prin vîrfurile paratrăsnetelor, neutralizînd în mod treptat sarcina norului.

14-9. Efectul corona

Se dă acest nume descărcărilor electrice sub formă de efluvii care apar în jurul conductoarelor electrice aflate la tensiuni înalte față de pămînt. Cîmpul electric pe suprafața și în imediata apropiere a conductoarelor fiind foarte puternic, expulzează sarcinile electrice din conductor, ionizează aerul și provoacă descărcări slab luminiscente.

Efectul de luminiscență este mai vizibil pe întuneric, cînd conductoarele liniilor electrice de înaltă tensiune apar înfășurate de o coroană luminoasă care bate în violet.

Efectul corona reprezintă practic o pierdere de energie. Fiind provocat de cîmpul electric de pe suprafața și din jurul conductorului, rezultă că el este cu atît mai intens cu cît potențialul conductorului este mai ridicat și cu cît diametrul lui este mai redus. De aceea, pentru a reduce efectul corona și pierderea de energie pe care o cauzează, conductoarele electrice de înaltă tensiune sînt făcute cu un diametru cît mai mare, uneori chiar în formă de cilindrii cu interiorul gol, pentru a se economisi material și a fi mai ușoare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL XV

APARATE ELECTRICE DE MĂSURĂ ŞI METODE DE MĂSURARE

15-1. Clasificarea aparatelor electrice de măsură

Mărimile electrice şi magnetice se măsoară, în general, cu aparate relativ simple, care poartă denumirea de *aparate* sau *instrumente de măsură*.

Funcţionarea acestor aparate se bazează pe anumite fenomene care însoţesc trecerea curentului electric prin circuite şi anume, pe apariţia forţelor electromagnetice şi electrodinamice, pe utilizarea efectului Joule-Lenz, pe fenomenul inducţiei electrice, pe fenomene magnetice etc.

După principiul lor de funcţionare, aparatele electrice de măsură se împart în următoarele clase:

1) *aparate magnetoelectrice,* prevăzute cu un magnet permanent fix şi o bobină mobilă;

2) *aparate electromagnetice,* prevăzute cu o bobină fixă şi o piesă mobilă de fier;

3) *aparate electrodinamice,* prevăzute cu două bobine, una fixă, cealaltă mobilă;

4) *aparate termice,* bazate pe efectul Joule-Lenz al curentului;

5) *aparate de inducţie;*

6) *aparate cu vibraţie (de rezonanţă).*

Înafară de aceste categorii de aparate, se mai întîlnesc, însă relativ mai rar, aparate termoelectrice, electronice, electrostatice, electrolitice şi fotoelectrice.

În tabela 15-1 sînt date simbolurile principalelor aparate electrice de măsură, în legătură cu principiul lor de funcţionare (Gost 400-93).

În ceea ce priveşte *gradul de precizie,* aparatele electrice de măsură se împart în cinci clase: 0,2; 0,5; 1; 1,5 şi 2,5. Cifrele acestor clase reprezintă procentul erorii admisibile (vezi par. 15-8). Instrumentele precise din clasele 0,2 şi 0,5 se întrebuinţează ca instrumente de control şi de laborator. Celelalte, ca instrumente de tablou.

După felul curentului, aparatele electrice de măsură se împart în:

1) *aparate de curent continuu,*

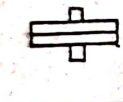
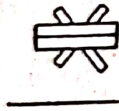
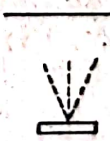
2) *aparate de curent alternativ,*

3) *aparate de curent continuu şi alternativ.*

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 15-1

Simbolurile principalelor aparate electrice de măsură

Simbol	Sistem	Simbol	Sistem
	Magnetoelectric cu cuplu rezistent		De inducție cu cuplu rezistent
	Fără cuplu rezistent		Fără cuplu rezistent
	Electromagnetic cu cuplu rezistent		Termic
	Fără cuplu rezistent		Termoelectric cu transformator termic cu contact
Electrodinamic:			Cu transformator termic izolat
	Fără ecran magnetic — Cu cuplu rezistent		Cu detecție
	Fără ecran magnetic — Fără cuplu rezistent		Electronic
	Cu ecran magnetic — Cu cuplu rezistent		Fotoelectric
	Cu ecran magnetic — Fără cuplu rezistent		Electrostatic
	Ferodinamic cu cuplu rezistent		Cu vibrații
	Fără cuplu rezistent		

După modul de întrebuințare, aparatele electrice de măsură se împart în:

1) *aparate fixe* care sînt montate rigid pe locul de funcționare, de pildă pe tablourile electrice;

2) *aparate mobile* care pot fi transportate dintr-un loc în altul, după necesităţi.

Pe placa frontală a aparatelor electrice de măsură se găsesc, înafară de scară, următoarele indicaţii (fig. 12-1):

— simbolul unităţii de măsură respective;
— iniţiala, monograma sau numele fabricii;
— numărul de fabricaţie al aparatului;
— simbolul indicînd principiul de funcţionare al aparatului;
— o steluţă, diferit colorată, care indică tensiunea la care a fost încercat aparatul;

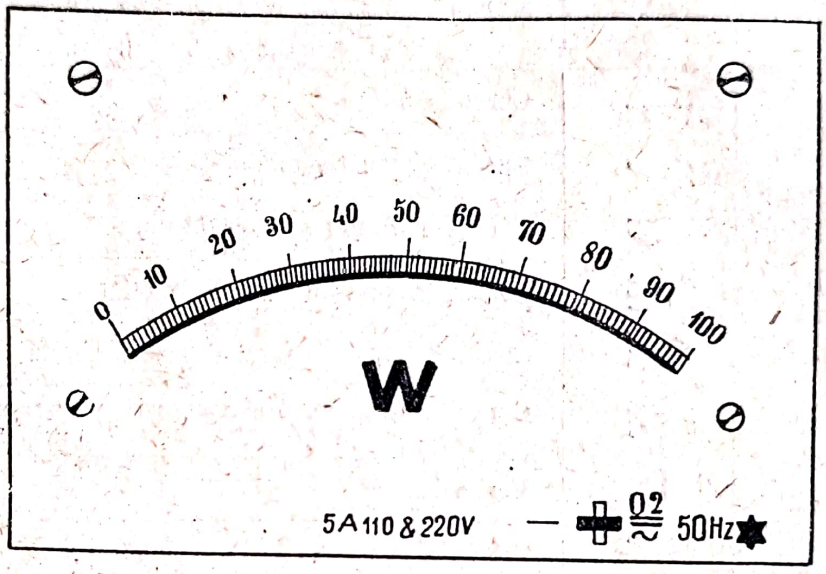


Fig. 15-1. Placa frontală a unui aparat de măsură

— un număr sau o literă, care indică precizia aparatului;
— indicaţii asupra rezistenţei electrice, consumaţiei, naturii curentului, poziţiei aparatului etc.

Unele din aceste indicaţii pot lipsi.

În tabela 15-2 dăm legătura convenţională între culoarea steluţei şi tensiunea de încercare.

Tabela 15-2

Legătura dintre culoarea steluţei aparatelor electrice de măsură şi tensiunea de încercare

Culoarea steluţei	Tensiunea de încercare, în V	Culoarea steluţei	Teusiunea de încercare, în V
negru	500	albastru	3000
cafeniu	1000	verde	5000
roşu	2000		

În tabela 15-3 este dată semnificaţia celorlalte semne care pot fi găsite pe placa frontală a aparatelor electrice de măsură.

Tabela 15-3

Semnificația semnelor de pe placa frontală a aparatelor electrice de măsură

Specificare	Simbol	Interpretare
Semnul clasei de precizie	0,2	Eroare tolerată ± 0,2% din scara de măsură
	0,5	„ „ ± 0,5% „ „ „ „
	1,0	„ „ ± 1,0% „ „ „ „
	1,5	„ „ ± 1,5% „ „ „ „
	2,5	„ „ ± 2,5% „ „ „ „
Felul curentului	—	Curent continuu
	~	Curent alternativ monofazat
	≂	Curent continuu și alternativ
	≋	Curent trifazat cu sarcină echilibrată
	≋	Curent trifazat cu sarcină dezechilibrată
	≋	Curent trifazat cu 4 conductoare și sarcină dezechilibrată
Poziția scării aparatului	↑	Verticală
	→	Orizontală
	∠60°	Inclinată (de exemplu la un unghi de 60°)

În ceea ce privește precizia aparatului, un instrument de o anumită clasă trebuie să dea indicații cu o eroare cel puțin egală cu aceea admisă pentru clasa respectivă. Spre exemplu, un instrument de clasa 1,0 trebuie să dea indicații cu o eroare de cel mult 1%. Aceasta înseamnă că un aparat cu care măsurăm 250 V trebuie să arate maximum 252,5 V și minimum 247,5 V.

15-2. Principii constructive

În general, aparatele electrice de măsură se compun dintr-o parte fixă, numită *stator* sau *echipaj fix* și o parte mobilă, numită *rotor* sau *echipaj mobil*. Acesta din urmă acționează asupra unui *ac indicator* care se deplasează în dreptul unui cadran prevăzut cu diviziuni indicatoare, constituind *scara aparatului*. Întregul dispozitiv este închis într-o cutie care poartă pe ea bornele de legătură.

La majoritatea instrumentelor, mărimea măsurată creează un cuplu motor care rotește echipajul mobil al aparatului pînă cînd cuplul motor este echilibrat de un cuplu rezistent. Acesta din urmă este creat, cel mai

Scanned with OKEN Scanner

adesea, cu ajutorul unor arcuri spirale, notate cu *1* în fig. 15-2 care au un capăt fixat pe axul aparatului, iar celălalt capăt, pe pîrghia *corectorului*.

Cuplul rezistent, opus de arcul spiral, trebuie să fie proporțional cu unghiul de răsucire al acestui arc. Echilibrarea echipajului mobil, prevăzut cu arcuri spirale, se face cu ajutorul unor contragreutăți, notate

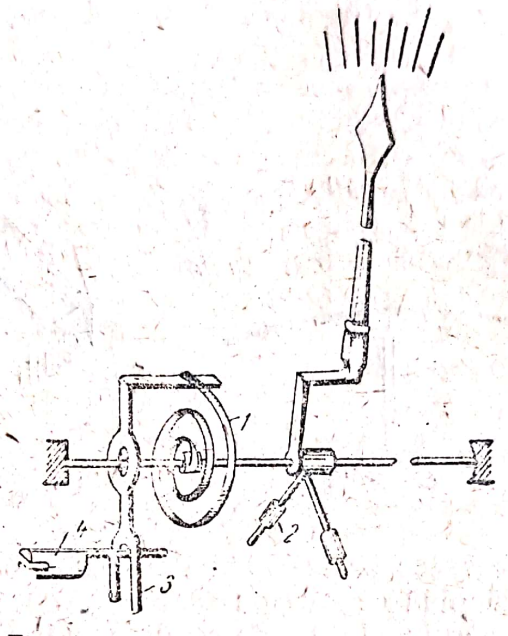


Fig. 15-2. Corectorul și dispozitivul pentru creearea cuplului rezistent

cu 2 în fig. 15-2, compuse din tije fixate pe axul aparatului și prevăzute cu mici greutăți deplasabile.

Scările aparatelor din clasele de precizie 0,2 și 0,5 sînt marcate, de obicei, cu cifre care indică numărul de diviziuni de la originea scării, pe cînd la aparatele din clasele de precizie 1 pînă la 2,5, cifrele scărilor indică direct valoarea mărimii măsurate. Cînd sînt prevăzute cu diviziuni

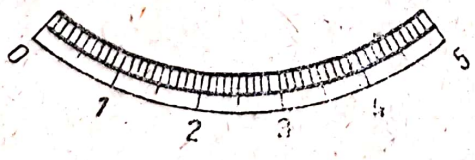


Fig. 15-3. Scară uniformă a unui aparat de măsură

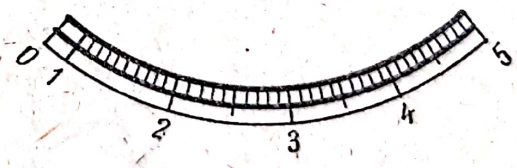


Fig. 10-4. Scară neuniformă a unui aparat de măsură

egale, scările sînt *uniforme* (fig. 15-3) ; în caz contrar, ele sînt *neuniforme* (fig. 15-4).

Cînd facem citirea aparatului, raza vizuală trebuie să fie perpendiculară pe scară căci altfel acul indicator, proiectîndu-se oblic pe scară, dă indicații deplasate lateral față de poziția sa reală și citirea respectivă este eronată. Asemenea erori de citire se numesc *erori de paralaxă*.

Eliminarea eventualelor erori de paralaxă se face, la aparatele de precizie din clasa 0,2 și 0,5, cu ajutorul unui cadran prevăzut cu oglindă

(fig. 15-5) și a unui ac cu un vîrf lamelar foarte subțire sau prevăzut la vîrf cu un fir întins. Citirea indicațiilor la asemenea aparate se face după ce observatorul vede suprapuse vîrful acului, sau firul acestuia, cu imaginea lui în oglindă.

Dacă curentul care produce devierea echipajului mobil trece brusc

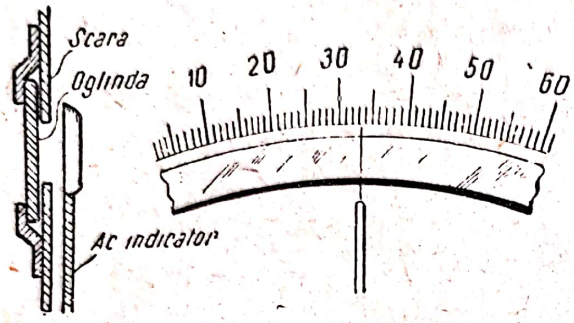


Fig. 15-5. Scară cu oglindă

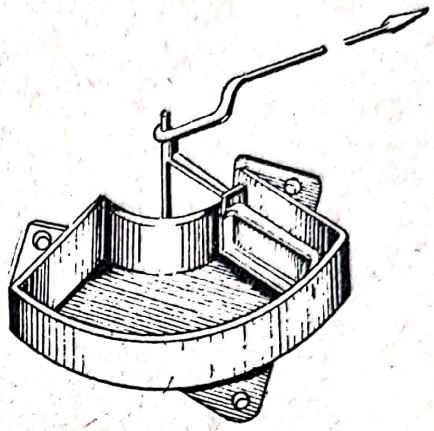


Fig. 15-6. Dispozitiv de amortizare pneumatic

prin instrument, ceea ce se întîmplă de regulă, echipajul mobil primește un șoc și oscilează pînă ce energia sa cinetică se amortizează prin frecări și prin rezistența aerului. În aceste condiții, citirea aparatului nu se poate face imediat, ci după o trecere de timp, cînd echipajul mobil se oprește în poziția de echilibru. Pentru a se evita aceasta, aparatele electrice de măsură sînt prevăzute cu dispozitive care înăbușe oscilațiile echipajului mobil și acul indicator se oprește repede în poziția de echilibru.

În fig. 15-6 este reprezentat un asemenea amortizor, de natură pneumatică. El se compune dintr-o cutie închisă în care se deplasează un

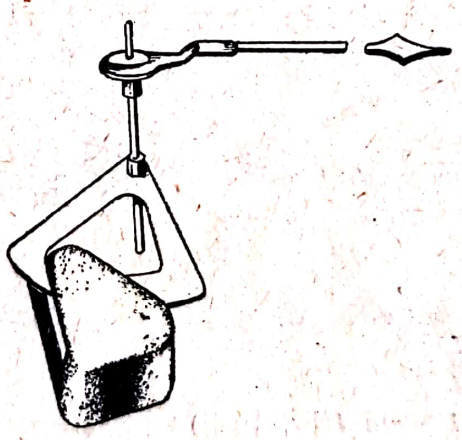


Fig. 15-7. Dispozitiv de amortizare electromagnetic

piston ușor de aluminiu articulat cu axul de rotație al echipajului mobil al aparatului. Prin comprimarea aerului de către piston se frînează rapid oscilațiile echipajului mobil. Pentru a se vedea pistonul, în fig. 15-6 lipsește capacul cutiei amortizorului.

Amortizorul din fig. 15-7 este un amortizor electromagnetic, bazat pe fenomenul apariției curenților Foucault. Un sector circular din tablă subțire de aluminiu, fixat pe axul aparatului, se deplasează între polii unui magnet permanent, tăind în mișcarea sa liniile de forță ale magnetului. În modul acesta, în sector se induc curenți Foucault. Aceștia dau naștere, prin acțiunea lor asupra cîmpului magnetic, unui cuplu care, conform legii lui Lenz, se opune deplasării sectorului, înfrînînd oscilațiile echipajului mobil.

Aparatele de măsură sînt înzestrate cu un dispozitiv de punere la punct numit *corector* care servește la aducerea acului în poziția de zero, în cazul cînd, înaintea efectuării măsurătorii, acul s-ar găsi deplasat. Corectorul (fig. 15-2) este compus dintr-un antrenor, notat cu *3* în fig. 15-2, avînd un capăt în formă de furcă care angrenează o tijă, fixată excentric pe șurubul *4*, al cărui cap iese în exteriorul cutiei aparatului.

Aparatele electrice de măsură sînt prevăzute și cu un *opritor,* care servește pentru fixarea provizorie, într-o poziție fixă, a echipajului mobil, pentru a se evita defectarea aparatului în timpul transportului său.

14-3. Aparate magnetoelectrice

Un asemenea aparat dispune de un magnet permanent fix *1* (fig. 15-8) în formă de potcoavă, între polii căruia se găsește o bobină mobilă *2*, avînd forma unui cadru, care se poate mișca în jurul unui ax perpendicular pe direcția liniilor de forță ale magnetului. Bobina este formată dintr-o

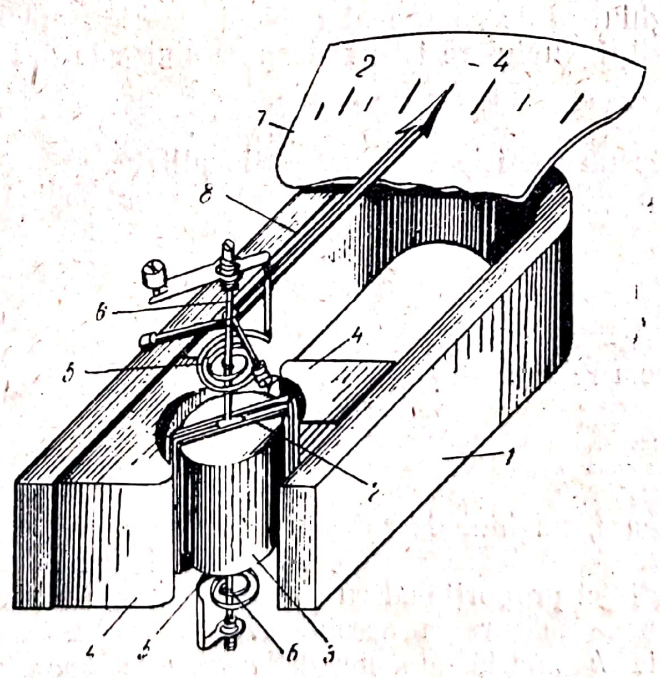


Fig. 15-8. Aspectul constructiv al aparatului magnetoelectric

carcasă dreptunghiulară de aluminiu pe care este înfășurată o sîrmă subțire, izolată. În interiorul bobinei se află un miez cilindric de fier *3* care micșorează reductanța circuitului magnetic și creează, în întrefierul dintre piesele polare *4* și miez, un cîmp magnetic radial și omogen.

Funcționarea aparatului se bazează pe acțiunea dintre cîmpul magnetului permanent și curentul care străbate bobina mobilă.

Cînd nu trece curent prin bobină, planul axial al cadrului bobinei coincide cu axa polilor magnetului. Este poziția de repaus a bobinei. Dacă trimitem însă un curent prin bobină, curentul de măsurat sau un curent proporțional cu acesta sau cu tensiunea de măsurat, conductoarele din cele două laturi ale bobinei, situate în cîmpul magnetic produs de magnetul permanent, fiind străbătute de curent în sensuri opuse, sînt supuse unor forțe egale și de sens contrar care dau naștere unui cuplu proporțional cu curentul care străbate bobina. Deci cuplul motor al aparatului este dat de relația

$$M_m = k_1 I,$$

în care k_1 este un coeficient de proporționalitate.

Aparatul este prevăzut cu două arcuri spirale *5*, fiecare din ele fixat cu un capăt de axul *6* de rotație al bobinei și cu celălalt, de un punct fix al aparatului, legat electric cu una din bornele aparatului. Axul de rotație al bobinei este format din două demiaxe *(6* și *6)*. Curentul intră în aparat printr-una din bornele sale și, după ce parcurge primul arc spiral și o porțiune a jumătății de ax pe care este fixat acesta, intră în bobină. La ieșirea din bobină, el parcurge o porțiune din cealaltă jumătate de ax și arcul fixat pe acesta, pentru a ajunge la a doua bornă a aparatului. Prin rotirea bobinei arcurile sînt strînse sau întinse, producînd astfel o forță elastică, deci asupra axului un cuplu rezistent proporțional cu unghiul α de rotație al bobinei, care se opune cuplului motor. În aceste condiții, cuplul rezistent al aparatului este dat de relația

$$M_r = k_2 \alpha,$$

în care k_2 este un coeficient de proporționalitate.

Pentru poziția de echilibru la care ajunge bobina, avem

$$M_m = M_r$$

sau

$$k_1 I = k_2 \alpha;$$

de unde obținem relația

$$\alpha = k I, \qquad (15\text{-}1)$$

în care $k = \frac{k_1}{k_2}$.

Prin urmare, unghiul de rotație al bobinei, care poate fi măsurat pe cadranul *7* al aparatului cu ajutorul acului indicator *8* solidar cu axul bobinei, este direct proporțional cu valoarea curentului care străbate bobina și poate servi la măsurarea acestui curent.

Constanta k poartă numele de *constanta aparatului*. Unghiul de deplasare al acului fiind proporțional cu curentul, rezultă că *aceste aparate au scări uniforme*, ceea ce constituie unul din avantajele lor.

Dacă se schimbă sensul curentului, se schimbă și sensul cuplului motor deci și direcția mișcării acului. Rezultă că *un instrument cu magnet permanent și cu bobină mobilă nu poate fi folosit decît numai în curent continuu.*

Un asemenea instrument pus să funcționeze în curent alternativ nu va indica nimic, deoarece bobina mobilă și, împreună cu ea, acul va fi solicitată să se deplaseze cînd într-o parte, cînd în alta, și aceasta de atîtea ori pe secundă de cîte ori se schimbă sensul curentului alternativ. La o frecvență a curentului de 50 Hz, acul va fi supus la 100 solicitări de deplasare pe secundă și, din cauza inerției echipajului mobil al aparatului (bobină și ac), va sta pe loc.

Dispozitivul de amortizare al acestui aparat îl constituie însăși carcasa de aluminiu a bobinei care formează un circuit închis. În cursul rotirii bobinei în cîmpul magnetic, se induc în acest circuit curenți care, conform legii lui Lenz, se opun mișcărilor oscilatorii ale bobinei, rezultînd astfel o echilibrare rapidă a sistemului mobil.

Aparatele magnetoelectrice prezintă următoarele calități:

1) au o scară uniformă, ceea ce înlesnește citirea și mărește precizia citirii;

2) sînt foarte sensibile, putînd măsura valori extrem de reduse ale mărimilor respective;

3) dau înregistrări de mare precizie;

4) sînt practic insensibile față de cîmpurile magnetice exterioare;

5) necesită un consum redus de energie.

Printre neajunsurile lor semnalăm:

1) nu pot fi folosite decît în curent continuu;

2) nu pot fi supuse suprasarcinilor, deoarece curentul este adus în bobină prin intermediul arcurilor spirale care la suprasarcini se pot încălzi, modificîndu-și astfel proprietățile elastice;

3) sînt relativ scumpe.

Datorită calităților menționate mai sus, aparatele magnetoelectrice sînt folosite mai mult ca aparate etalon și ca aparate sensibile de laborator și numai rareori la tablourile electrice de forță și lumină.

15-4. Aparate electromagnetice

Funcționarea aparatelor electromagnetice se bazează pe fenomenul de atracție exercitat de o bobină, prin care trece curentul de măsurat, asupra unui miez de fier moale. La tipul constructiv cel mai răspîndit de aparat electromagnetic (fig. 15-9) curentul trece prin înfășurarea bobinei plate A, prevăzută cu o fereastră îngustă. Miezul B, avînd forma unei plăcuțe subțiri, din material magnetic moale, este fixat excentric pe axul aparatului și poate intra în fereastra bobinei A rotindu-se solidar cu axul.

De axul aparatului sunt fixate: acul indicator, pistonul de aluminiu al dispozitivului pneumatic de amortizare și arcul spiral care creează cuplul rezistent, silind placa de fier și acul antrenat de ea să se oprească în poziția de echilibru.

Forța electromagnetică de atracție a unei bobine parcurse de curent asupra unei armături de fier este proporțională cu pătratul cîmpului produs de bobină, deci cu pătratul curentului ce trece prin ea și este cu atît mai mare cu cît distanța d a armăturii (în cazul nostru piesa de fier) față de bobină este mai mică. Deci cuplul motor al aparatului este

$$M_m = k_1 I^2 f(d) .$$

Cuplul rezistent produs de arcul spiral este dat, ca și în cazul precedent, de relația $M_r = k_2 \alpha$. Rezultă că relația de funcționare a aparatului, obținută din echilibrul cuplurilor, este

$$\alpha = k\, I^2 f\,(d)\,, \qquad (12\text{-}2)$$

în care k reprezintă constanta aparatului.

Prin urmare, deviația acului este proporțională cu pătratul intensității curentului care străbate bobina fixă și cu poziția miezului de fier față de bobină. De aceea, *aceste aparate au scări neuniforme.*

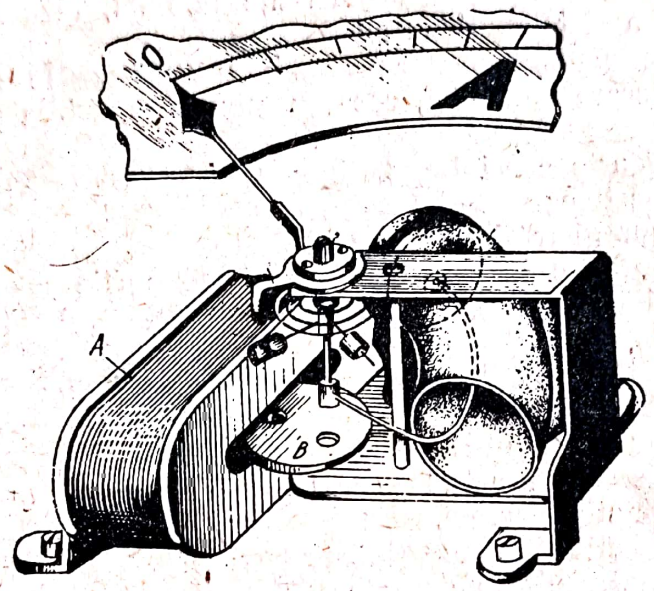


Fig. 15-9. Aspectul constructiv al aparatului electromagnetic

Unghiul de deplasare α al acului indicator variind cu pătratul curentului, rezultă că sensul mișcării acului nu se schimbă dacă se schimbă sensul curentului. Deci *aparatul poate fi folosit tot atît de bine în curent alternativ ca și în curent continuu.*

Printre calitățile acestor aparate menționăm:

1) sînt simple și robuste;

2) neavînd părți conducătoare de curent mobile, sînt rezistente la supraîncărcări;

3) pot fi utilizate atît în curent continuu cît și în curent alternativ;

4) pot fi construite pentru curenți oricît de mari.

Neajunsurile principale ale aparatelor electromagnetice sînt:

1) precizia lasă de dorit;

2) scara neuniformă;

3) indicațiile pot fi influențate de cîmpurile magnetice exterioare.

Cu toate că nu sînt instrumente de mare precizie, fiind însă robuste și relativ ieftine, aparatele electromagnetice sînt aparatele de măsură cele mai răspîndite, în special în curent alternativ. Ele sînt folosite cu precădere ca aparate de tablou.

Scanned with OKEN Scanner

15-5. Aparate electrodinamice

Funcţionarea aparatelor electrodinamice se bazează pe acţiunea reciprocă dintre două bobine prin care trece curentul (sau curenţii) de măsurat. Una din bobine este fixă, iar cealaltă este mobilă şi solidară cu acul indicator.

În fig. 15-10 este reprezentat un aparat electrodinamic în care bobina fixă este notată cu *1* şi cea mobilă cu *2*. Aparatul este prevăzut cu amortizor pneumatic *3*. La fel ca şi la aparatele magnetoelectrice, curentul este adus la bobina mobilă prin intermediul arcurilor spirale *4*, care servesc pentru producerea cuplului rezistent. Cînd cele două bobine

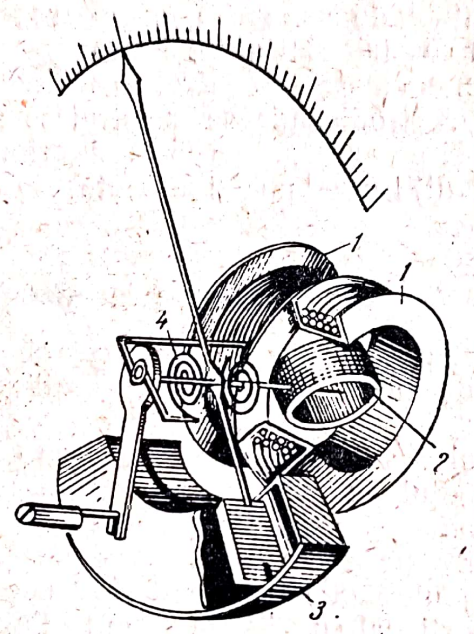


Fig. 15-10. Aspectul constructiv al aparatului electrodinamic

sînt străbătute de curenţi, bobina mobilă se roteşte şi tinde să se aşeze în aşa fel, faţă de bobina fixă, încît fluxurile care străbat bobinele să fie maxime. Se produce astfel cuplul motor al aparatului. Cuplul rezistent este realizat de cele două arcuri spirale.

Bobinele pot fi legate în serie una cu alta, deci parcurse de acelaşi curent. Dar se poate ca fiecare bobină să fie parcursă de către un curent separat.

Cuplul motor al bobinei mobile este proporţional cu produsul curenţilor care parcurg bobinele, adică este dat de relaţia $M_m = k\, I_1\, I_2$ iar cuplul rezistent este $M_r = k'\, \alpha$. La echilibru avem

$$\alpha = k\, I_1\, I_2, \qquad (15\text{-}3)$$

adică unghiul de deviaţie a acului indicator este proporţional cu produsul curenţilor care trec prin cele două bobine. În consecinţă, cu excepţia wattmetrelor, scara acestor aparate este neuniformă. Pentru a se obţine o scară cît mai uniformă, se dă celor două bobine anumite forme speciale.

Prin schimbarea simultană a sensului curentului în ambele bobine, sensul cuplului motor deci sensul devierii acului rămîne același. Urmează că aparatele electrodinamice pot fi folosite atît în curent continuu cît și în curent alternativ.

În concluzie, calitățile acestor aparate sînt:

1) precizie și sensibilitate ridicate;
2) pot fi folosite în ambele feluri de curent.

Ca dezavantaje ale aparatelor electrodinamice menționăm:

1) scara neuniformă;
2) nu suportă supraîncărcări din cauza trecerii curentului prin arcurile spirale;
3) sînt influențate de cîmpurile exterioare;
4) necesită un consum ridicat de energie;
5) sînt scumpe.

Pe principiul electrodinamic se construiesc aparate de curent alternativ foarte precise și sensibile. Deci la măsurările precise de mărimi electrice alternative se utilizează numai aparate electrodinamice, din clasele 0,2 și 0,5.

15-6. Aparate termice

Funcționarea aparatelor termice se bazează pe efectul dilatării unui conductor parcurs de curent, dilatare provocată prin încălzirea lui prin efect Joule-Lenz.

Aparatele termice au un fir de platină-argint sau de platină-iridiu prin care trece curentul de măsurat. Încălzindu-se prin efect Joule-Lenz, firul se dilată, se alungește și, deoarece extremitățile lui sînt fixe, ia o săgeată proporțională cu dilatarea, deci cu încălzirea, adică cu pătratul curentului (legea Joule-Lenz). Unghiul α cu care se deplasează acul indicator fiind proporțional cu săgeata firului dilatat, vom avea

$$\alpha = k I^2 ,$$

în care k este constanta aparatului.

În fig. 15-11 este redată schematic construcția unui aparat termic.

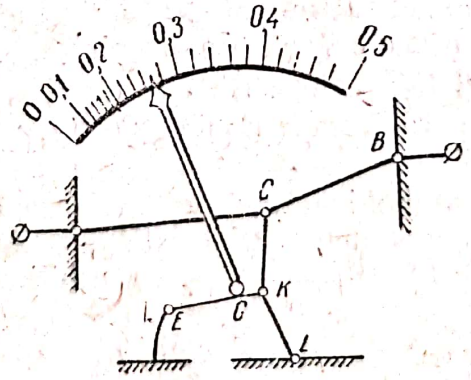


Fig. 15-11. Schema de principiu a aparatului termic

În AB este firul străbătut de curent, fixat rigid la ambele capete și care se dilată prin încălzire. În punctul C al acestui fir, așezat în apropierea

mijlocului său, este fixat un fir metalic auxiliar CL, a cărui extremitate L este prinsă în punctul fix L. De mijlocul K al firului auxiliar este fixat un fir de mătase care trece peste rola G și este întins de arcul plat E. Acul indicator al aparatului este montat pe același ax ca și rola G. Deplasarea punctului C, produsă prin dilatarea firului AB parcurs de curent, este transmisă acului prin intermediul punții CL, al firului KE și al rolei G.

Aparatele termice pot fi utilizate atît în curent continuu cît și în curent alternativ. Devierea acului fiind proporțională cu pătratul curentului, ele au o scară pătratică, deci neuniformă.

Aparatele termice sînt aparate inerte care nu indică imediat mărimea măsurată, ci necesită un timp apreciabil (uneori cîteva secunde), pînă ce firul termic al aparatului a ajuns la dilatarea corespunzătoare curentului sau tensiunii de măsurat. Ele se întrebuințează în special pentru măsurarea curenților și a tensiunilor de frecvență ridicată, unde nu se pot aplica aparate cu bobine.

Aparatele termice fac parte dintre instrumentele cele mai puțin precise, eroarea lor fiind destul de mare chiar în construcțiile cele mai îngrijite. De asemenea, consumul lor de energie este destul de ridicat, sînt sensibile la supraîncărcări și indicațiile lor sînt influențate de mediul exterior.

15-7. Aparate de inducție

Schema constructivă a unui aparat de inducție cu disc, tipul cel mai întrebuințat, este reprezentată în fig. 15-12.

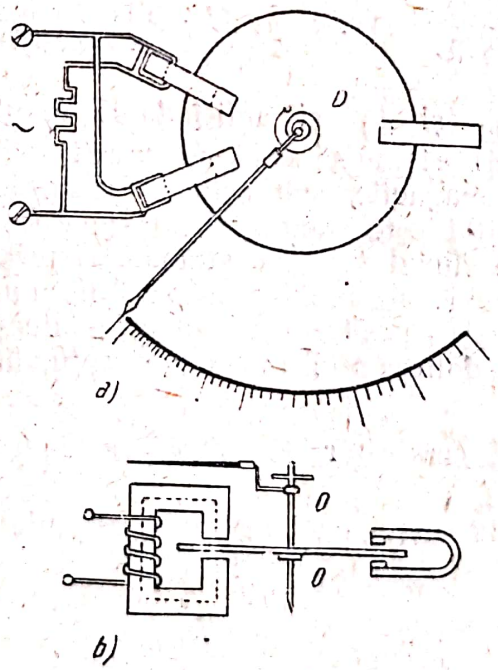


Fig. 15-12. Schema principală de construcție a aparatului de inducție

Echipajul mobil al aparatului constă dintr-un disc de aluminiu, fixat pe același ax cu acul indicator. Discul este situat în circuitul magnetic a

doi electromagneți, ale căror bobine sînt parcurse de curenții alternativi i_1 și i_2, presupuși sinusoidali, decalați între ei cu unghiul ψ. Curenții dau naștere fluxurilor magnetice φ_1 și φ_2 care, în ipoteza că miezurile de fier ale circuitelor magnetice nu sînt saturate, sînt sinusoidali și în fază cu curenții respectivi.

Străbătînd discul de aluminiu, fluxurile φ_1 și φ_2 induc în acesta f.e.m. e_1 și e_2, decalate cu $\frac{\pi}{2}$ în urma fluxurilor respective. Aceste f.e.m. dau naștere în disc unor curenți Foucault i'_1 și i'_2 în fază cu f.e.m. respective. În fig. 15-13 este reprezentată diagrama vectorială a aparatului de inducție, iar în fig. 15-14, curenții i'_1 și i'_2 induși în disc. Sensurile pozitive ale acestor curenți se determină alegîndu-se un sens pozitiv pentru

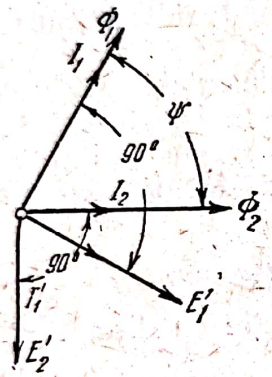


Fig. 15-13. Diagrama vectorială a aparatului de inducție

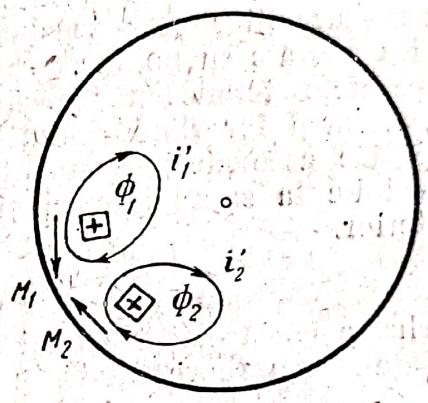


Fig. 15-14. Curenții Foucault și cuplu-care apar în discul aparatului de inducție

fluxurile magnetice φ_1 și φ_2 și aplicîndu-se regula burghiului.

Se știe (par. 7-5) că atunci cînd un circuit străbătut de curent se găsește într-un cîmp magnetic, sub acțiunea reciprocă dintre curent și cîmpul magnetic circuitul este supus unor forțe care tind să-l deplaseze în poziția pentru care fluxul total ce străbate circuitul să fie pozitiv și să aibă valoarea maximă. Rezultă că asupra discului vor acționa două cupluri motoare M_1 și M_2, produse, primul prin interacțiunea fluxului φ_2 și a curentului i'_1, al doilea prin interacțiunea fluxului φ_1 și a curentului i'_2.

Sensul pozitiv al cuplurilor M_1 și M_2 este arătat, în fig. 15-14, prin săgeți.

Valoarea medie, în cursul unei perioade, a cuplului M_1 este dată de relația

$$M_1 = \frac{1}{T}\int_0^T k_1 \varphi_2 i'_1 \, dt = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \Phi_2 I'_1 \cos(\overline{\Phi}_2, \overline{I}'_1)$$

și, analog, a cuplului M_2 de relația

$$M_2 = \frac{k_2}{\sqrt{2}} \Phi_1 I'_2 \cos(\overline{\Phi}_1, \overline{I}'_2) .$$

Din diagrama vectorială reprezentată în fig. 15-13, rezultă că

$$\sphericalangle \bar{\Phi}_2, \bar{I}_1' = 90° - \psi$$

și

$$\sphericalangle \bar{\Phi}_1, \bar{I}_2' = 90° + \psi .$$

Ținînd seama de transformările

$$\cos(90° - \psi) = \sin\psi \quad \text{și} \quad \cos(90° + \psi) = -\sin\psi ,$$

rezultă că relațiile de mai sus ale cuplurilor M_1 și M_2 devin

$$M_1 = k' \Phi_2 I_1' \sin\psi$$

și

$$M_2 = -k'' \Phi_1 I_2' \sin\psi ,$$

în care

$$k' = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad k'' = \frac{k_2}{\sqrt{2}} .$$

Decalajele dintre φ_1 și i_1' precum și dintre φ_2 și i_2' fiind zero, valoarea medie a cuplurilor motoare respective M_1' și M_2' provocate prin acțiunea reciprocă dintre φ_1 și i_1' respectiv φ_2 și i_2' sînt nule, deoarece

$$M_1' = K_1' \Phi_1 I_1' \cos(\bar{\Phi}_1, \bar{I}_1') = 0$$

și

$$M_2' = k_2' \Phi_2 I_2' \cos(\bar{\Phi}_2, \bar{I}_2') = 0 .$$

În aceste condiții, cuplul rezultant motor care acționează asupra discului este dat de relația

$$M = M_1 - M_2 = k' \Phi_2 I_1' \sin\psi + k'' \Phi_1 I_2' \sin\psi .$$

Luînd în considerație faptul că la rezistența constantă a discului și frecvența constantă a curenților de alimentare putem scrie

$$I_1' \equiv \Phi_1 \quad \text{și} \quad I_2' \equiv \Phi_2 ,$$

rezultă pentru cuplul motor

$$M = k_3 \Phi_2 \Phi_1 \sin\psi + k_4 \Phi_1 \Phi_2 \sin\psi = k_5 \Phi_1 \Phi_2 \sin\psi . \qquad (15\text{-}5)$$

Prin urmare, cuplul motor al aparatului de inducție este proporțional cu produsul dintre fluxurile magnetice care străbat discul și sinusul unghiului de defazaj dintre aceste fluxuri.

Din relațiile precedente rezultă că atunci cînd cele două fluxuri sînt în fază, cuplul motor este egal cu zero căci, pentru $\psi = 0$, $\sin \psi = 0$. Pentru a obține un cuplu motor maxim, trebuie ca decalajul ψ să fie egal cu $\frac{\pi}{2}$ (deci $\sin \psi = 1$) și ca fluxurile magnetice să aibă valori maxime.

În ipoteza că miezurile magnetice sînt nesaturate, putem scrie

$$\Phi_1 \equiv I_1 \quad \text{și} \quad \Phi_2 \equiv I_2$$

și relația (15-5) devine

$$M = k_5 \Phi_1 \Phi_2 \sin \psi = k_6 I_1 I_2 \sin \psi \cdot \qquad (15\text{-}6)$$

Sub acțiunea acestui cuplu motor, echipajul mobil al aparatului se rotește cu un unghi α, antrenînd apariția unui cuplu rezistent $M_r = K \alpha$. La echilibru avem

$$M_m = M_r$$

sau

$$k_6 I_1 I_2 \sin \psi = K \alpha ,$$

de unde

$$\alpha = \frac{k_6}{K} I_1 I_2 \sin \psi = k I_1 I_2 \sin \psi \cdot \qquad (15\text{-}7)$$

Prin urmare, ca și cuplul motor, unghiul de deplasare al echipajului mobil al aparatelor de inducție este proporțional cu produsul dintre fluxurile magnetice care străbat discul și sinusul unghiului de defazaj dintre aceste fluxuri sau, cînd circuitele magnetice ale aparatului sînt nesaturate, unghiul de deplasare este proporțional cu produsul dintre curenții care produc aceste fluxuri și sinusul unghiului de deplasare dintre aceste fluxuri.

Aparatele de inducție nu pot fi folosite decît în curent alternativ de frecvență constantă (de regulă frecvența industrială) și nu prezintă o mare precizie. Avantajele lor sînt : uniformitatea scării (la wattmetre), siguranță mare de funcționare și posibilitatea de a suporta suprasarcini deoarece curentul nu trece prin arcurile spirale.

15-8. Galvanometre

Galvanometrele sînt aparate electrice de măsură de foarte mare sensibilitate, destinate lucrărilor precise de laborator. Principiul lor de funcționare este cel magnetoelectric.

Cele mai sensibile galvanometre sînt cele cu oglindă mobilă. În fig. 15-15 este redată construcția unui asemenea galvanometru. Echipajul mobil este format de o bobină B care se rotește între polii unui magnet puternic A. Bobina este suspendată de un fir metalic flexibil C

Scanned with OKEN Scanner

care îndeplinește atît rolul arcului elastic necesar creerii cuplului rezistent cît și pe acela de a alimenta cu curent unul din capetele înfășurării bobinei. Celălalt capăt al înfășurării bobinei este legat la borna respectivă a aparatului printr-o spirală de argint foarte subțire. Ca și la construcțiile obișnuite de aparate magnetoelectrice, bobina se rotește în jurul unui miez cilindric fix de oțel care servește, pe de o parte, la întărirea fluxului produs de magnetul permanent, iar, pe de alta, pentru a imprima o direcție radială liniilor de forță în întrefierul astfel creat.

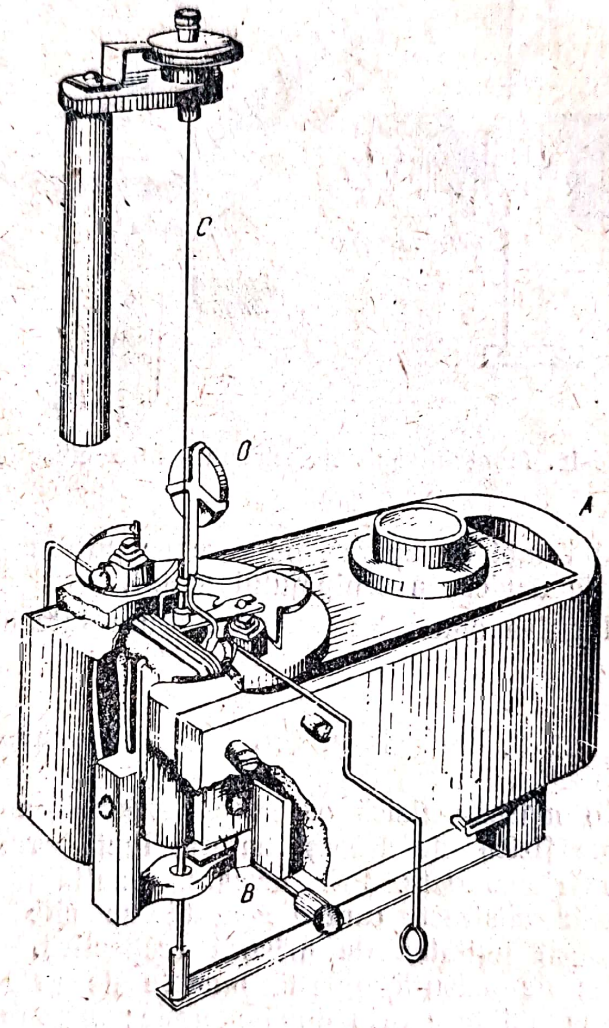


Fig. 15-15. Aspectul constructiv al galvanometrului cu oglindă

De cadrul mobil al galvanometrului, uneori chiar de firul de suspensie este fixată o mică oglindă, notată cu *O* în fig. 15-15, cu ajutorul căreia se citește unghiul de deviere a cadrului.

La galvanometrele cu așa numita *citire obiectivă*, o rază luminoasă emisă de o sursă fixă de lumină (fig. 15-16), căzînd pe oglinda *O*, este reflectată de aceasta pe scara aparatului, situată la 1,5 m de oglindă, unde produce un *spot luminos* (o mică pată luminoasă).

Sensibilitatea mare a galvanometrelor cu oglindă se datorește, pe de o parte, faptului că ele sînt lipsite de frecări în lagăre, pe de altă parte modului lor de citire, prin intermediul oglinzii, pe o scară aflată la

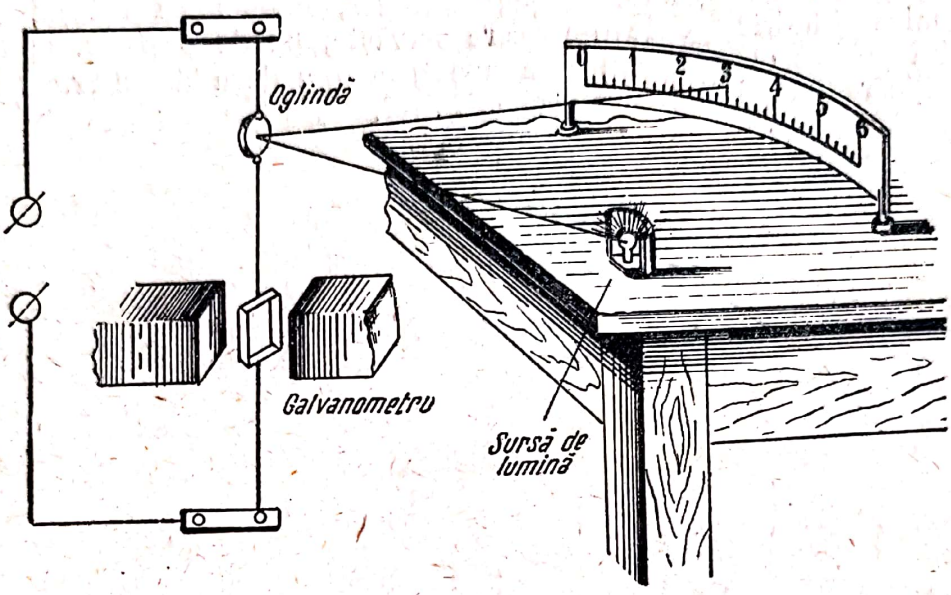


Fig. 15-16. Montajul galvanometrului pentru citire obiectivă

distanță apreciabilă față de aparat, pe care se pot înregistra și cele mai reduse unghiuri de deviere a echipajului mobil.

Cu ajutorul galvanometrelor se pot măsura intensități de curent de ordinul 10^{-14} A.

15-9. Metode și erori de măsurare

A măsura o mărime fizică oarecare înseamnă a determina de cîte ori o altă mărime fizică, de aceeași natură, luată ca unitate de măsură, se cuprinde în mărimea dată. Prin urmare, rezultatul unei măsurări reprezintă un număr abstract care ne arată de cîte ori mărimea dată este mai mare decît unitatea de măsură respectivă. Acest rezultat, înmulțit cu unitatea de măsură, poartă numele de *valoarea mărimii*.

Măsurările se pot face prin două metode: *metoda directă* și *metoda indirectă*.

Se aplică metoda directă atunci cînd valoarea unei mărimi se găsește direct, pe cale experimentală, prin compararea ei cu unitatea de măsură respectivă. Aplicăm metoda directă cînd măsurăm, de pildă, o lungime cu ajutorul metrului sau intensitatea unui curent cu ajutorul unui ampermetru.

Se aplică metoda indirectă atunci cînd valoarea unei mărimi se calculează cu ajutorul unei relații funcționale exprimată printr-o formulă în care intră mărimi de altă natură, pe care le măsurăm prin metoda directă. De pildă, măsurînd, în volți, tensiunea aplicată unei rezistențe cu ajutorul unui voltmetru și, în amperi, curentul care trece prin acea

rezistență cu ajutorul unui ampermetru și introducînd valorile găsite în expresia legii lui Ohm, pusă sub forma $R = \frac{U}{I}$, putem calcula valoarea în ohmi a rezistenței.

Numim *valoare reală* a unei mărimi numărul care exprimă *raportul exact* între această mărime și unitatea de măsură respectivă, înmulțit cu acea unitate. Această valoare ar rezulta dacă măsurarea nu ar fi însoțită de nici o eroare și este valoarea către care se tinde în orice operație de măsurare. Numim *valoare de referință* a unei mărimi și o notăm cu X_0 valoarea obținută prin măsurarea ei cu mijloace precise obișnuite, de exemplu măsurarea ei prin comparație cu aparate etalon.

Măsurările sînt întotdeauna însoțite de anumite erori care provin: a) din cauza preciziei relative a aparatelor cu care măsurăm (erori de construcție și de etalonare a aparatelor); b) din cauza metodelor aplicate; c) din cauza influenței mediului exterior asupra măsurărilor (cîmpuri perturbatorii, temperatură etc.); d) din cauza imperfecțiunii organelor de simț ale experimentatorului.

Erorile comise cu prilejul unei măsurări se împart în *erori absolute* și *erori relative*.

Numim eroare absolută sau, mai scurt, *eroare* a valorii măsurate a unei mărimi și o notăm cu Δ diferența, în mărime și semn, dintre valoarea l indicată de aparatul de măsură și valoarea de referință X_0, adică

$$\Delta = l - X_0 .$$

Numim eroare relativă și o notăm cu Δ_r, raportul dintre eroarea Δ și valoarea de referință X_0 a mărimii

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{X_0} .$$

Eroarea relativă arată gradul de precizie al măsurării efectuate. Reprezentînd raportul între două mărimi de aceeași natură, eroarea relativă este un număr abstract și se exprimă, de cele mai multe ori, în procente.

Se înțelege prin *valoare nominală* a unui aparat de măsură limita lui de măsurare, adică valoarea maximă a mărimii pe care aparatul o poate măsura.

Numim *eroare relativă nominală*, raportul dintre eroarea unui aparat de măsură și valoarea nominală a aparatului. Această eroare servește pentru a se determina gradul de precizie a aparatelor de măsură (vezi par. 15-1).

Valoarea erorii Δ, luată cu semn contrar, poartă numele de *corecție* a măsurării. Notînd corecția cu Δ', avem

$$\Delta' = -\Delta = X_0 - l .$$

Din relația precedentă rezultă

$$X_0 = l + \Delta' .$$

Prin urmare, pentru a se obține valoarea de referință a mărimii măsurate, trebuie să adăugăm, la valoarea măsurată, corecția respectivă.

Exemplul 15-1. Măsurînd cu un voltmetru a cărui valoare nominală este de 500 V, o tensiune a cărei valoare de referință este $X_0 = 220$ V, se obține valoarea $= 221{,}3$ V. Se cere eroarea relativă a măsurării și eroarea relativă nominală a aparatului.

Soluția: Eroarea măsurării este

$$\Delta = l - X_0 = 221{,}6 - 220 = 1{,}6 \text{ V};$$

deci eroarea relativă, în procente, este

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{X_0} 100 = \frac{1{,}6}{220} = 0{,}73\ \% .$$

Eroarea nominală în procente este

$$\frac{\Delta}{U_{nom}} \cdot 100 = \frac{1{,}6}{500} 100 = 0{,}32\ \% .$$

15-10. Măsurarea curentului

După cum se știe, aparatele destinate măsurării intensității curentului se numesc ampermetre.

În curentul continuu se pot folosi ca ampermetre toate sistemele de aparate descrise mai sus. Sînt preferate însă aparatele magnetoelectrice care au scară uniformă, sînt sensibile și dau rezultate precise.

În curentul alternativ pot fi folosite aceleași aparate ca și în curent continuu, cu excepția aparatelor magnetoelectrice, dîndu-se preferință aparatelor electrodinamice atunci cînd este vorba de măsurări de precizie.

Pentru măsuri industriale de curent alternativ se folosesc, în general, aparate electromagnetice care, pînă la frecvența de 300 Hz, au ajuns astăzi la un grad de precizie satisfăcător.

La efectuarea unei măsurări de curent se utilizează de regulă aparate a căror limită depășesc cu 25-30% valoarea presupusă a intensității de măsurat.

Ampermetrele, montîndu-se în serie pe circuitele electrice al căror curent trebuie măsurat, trebuie să prezinte o rezistență interioară R_A cît mai mică pentru ca puterea consumată de aparat, dată de relația $R_A I_A^2$, să fie cît mai redusă și căderea de tensiune $R_A I_A$, provocată de aparat pe circuit, cît mai mică.

Limitele de măsurare ale unui ampermetru de curent continuu pot fi extinse folosindu-se rezistențe de valoare foarte redusă, legate în derivație pe bornele aparatului (fig. 15-17 *a*). Asemenea rezistențe se numesc *șunt*-uri.

Șunturile se construiesc din manganin (a cărei rezistivitate este practic independentă de temperatură) sub formă de fire, bare sau panglici (fig. 15-17 *b*).

Aparatul în sine, fără șunt, este totdeauna un miliampermetru magnetoelectric, a cărui indicație maximă este de ordinul 5-30 mA și a cărei cădere de tensiune, de ordinul 60-150 mV.

Rezistența șuntului se determină în modul următor (fig. 15-17 a). Notînd cu I intensitatea curentului de măsurat, cu I_A valoarea curentului care trece prin ampermetru, cu R_A rezistența ampermetrului, cu I valoarea curentului care trece prin șunt și cu $R_ș$ rezistența șuntului,

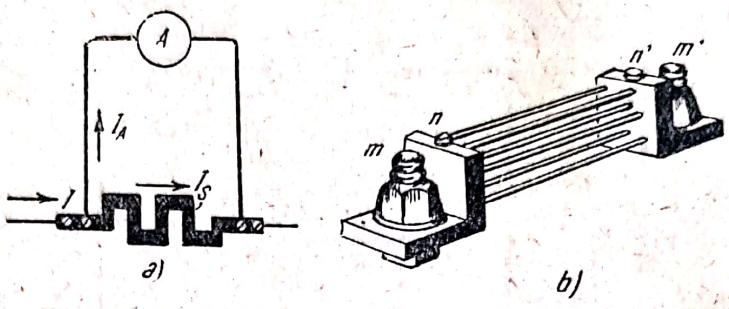


Fig. 15-17. *a)* Schema de legare a șuntului la ampermetru ; *b)* șuntul

căderea de tensiune între bornele ampermetrului, care sînt și ale șuntului, este

$$R_A I_A = R_ș I_ș ,$$

de unde

$$\frac{I_ș}{I_A} = \frac{R_A}{R_ș} .$$

Pe de altă parte avem

$$I = I_A + I_ș .$$

Rezultă

$$R_ș = \frac{I_A R_A}{I - I_A} . \qquad (15\text{-}8)$$

Din relațiile precedente mai rezultă că

$$I = \left(1 + \frac{R_A}{R_ș}\right) I_A = k_ș I_A . \qquad (15\text{-}9)$$

Deoarece $k_ș$ este o constantă, rezultă că curentul de măsurat este proporțional cu curentul care trece prin aparat.

Coeficientul $k_ș$ se numește *coeficientul de multiciplitate* al șuntului și el indică de cîte ori curentul de măsurat este mai mare decît cel care trece prin aparat.

In funcție de $k_ș$ relația (15-8) devine

$$R_ș = \frac{R_A}{k_ș - 1} . \qquad (15\text{-}10)$$

Șunturile pot fi montate în interiorul aparatului, cu ocazia construcției acestuia și în acest caz sînt fixe, sau pot fi aplicate în exterior și în acest caz pot fi schimbate (fig. 15-17).

Aparatul cu șunturi interioare poate dispune de mai multe sensibilități, așa cum rezultă din fig. 15-18 în care este reprezentată schema unui ampermetru cu șunt multiplu, cu patru sensibilități de măsurare.

Șunturile exterioare pentru o singură sensibilitate au marcate pe ele intensitatea de curent care reprezintă sensibilitatea aparatului montat

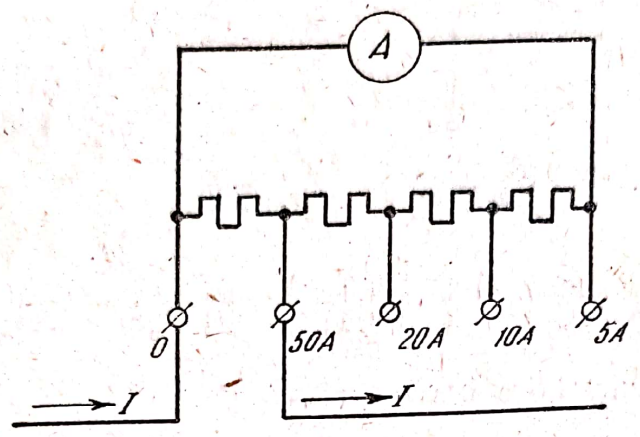


Fig. 15-18. Ampermetru cu mai multe sensibilități

cu șuntul respectiv, precum și căderea de tensiune, în mV, la bornele ansamblului.

Șunturile exterioare au două borne principale (notate în fig. 15-17*b* cu *m* și *m'*), prin care șuntul este legat în serie în circuitul curentului de măsurat, și două borne secundare (notate cu *n* și *n'*) care se leagă la bornele aparatului cu ajutorul a două cordoane speciale.

Cu ajutorul șunturilor exterioare se pot măsura curenți de zeci de mii de amperi.

În curent alternativ, pentru intensități care depășesc 100 A, se întrebuințează transformatoare de intensitate care reduc curentul de măsurat la 5 A (vezi vol. II Transformatoare de măsură).

Exemplul 15-2. Să se calculeze rezistența șuntului necesar unui ampermetru de 5 A, de rezistență interioară $R_A = 0{,}9\ \Omega$, pentru a putea măsura curenți pînă la 50 A.

Soluția: Aplicăm relația (15-10), în care $k_ș = \frac{50}{5} = 10$.

$$R_ș = \frac{R_A}{k_ș - 1} = \frac{0{,}9}{9} = 0{,}01\ \Omega .$$

15-11. Măsurarea curenților de înaltă frecvență

Curenții de înaltă frecvență pot fi măsurați cu aparate termice, construite în acest scop. La frecvențe foarte mari, asemenea aparate nu mai sînt precise, deoarece, pe de o parte, rezistența firului încălzit se schimbă sub influența efectului pelicular important la asemenea frecvențe, iar, pe de altă parte, prin efectul de șuntare al capacității dintre bornele aparatului și al apariției capacității aparatului față de obiectele

exterioare. În aceste condiții, se utilizează aproape exclusiv instrumente termoelectrice, prevăzute cu termocupluri.

Am arătat în par. 4-8 că atunci cînd două conductoare constituite din materiale diferite sînt sudate între ele la două din capete și se încălzește locul sudurii, între capetele libere se obține o diferență de potențial care poate fi măsurată cu ajutorul unui aparat sensibil, legat la aceste capete. Această diferență de potențial este cu atît mai mare, cu cît temperatura locului sudurii este mai ridicată.

În cazul unui ampermetru termoelectric, încălzirea sudurii cuplului se obține cu ajutorul curentului care trebuie măsurat. În acest scop, curentul străbate conductorul *a b* (fig. 15-19) al aparatului *(firul încălzitor)*, pe care îl încălzește. Firul încălzitor transmite căldura punctului de sudură al termocuplului care este sudat de fir (punctul *c* din fig. 15-19).

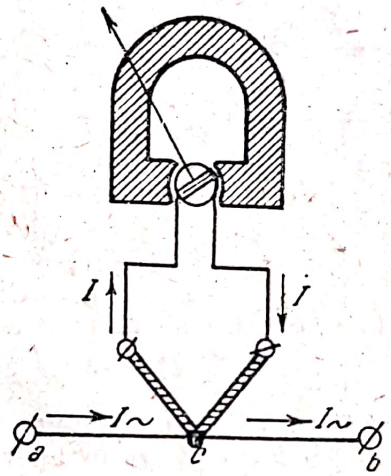


Fig. 15-19. Schema unui aparat termoelectric

Cantitatea de căldură de la locul de sudură este proporțională cu pătratul curentului de măsurat (efectul Joule-Lenz), iar intensitatea curentului din circuitul termocuplului și al dispozitivului de măsură este dată de relația

$$I' = \frac{E}{\Sigma r},$$

în care E este f.e.m. a termocuplului, corespunzătoare încălzirii respective, iar Σr, rezistența totală a cicuitului respectiv.

Urmează că indicațiile aparatului sînt proporționale cu pătratul curentului de măsură, adică

$$\alpha = k I^2, \qquad (15\text{-}11)$$

în care k este constanta aparatului.

Firul încălzitor se execută din sîrmă de platină cu iridiu sau din sîrmă de constantan.

Cu aparatele termoelectrice se pot măsura curenți avînd frecvența pînă la 200 MHz.

Scanned with OKEN Scanner

Aparatele termoelectrice dau, în general, măsuri de mare precizie. Au însă neajunsul că nu admit suprasarcini, au scara neuniformă (pătratică) și sînt influențate de temperatura exterioară și de curenții de aer.

Pentru a se înlătura acest din urmă neajuns, adeseori termocuplul este închis într-un vas de sticlă în care se face vid (termocuplu cu vid).

15-12. Măsurarea tensiunii

Pentru a măsura tensiunea ne servim de voltmetre care se leagă între punctele între care urmează să măsurăm această tensiune.

Voltmetrele se construiesc ca miliampermetre prevăzute cu o mare rezistență adițională, legată în serie cu aparatul și făcînd parte din aparat (fig. 15-20), și cu o scară etalonată în volți.

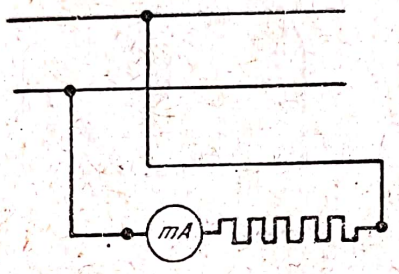


Fig. 15-20. Schema interioară a voltmetrului

În curent continuu pot fi folosite ca voltmetre oricare din sistemele de aparate descrise mai sus. Se preferă însă aparatele magnetoelectrice, pentru sensibilitatea și precizia lor.

În curent alternativ se folosesc ca voltmetre aceleași aparate ca și pentru curent continuu, înafară de aparatele magnetoelectrice. Se preferă aci aparatele electrodinamice, pentru calitățile lor de precizie și sensibilitate.

Pentru a reduce puterea consumată de aparat, care este dată de expresia

$$R_V I_V^2 = \frac{U^2}{R_V},$$

în care R_V este rezistența aparatului, I_V, curentul prin aparat, iar U, tensiunea măsurată, avem interesul să dăm rezistenței R_V o valoare cît mai mare. O rezistență mare a aparatului este necesară și în ceea ce privește precizia aparatului, deoarece eroarea la măsurarea tensiunii este invers proporțională cu această rezistență.

Pentru extinderea limitelor de măsurare în curent continuu se utilizează rezistențe adiționale care se leagă în serie cu aparatul. Valoarea rezistenței adiționale se calculează precum urmează:

Se presupunem un voltmetru construit pentru o tensiune nominală U, avînd o rezistență interioară R_V, cu care dorim să măsurăm o tensiune U_1, de n ori mai mare decît tensiunea U.

Valoarea rezistenței adiționale se alege în așa fel încît curentul care trece prin aparat, cînd măsurăm tensiunea U_1, să fie același ca și pentru tensiunea U. Prin urmare

$$I_V = \frac{U}{R_V} = \frac{U_1}{R_V + R_a} = \frac{n\,U}{R_V + R_a},$$

de unde

$$R_a = R_V\,(n - 1) \cdot \qquad (15\text{-}12)$$

Rezistențele adiționale, atît cele care fac parte din aparat cît și cele

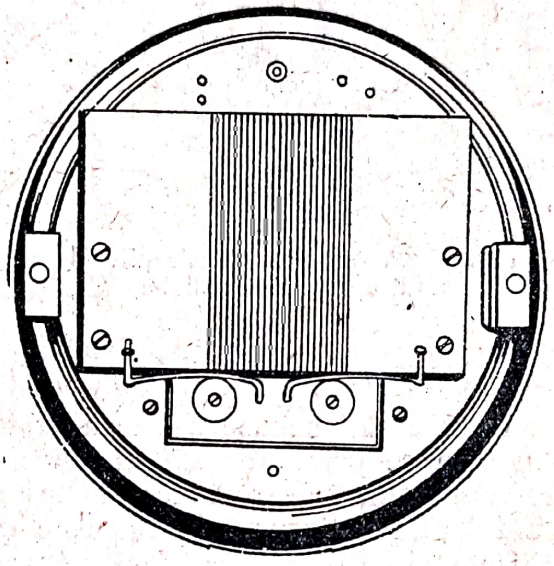


Fig. 15-21. Rezistența adițională interioară a voltmetrului

care se adaugă aparatului pentru a-i extinde limitele de măsurare, se fac din manganin, care are o rezistență relativ ridicată și un coeficient de temperatură practic neglijabil.

În fig. 15-21, este reprezentat un voltmetru, văzut din spate, cu capacul ridicat, pentru a i se vedea rezistența adițională interioară (de construcție) a aparatului.

Cînd tensiunea în curent alternativ trece de 750 V, pentru măsurarea ei se utilizează transformatoare de măsură, care obișnuit reduc tensiunea la 100 V (vezi vol. II, Transformatoarele de măsură).

Tensiunile foarte înalte, atît în curent continuu cît și în curent alternativ, pot fi măsurate cu ajutorul voltmetrelor electrostatice.

Voltmetrele electrostatice au ca principiu de funcționare atracția electrostatică dintre două sau mai multe plăci supuse unei diferențe de potențial, deci încărcate cu sarcini de semne contrarii. Schema constructivă a unui asemenea aparat este reprezentată în fig. 15-22. Cînd aparatul este legat la o tensiune de curent continuu, plăcile mobile A se încarcă de pildă pozitiv, iar cele fixe B se încarcă negativ. Plăcile fixe atrag pe cele mobile (fenomenul de atracție este reciproc) și acestea din urmă, împreună cu axul aparatului și cu acul indicator fixat pe ax, se

rotesc cu un unghi oarecare. Cuplul rezistent este dat de arcul spiral C din fig. 15-22. La scoaterea aparatului de sub tensiune, forța de atracție dintre plăci dispare și arcul aduce plăcile mobile în poziție inițială, iar acul indicator revine la zero.

Cînd aparatul este legat în curent alternativ, semnele sarcinilor de pe plăcile A și B schimbîndu-se simultan, sensul forței de atracție

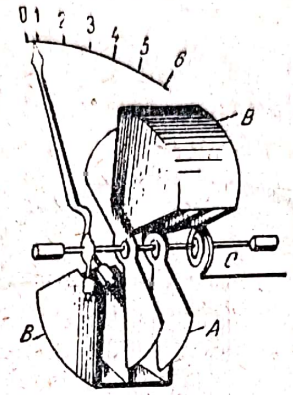


Fig. 15-22. Aspectul constructiv al unui aparat electrostatic

dintre plăci rămîne constant. Prin urmare, aparatele electrostatice funcționează și în curent alternativ.

Tensiunile înalte la care sînt supuse aceste aparate necesită anumite măsuri de precauție în ceea ce privește manipularea și izolarea lor.

Ca avantaje ale aparatelor electrostatice menționăm consumul de energie practic nul, faptul că funcționarea lor nu este influențată de frecvență, deci pot fi utilizate și la măsuri de înaltă frecvență, și faptul că sînt insensibile la temperatură și la cîmpurile magnetice exterioare.

Printre neajunsuri semnalăm precizia lor relativ redusă (2%), fragilitatea și capacitatea lor proprie relativ mare.

În tehnica frecvențelor înalte și foarte înalte tensiunea poate fi măsurată cu voltmetre termice, termoelectrice, electrostatice și electronice.

Voltmetrele termice, avînd o rezistență mică, nu sînt folosite decît foarte rar.

Pînă la frecvența de 3 MHz sînt utilizate voltmetrele termoelectrice care nu diferă de ampermetrele termoelectrice decît prin faptul că firul încălzitor este legat în serie cu o rezistență adițională. De la această frecvență în sus, se utilizează voltmetre electrostatice

Cele mai utilizate aparate de măsură în tehnica frecvențelor înalte și foarte înalte sînt voltmetrele electronice, a căror descriere iese din cadrul acestei lucrări.

Exemplul 15-3. Să se calculeze valoarea rezistenței adiționale necesare unui voltmetru de 120 V, care să permită măsurarea unei tensiuni de 540 V. Rezistența interioară a voltmetrului este $R_V = 5\,200\ \Omega$.

Soluția: Se aplică relația (15-12), în care $n = \dfrac{540}{120} = 4{,}5$.

$$R_a = 5\,200\,(4{,}5 - 1) = 18\,200\,\Omega.$$

15-13. Măsurarea rezistențelor prin metoda voltmetrului și a ampermetrului

Această metodă, cunoscută și sub denumirea de *metoda tensiunii și a curentului*, se aplică atunci cînd nu se urmărește o mare precizie. Ea rezultă din legea lui Ohm, rezistența necunoscută fiind dată de relația

$$R_x = \frac{U}{I}, \qquad (15\text{-}13)$$

în care U este tensiunea aplicată rezistenței, iar I, intensitatea curentului care trece prin rezistență.

După cum legăm voltmetrul, înainte sau după ampermetru, metoda prezintă două variante, arătate în fig. 15-23 *a* și *b*, cunoscute sub numele de *montaj amonte* și *montaj aval*.

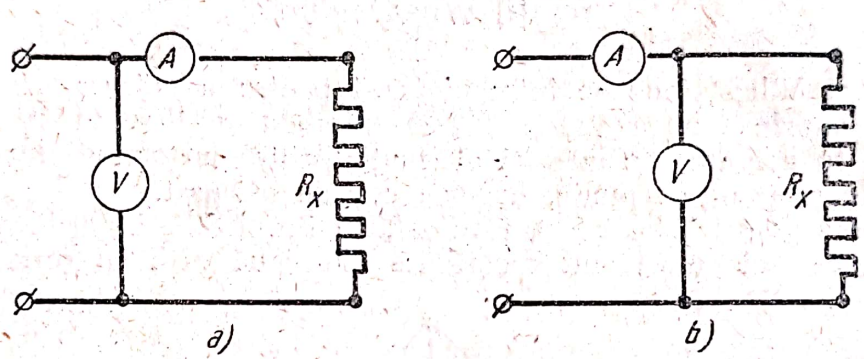


Fig. 15-23. Montajul voltmetrului în *a*) amonte, *b*) aval

Dacă notăm cu I curentul în ampermetru, I_V curentul în voltmetru, R_A și R_V rezistențele ampermetrului voltmetrului, U tensiunea dată de voltmetru și R_x rezistența căutată, montajul amonte (fig. 15-20 *a*) ne dă

$$R_x = \frac{U}{I} - R_A = \frac{U - R_A I}{I}. \qquad (15\text{-}14)$$

Urmează că dacă aplicăm formula (15-13), va rezulta o rezistență ceva mai mare decît cea reală, dată de relația (15-14). Eroarea relativă este cu atît mai mică, cu cît rezistența ampermetrului este mai mică și cu cît rezistența de măsurat R_x este mai mare.

Montajul aval (fig. 15-23 b) ne dă

$$R_x = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}, \qquad (15\text{-}15)$$

adică dacă aplicăm formula (15-13), rezistența obținută va fi ceva mai mică decît cea reală, dată de relația (15-15). Eroarea relativă este cu atît mai mică, cu cît rezistența voltmetrului este mai mare și cu cît rezistența de măsurat este mai mare.

Dacă rezistența ampermetrului este neglijabilă sau rezistența voltmetrului destul de mare, cum se întîmplă de obicei, valorile date de relația (15-13) sînt destul de precise.

Scanned with OKEN Scanner

Cînd cunoaștem rezistențele R_A și R_V ale aparatelor de măsură, se aplică oricare din cele două metode și valorile obținute pentru rezistențele de măsurat, aplicînd formula (15-14) respectiv (15-15), sînt cele reale.

Cînd nu cunoaștem rezistențele R_A și R_V, pentru a obține cu relația (15-13) o valoare a rezistenței de măsurat cît mai aproape de valoarea reală, rezistențele mari se vor măsura cu montajul amonte, iar cele mici cu montajul aval.

Cînd avem de măsurat rezistența izolației unei instalații de înaltă tensiune, de pildă a unui cablu, aplicăm metoda voltmetrului și a ampermetrului cu montajul amonte. Alimentarea se face în curent continuu.

15-14. Măsurarea rezistențelor prin metoda punții Wheatstone

Puntea Wheatstone se întrebuințează pentru a măsura, cu precizie, rezistențe cuprinse între 1 Ω și 1 MΩ. Metoda se bazează pe anularea curentului în aparatul de măsură al punții pentru un anumit raport între rezistențele montate în punte, inclusiv cea de măsurat.

Schema punții Wheatstone este dată în fig. 15-24. Laturile R_a și R_b ale patrulaterului punții sînt constituite din două cutii cu rezistențe re-

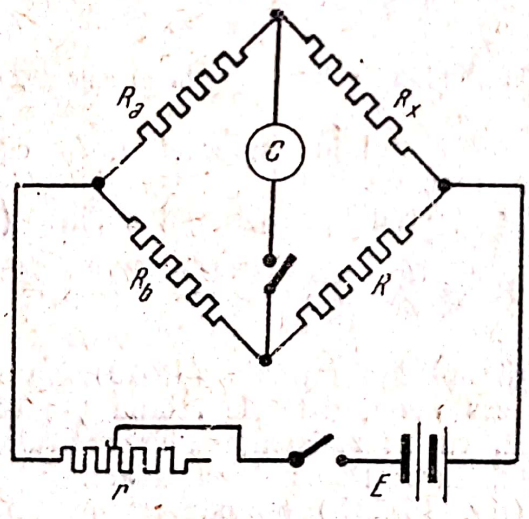


Fig. 15-24. Schema de montaj a punții Wheatstone

glabile, cu fișe, de 1 + 10 + 100 + 1000 Ω. Latura R reprezintă o rezistență de comparație care poate fi variată de la 1-10 000 Ω. Latura R_x este constituită din rezistența de măsurat. Pe una din diagonalele patrulaterului este montat un galvanometru G de mare sensibilitate (10^{-7}-10^{-9} A pe milimetru de scară). Pe a doua diagonală se montează sursa de curent, a cărei tensiune se ia obișnuit de 1,5-4 V (pile sau acumulatoare), în serie cu un reostat cu cursor r, pentru limitarea curentului în montaj.

Să notăm cu i_a, i_b, i_R și i_x curenții care trec respectiv prin laturile R_a, R_b, R și R_x ale punții și cu i_0 curentul prin galvanometru.

Pentru un anumit raport $\frac{R_a}{R_b}$, se variază rezistenţa R pînă cînd prin galvanometru nu mai trece nici un curent ($i_0 = 0$). În acez caz, avem

$$i_a = i_x, \quad i_b = i_R,$$

$$i_a R_a = i_b R_b \quad \text{şi} \quad i_a R_x = i_b R;$$

de unde scoatem

$$\frac{R_x}{R_a} = \frac{R}{R_b}$$

sau

$$R_x = R\frac{R_a}{R_b}. \qquad (15\text{-}16)$$

Precizia măsurătorilor cu puntea lui Wheatstone este de circa 0,5%.

15-15. Măsurarea tensiunii, curentului şi rezistenţei prin metoda compensării (metoda potenţiometrică)

Măsurarea curentului, tensiunii şi rezistenţelor cu ajutorul aparatelor de măsură respective (aparatele indicatoare) poate fi efectuată, în cel mai bun caz, cu o precizie de 0,2%. De asemenea, măsurarea rezistenţelor cu ajutorul punţii nu asigură, în toate cazurile, precizia necesară.

Pentru a realiza, în toate aceste măsurători, o foarte mare precizie, se utilizează *metoda compensării,* în care mărimea de măsurat este comparată cu mărimi etalon: cu rezistenţe etalon şi cu elemente normale internaţionale Weston (vezi par. 4-5).

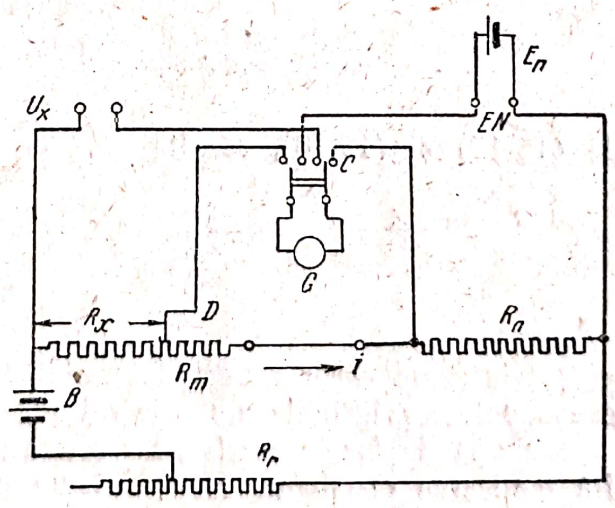


Fig. 15-25. Schema de principiu a montajului pentru măsurarea tensiunii prin metoda compensării

Metoda compensării este cunoscută şi sub numele de *metoda de opoziţie* sau *metoda potenţiometrică,* iar ansamblul dispozitivelor de măsurat care intră în schema acestei metode poartă numele de *potenţiometru.*

a) Măsurarea f.e.m. şi a tensiunilor. În fig. 15-25 este reprezentată cea mai răspîndită schemă de potenţiometru de curent continuu, cu care

se măsoară f.e.m. și tensiunile. Schema conține o sursă B de curent continuu, formată dintr-o baterie de acumulatoare sau de elemente galvanice, care alimentează, prin intermediul unui reostat reglabil R_r, rezistența etalon R_n și rezistența de reglaj (rezistența de măsurare) cunoscută R_m. La bornele U_x se montează elementul a cărei f.e.m. E_x trebuie măsurată, iar la bornele EN, un element normal a cărui f.e.m. este cunoscută precis. Un galvanometru de mare sensibilitate G poate fi conectat, prin intermediul comutatorului C, fie în circuitul elementului normal, fie în circuitul a cărui f.e.m. sau tensiune trebuie măsurată.

Metoda se aplică precum urmează.

Se determină, mai întîi, valoarea curentului de funcționare a potențiometrului. În acest scop, se conectează galvanometrul pe circuitul elementului etalon și se variază rezistența R_r pînă cînd galvanometrul indică zero, cînd avem

$$IR_n = E_n ,$$

de unde

$$I = \frac{E_n}{R_n} . \qquad (15\text{-}17)$$

După stabilirea curentului I, se conectează galvanometrul în circuitul f.e.m. de măsurat E_x și, fără a schimba intensitatea acestui curent, se aduce din nou la zero prin reglajul rezistenței R_m pînă la valoarea R_x, cînd putem scrie

$$IR_x = E_x . \qquad (15\text{-}18)$$

Din relațiile (15-17) și (15-18), rezultă

$$E_x = E_n \frac{R_x}{R_n} . \qquad (15\text{-}19)$$

Rezistențele R_x și R_n, al căror raport determină valoarea f.e.m. măsurate, constituie elementele principale ale oricărui potențiometru. Ambele aceste rezistențe trebuie să fie foarte precise, iar construcția rezistenței R_m trebuie să permită realizarea rezistenței R_x printr-un reglaj foarte fin și în limite foarte largi. Rezistența de reglaj R_r și galvanometrul constituie elementele auxiliare ale potențiometrului și pot face parte din el sau pot fi diferite de el.

Metoda compensării are avantajul că nu necesită, în momentul măsurării, nici un curent de la sursa a cărei f.e.m. o măsurăm care să provoace în această sursă vreo cădere de tensiune.

În fig. 15-26 este reprezentată schema unui *potențiometru* sau *compensator* realizat practic după schema precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

b) **Măsurarea intensității curentului.** Măsurarea curentului cu ajutorul potențiometrului se face folosind schema de montaj din fig. 15-27.

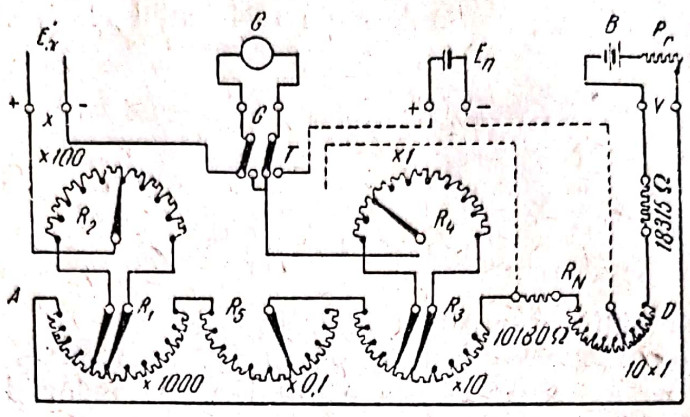


Fig. 15-26. Schema unui potențiometru

În circuitul al cărui curent trebuie să fie măsurat se conectează o rezistență etalon R_0 și se măsoară, cu ajutorul potențiometrului, căderea de tensiune la bornele ei. Dacă notăm cu U această cădere de tensiune, avem

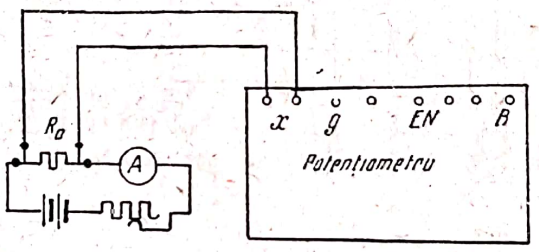


Fig. 15-27. Schema de măsurare a intensității curentului cu ajutorul potențiometrului

$$I = \frac{U}{R_0}.$$

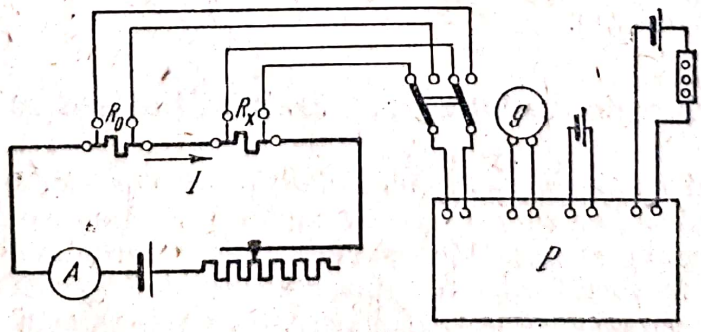


Fig. 15-28. Schemă pentru măsurarea rezistențelor cu ajutorul potențiometrului

c) **Măsurarea rezistențelor.** Pentru măsurarea rezistențelor cu ajutorul potențiometrului se utilizează montajul din fig. 15-28.

Rezistența de măsurat R_x se leagă în serie cu o rezistență etalon R_0, egală cu ea sau foarte apropiată, și se stabilește, în circuitul lor, un curent I. Se măsoară apoi, pe rînd, cu ajutorul potențiometrului, căderile de tensiune U_x și U_0 la bornele rezistenței R_x și R_0.

Vom avea

$$U_x = R_x I \quad \text{și} \quad U_0 = R_0 I ,$$

de unde

$$R_A = R_0 \cdot \frac{U_x}{U_0} .$$

Metoda prezintă o precizie pînă la 0,002%.

d) **Etalonarea și verificarea aparatelor de măsură.** Potențiometrele sînt utilizate, pe scară întinsă, la etalonarea aparatelor de măsură: voltmetre, ampermetre, wattmetre.

În fig. 15-29 este reprezentată schema de montaj pentru verificarea

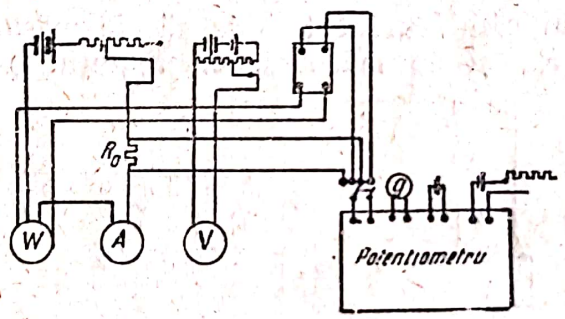


Fig. 15-29. Schemă pentru verificarea wattmetrului cu ajutorul potențiometrului

unui wattmetru (vezi par. 15-21). Se măsoară, pe rînd, intensitatea curentului și tensiunea prin metodele descrise mai sus, obținîndu-se astfel puterea care se compară cu aceea indicată de aparat.

Metoda potențiometrică se utilizează și în curent alternativ, cu ajutorul *potențiometrelor de curent alternativ*. Precizia ei este însă cu mult mai redusă decît în curent continuu, din cauza lipsei, în curent alternativ, a unui etalon de f.e.m.

15-16. Controlul izolației unei instalații aflate sub tensiune

În curent continuu controlul izolației rețelelor sub tensiune, în condițiile de exploatare, se execută cu ajutorul a două voltmetre montate așa cum se arată în fig. 15-30. Cînd izolația instalației este normală, indicațiile celor două voltmetre sînt aceleași și egale cu jumătatea tensiunii de serviciu a rețelei. Dacă rezistența de izolație a unuia din conductoarele liniei scade, odată cu ea scade și tensiunea indicată de voltmetrul respectiv, în timp ce tensiunea de la bornele celuilalt voltmetru crește.

Cînd avem de-a face cu o instalație de curent alternativ trifazat (o rețea trifazată) a cărei izolație trebuie controlată, voltmetrele se mon-

tează după schema reprezentată în fig. 15-31. Dacă izolația celor trei conductoare este perfectă, indicațiile voltmetrelor sînt aceleași și egale cu tensiunea pe fază a rețelei. Dacă rezistența de izolație a unuia din conductoare scade, odată cu ea scade și tensiunea indicată de voltmetrul respectiv, crescînd simultan tensiunile indicate de celelalte două voltmetre.

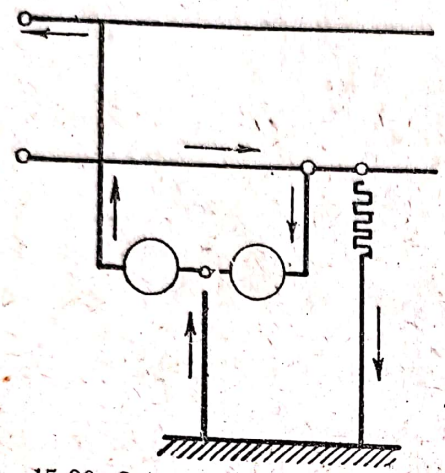


Fig. 15-30. Schema de montaj a voltmetrelor pentru controlul izolației unui circuit de curent continuu

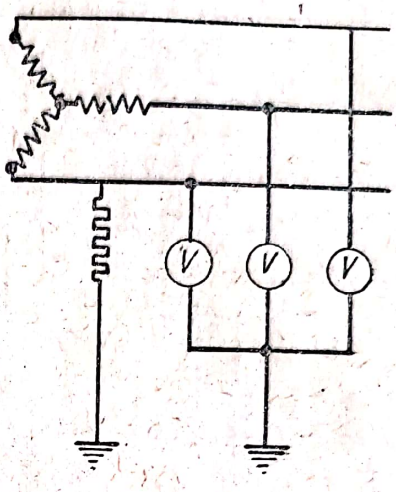


Fig. 15-31. Schema de montaj a voltmetrelor pentru controlul izolației unui circuit trifazat

În rețelele de înaltă tensiune, voltmetrele cu care controlăm starea izolației sînt legate la rețea prin intermediul unor transformatoare de tensiune.

Acest control al izolației rețelelor cu ajutorul voltmetrelor permite o supraveghere continuă a stării acestei izolații. El constituie un sistem simplu și practic de control, de aceea este foarte răspîndit.

În practică, pentru a înlesni supravegherea, în schemele redate mai sus sînt montate și dispozitive de semnalizare optică sau acustică care acționează automat de îndată ce rezistența izolației unuia dintre conductoare lasă de dorit.

15-17. **Ohmmetrul**

Ohmetrele sînt aparate cu care putem măsura direct mărimea unei rezistențe. Ele sînt prevăzute cu milivoltmetre etalonate direct în ohmi.

Indicațiile acestor aparate depinzînd de valoarea f.e.m. a sursei de curent care le alimentează echipajul mobil, precizia lor nu poate fi asigurată decît atunci cînd li se aplică o sursă de curent cu f.e.m. riguros constantă.

Se poate evita acest neajuns dacă se utilizează dispozitivul din fig. 15-33, numit *logometru*. Într-un logometru echipajul mobil al aparatului de măsurare este format din două bobine, fixate pe același ax și decalate una față de cealaltă cu 90°. Echipajul mobil se mișcă între polii unui magnet permanent. Curenții sînt aduși în bobinele echipajului mobil prin conductoare foarte flexibile care, practic, nu creează vreun cuplu rezistent. Neavînd nici un arc spiral care să creeze cuplul rezistent, echipajul mobil al

aparatului de măsură se găsește în stare de echilibru indiferent, putînd să ocupe, cînd bobinele nu sînt parcurse de curent, orice poziție.

Una din bobinele echipajului mobil este legată în serie cu o rezistență adițională R_a, iar cealaltă bobină se leagă în serie cu rezistența R_x pe care

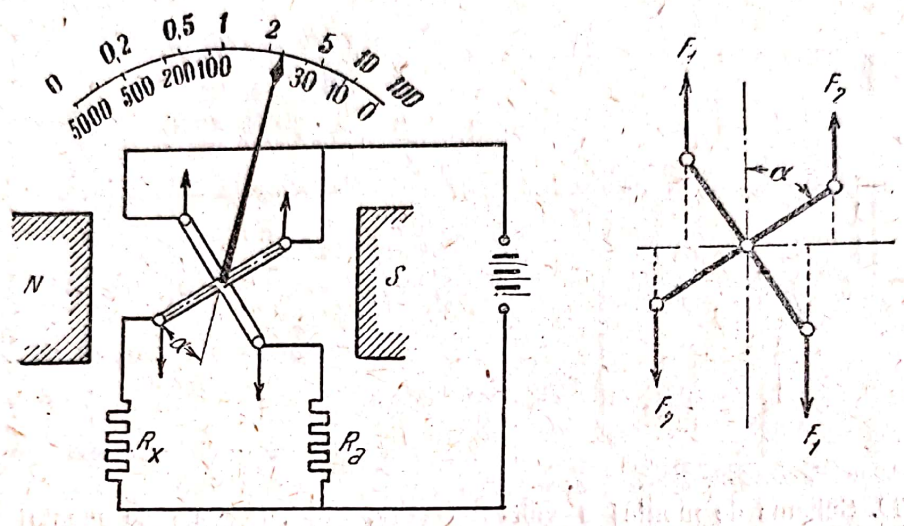


Fig. 15-32. Schema de construcție a ohmmetrului

ne propunem să o măsurăm. Ansamblul celor două bobine, împreună cu rezistențele R_a și R_x legate în serie cu ele, constituie două circuite în paralel, supuse tensiunii U a sursei de alimentare.

Intensitatea curentului care parcurge prima bobină este dată de relația

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_a} = k_1 U ,$$

în care $k_1 = \frac{1}{R_1 + R_a}$ este o constantă (R_1 este rezistența bobinei). De asemenea, intensitatea din bobina a doua, în cazul cînd rezistența R_2 a acestei bobine este neglijabilă față de rezistența necunoscută R_x, este dată de relația

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + R_x} \approx \frac{U}{R_x} .$$

Sub acțiunea cîmpului magnetic, cele două bobine, parcurse de curenții I_1 și I_2, sînt supuse fiecare cîteunui cuplu dat, respectiv, de relațiile

$$M_1 = C_1 I_1 = C_1 k_1 U$$

și

$$M_2 = C_2 I_2 = C_2 \frac{U}{R_x} ,$$

în care C_1 și C_2 sînt doi coeficienți de proporționalitate care depind de poziția bobinelor în cîmpul magnetic, deci sînt funcții de unghiul α de depla-

stare a sistemului mobil. După cum rezultă din figură, cele două cupluri sînt îndreptate în sens opus.

Bobinele fiind legate solidar între ele, sub influența acestor cupluri motoare echipajul mobil al aparatului se rotește pînă cînd cele două cupluri devin egale, adică

$$M_1 = M_2$$

sau

$$C_1 k_1 U = C_2 \frac{U}{R_x} ;$$

de unde

$$\frac{C_2}{C_1} = k_1 R_x . \qquad (15\text{-}20)$$

Din relația (15-20) rezultă, în primul rînd, că deviația echipajului mobil al aparatului este funcție de rezistența R_x, adică

$$\alpha = f(R_x) \qquad (15\text{-}21)$$

și, prin urmare, scara aparatului poate fi etalonată direct în ohmi. Tot din relația (15-20) mai rezultă că înregistrarea aparatului, adică valoarea obținută pentru rezistența măsurată nu depinde de valoarea tensiunii aplicate.

Faptul că schema constructivă a acestui ohmetru nu pretinde o tensiune de alimentare a circuitelor echipajului mobil perfect constantă, permite adoptarea unei surse de f.e.m. produse cu ajutorul unui inductor cu

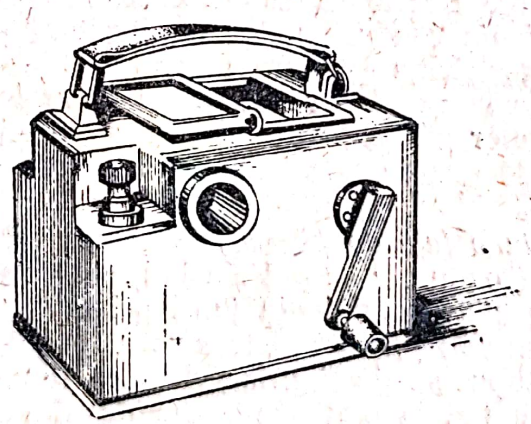


Fig. 15-23. Aspectul exterior al unui ohmmetru cu inductor

manivelă și în acest caz aparatul poartă numele de *ohmmetru cu inductor* (fig. 15-33). Inductorul este un mic generator de curent continuu cu polii formați de un magnet permanent, al cărui indus este învîrtit cu mîna.

Dacă scara ohmmetrului este etalonată în megohmi ($1\ M\Omega = 10^{-6}\ \Omega$) aparatul pe nume*ș*te *megohmmetru*. Cu asemenea aparate se măsoară rezistențe foarte mari, a căror valoare depășește $1\ M\Omega$. Asemenea rezistențe sînt, în general, rezistențele de izolație ale instalațiilor, ale cablurilor etc.

Oricare ar fi principiul lor de construcție și de funcționare, ohmmetrele sînt, în general, aparate neprecise. Ele se întrebuințează în ateliere, rețele și oriunde voim să executăm o măsurătoare rapidă, în care precizia nu contează prea mult.

15-18. Noțiuni și definiții privitoare la punerea la pămînt

Prin *punere la pămînt* se înțelege legarea cu pămîntul a părților metalice ale instalațiilor electrice care, în mod normal, nu se găsesc sub tensiune, dar care, printr-un contact accidental cu conductoarele din aproapiere, ar putea fi puse sub tensiune.

Punerea la pămînt se face în scop de securitate, pentru a proteja oamenii contra pericolului de electrocutare cînd ei ating părțile metalice ale instalațiilor care se găsesc accidental sub tensiune. În acest caz, avem o *punere la pămînt de protecție.*

Punerea la pămînt poate fi necesară însă și din motive de exploatare, pentru a asigura instalațiilor electrice o bună funcționare în condiții normale și anormale de lucru și, în acest caz, ea se numește *punere la pămînt de exploatare.*

Se numește *priză de pămînt,* unul sau mai multe conductoare metalice, puse în contact cu solul, al căror rol este de a constitui legătura electrică cu pămîntul.

Legătura dintre elementele instalației electrice care se pune la pămînt și priza de pămînt se face prin intermediul *conductoarelor de legătură la priză.*

Ansamblul format din priza de pămînt și conductoarele de legătură la priză constituie dispozitivul de punere la pămînt al instalației. Acest dispozitiv are o anumită rezistență numită *rezistență de punere la pămînt* care constă din rezistența conductoarelor de legătură cu priza, rezistența prizei de pămînt și rezistența pe care pămîntul o opune trecerii curentului de la priză la pămînt și care se numește *rezistență de scurgere.* Rezistența conductoarelor de legătură și cea a prizei fiind neglijabile, rezultă că rezistența de punere la pămînt este practic egală cu rezistența de scurgere.

Se numește *tensiune față de pămînt,* tensiunea între o parte oarecare a instalației electrice (conductor, corpul mașinii, echipamentul electric, priza de pămînt etc.) și punctele solului din jurul prizei de pămînt.

Să examinăm cum se repartizează tensiunea în jurul prizei de pămînt. În acest scop, să presupunem două prize A și B, constituite din țevi metalice îngropate în pămînt, la o distanță una de alta de cel puțin 40 m (fig. 15-34 *a*), între care se aplică o tensiune U. Prin prize și pămînt va circula un curent I_p.

Dacă se leagă priza A la una din bornele unui voltmetru cu rezistență interioară foarte ridicată, de pildă un voltmetru electrostatic, iar cealaltă bornă a voltmetrului se leagă la pămînt prin intermediul unei sonde de oțel, se poate obține, prin deplasarea sondei, curba de tensiune de-a lungul distanței dintre cele două prize de pămînt. Această curbă a fost reprezentată în fig. 15-34 *b.*

Din examinarea curbei se constată că în apropierea prizei A, de intrare a curentului în pămînt, tensiunea scade brusc și apoi din ce în

ce mai puțin, pentru a deveni constantă dincolo de o distanță $AD = 20$ m de la această priză. Tensiunea rămîne apoi constantă pînă în punctul C, aflat la o distanță de 20 m de priza B, după care începe din nou să

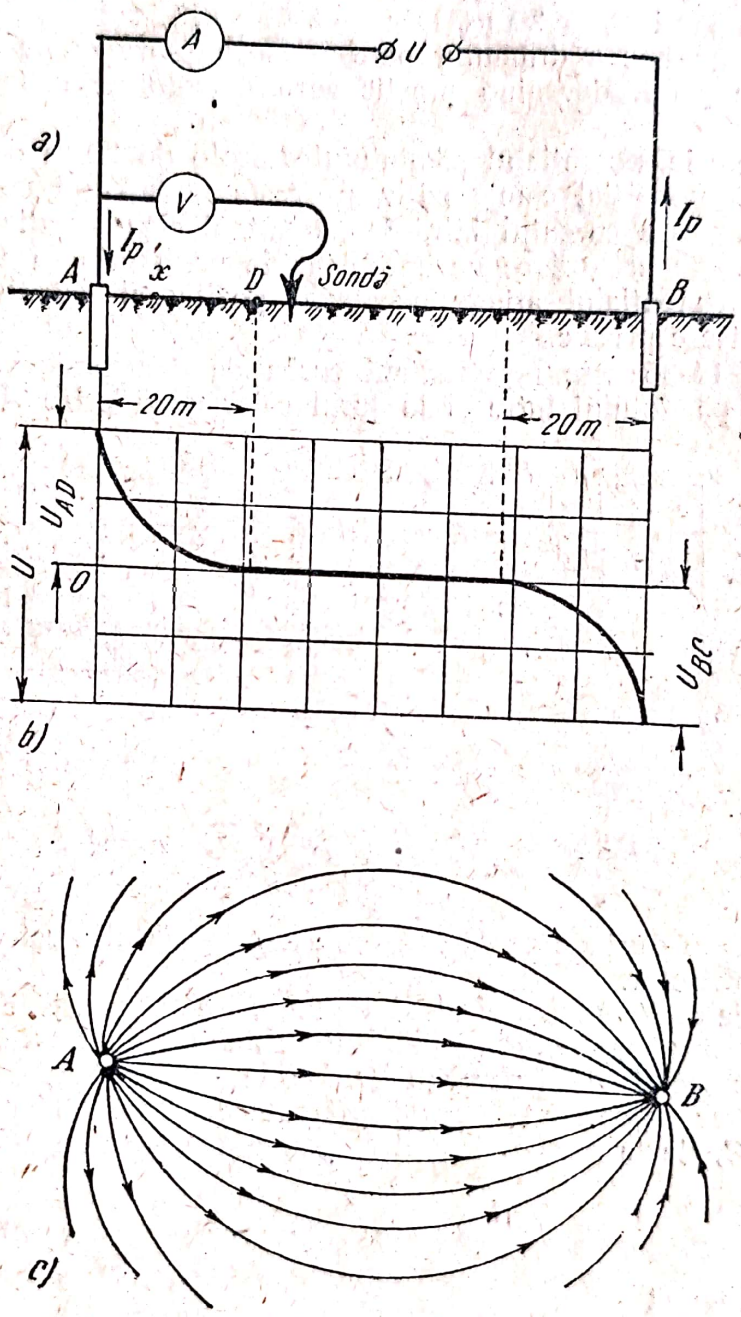


Fig. 15-34. Distribuția potențialelor între două prize de pămînt, la suprafața solului

scadă, mai întîi încet, apoi din ce în ce mai repede pe măsură ce ne apropiem de priza B.

Această variație a tensiunii de-a lungul distanței dintre cele două prize, care poartă numele de *distribuția potențialelor* între cele două prize, se explică precum urmează.

Curentul I_a care intră prin priza A în pământ, se împrăștie în jurul acestei prize scurgîndu-se de-a lungul liniilor de curent arătate în fig. 15-34 *c*. Pe măsură ce ne depărtăm de priză, curentul trece prin secțiuni de pământ din ce în ce mai mari și densitatea lui scade, devenind practic zero la distanța $A\,D = 20$ m. Din această cauză căderea de tensiune pe unitatea de lungime a drumului parcurs se micșorează pe măsură ce ne depărtăm de priză, devenind practic zero dincolo de distanța de 20 m de la priză.

În concluzie, potențialul pământului dincolo de 20 m de o priză este zero și acest potențial este pozitiv și crește pe măsură ce ne apropiem de priza prin care curentul intră în pământ și este negativ și scade sub valoarea zero pe măsură ce ne apropiem de priza prin care curentul iese din pământ. Potențialul atinge maximum pozitiv și negativ în punctele în care se găsesc prizele.

În fig. 15-35 este reprezentată curba de distribuție a potențialelor la suprafața pământului între și în jurul celor două prize A și B. Forma

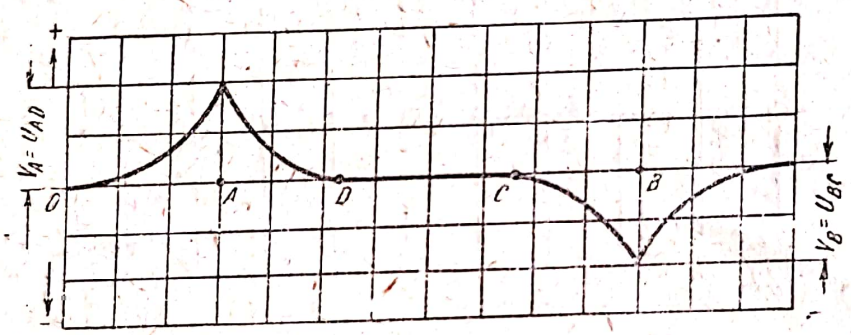


Fig. 15-35. Curba de distribuție a potențialelor la suprafața solului

acestei curbe nu depinde de curent, ci numai de sensul acestuia și de forma și așezarea prizelor.

Potențialul V_A al prizei A și V_B al prizei B poartă numele de potențial total sau maxim. Potențialul V_A este dat de diferența de potențial dintre punctul A și punctul D, de la care potențialele pământului devin zero, iar potențialul V_B, de diferența de potențial dintre punctul B și punctul C, de la care potențialele pământului devin zero. Prin urmare

$$V_A = U_{AD} \quad \text{și} \quad V_B = U_{BC}$$

Observăm că

$$V_A - V_B = U_{AB} - U_{BC} = U_{AB} + U_{CA} = U\,,$$

în care U este tensiunea aplicată între prize.

În aceste condiții, prin rezistența de punere la pământ (rezistența de scurgere) a unei prize, se înțelege rezistența pe care o întîmpină curentul în întreg stratul de pământ în contact cu priza respectivă și căreia îi corespunde căderea de tensiune (potențialul) prizei.

Prin urmare, valoarea rezistenței primei puneri la pământ este

$$r_{pA} = \frac{U_{AD}}{I_p} = \frac{V_A}{I_p} ,$$

iar a celei de a doua

$$r_{pB} = \frac{U_{BC}}{I_p} \; 1 = \frac{V_B}{I_p} .$$

Rezultă că atunci cînd cunoaștem prin măsurare rezistența unei puneri la pămînt și curentul care trece prin priză, se pot calcula, cu relațiile

$$V_A = r_{pA} \, I_p \quad \text{și} \quad V_B = r_{pB} \, I_p ,$$

potențialele prizelor respective.

15-19. Tensiunea de atingere și tensiunea de pas a unei prize de pământ

În fig. 15-36 este reprezentată curba de distribuție a potențialului prizei de punere la pământ a unei instalații de motoare electrice, în ipoteza că izolația unuia din motoare a fost străpunsă.

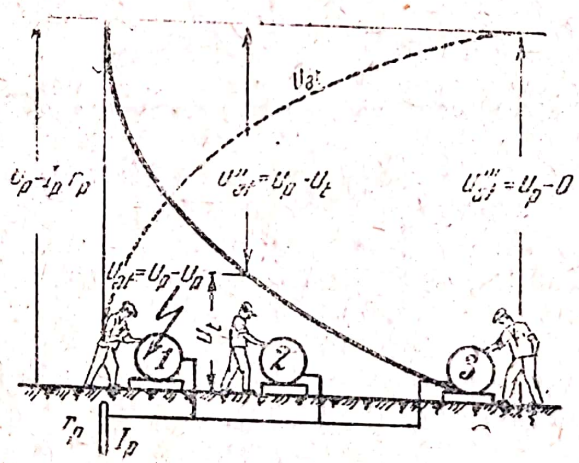


Fig. 15-36. Tensiunea de atingere

Priza de pământ și corpurile motoarelor electrice legate cu ea vor avea, față de pământ, un potențial dat de relația

$$V_p = r_p \cdot I_p = U_p ,$$

în care r_p este rezistența prizei, iar I_p curentul care circulă prin priză.

Un om care atinge corpul unuia din motoare (străpuns sau nu) ia potențialul prizei de pământ V_p. Picioarele omului vor avea potențialul solului din punctul în care el se găsește și care depinde de distanța acestui punct față de priza de pământ. Să notăm V_d acest potențial. În consecință, omul este supus acțiunii unei diferențe de potențial $U_{pd} = V_p - V_d$. Această diferență de potențial care apare între două puncte ale circuitului

de punere la pămînt pe care le poate atinge simultan omul, poartă numele de *tensiune de atingere* și se notează cu U_{at}.

Tensiunea de atingere crește pe măsura depărtării de priza de pămînt și atinge valoarea maximă, egală cu U_p, la o distanță de 20 m de priză, după care ea rămîne constantă.

Un om care ar atinge motorul electric *1* va avea atît mîinile cît și picioarele la același potențial V_p și tensiunea de atingere

$$U_{at} = V_p - V_p = 0 \ ,$$

va fi în acest caz zero.

Dacă omul ar atinge motorul *3* aflat la 20 m de priză, el va fi supus unei tensiuni

$$U_{at} = V_p - V_0 = U_p \ ,$$

egală cu tensiunea prizei de pămînt.

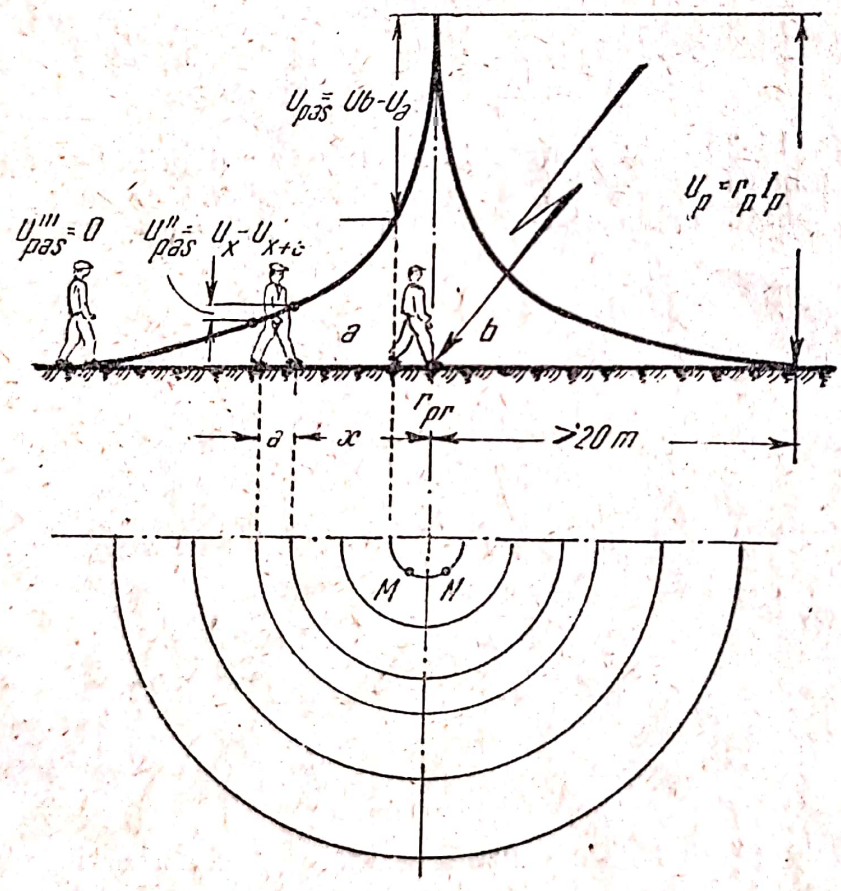


Fig. 15-37. Tensiunea „de pas" (tensiunea pasului)

În cazul general, al motorului 2 care se găsește la o depărtare x de priza de pămînt ($x < 20$ m), tensiunea de atingere va avea ca valoare

$$U_{at} = \alpha U_p \ ,$$

în care coeficientul $\alpha < 1$ se numește *coeficient de atingere*.

Variația tensiunii de atingere în raport cu distanța față de priza de pămînt este reprezentată în fig. 15-36 prin curba în linie întreruptă.

Valoarea limită admisibilă a tensiunii de atingere nu trebuie să depăşească 40 V pentru încăperi industriale şi 250 V pentru instalaţii de distribuţie, unde există şi alte măsuri de securitate.

În fig. 15-37 este reprezentată curba de distribuţie a potenţialului punerii la pămînt a unuia din conductoarele unei reţele electrice.

Tensiunea faţă de pămînt a punctului de contact este dată de relaţia

$$U_p = r_p I_p \quad ,$$

în care r_p este rezistenţa la scurgere în locul de contact.

Cercurile concentrice din figură, cu centrul în punctul de contact, sînt cercuri echipotenţiale. Cercul cu raza de 20 m corespunde potenţialului zero, iar cercul cu raza zero, potenţialului $V_p = U_p$.

Un om care stă cu picioarele pe puncte ale solului cu potenţiale diferite este supus acţiunii diferenţei de potenţial dintre aceste puncte. Această diferenţă de potenţial se numeşte *tensiunea de pas* sau *tensiunea pasului*.

După cum rezultă din figura 15-37, tensiunea de pas este cu atît mai mare, cu cît omul se apropie mai mult de locul contactului cu pămîntul şi ea scade la zero cînd distanţa de locul contactului depăşeşte 20 m.

Tensiunea de pas poate fi redusă la zero chiar în apropierea imediată a locului de contact, dacă omul se găseşte cu picioarele pe acelaşi cerc echipotenţial (de exemplu în punctele M şi N din fig. 15-37).

15-20. Măsurarea rezistenţelor de punere la pămînt

Valoarea rezistenţei unei puneri la pămînt nu trebuie să depăşească anumite limite, determinate pentru fiecare instalaţie în parte, pentru ca protecţia deservirii instalaţiei să fie asigurată şi ca întreaga instalaţie să funcţioneze în condiţiile pentru care a fost proiectată.

Deoarece rezistenţa punerii la pămînt a unei instalaţii poate varia din diferite cauze, între care menţionăm starea timpului (umed sau uscat), anotimpul etc., în exploatarea unei instalaţii puse la pămînt este necesar ca rezistenţa de punere la pămînt să fie măsurată periodic.

Măsurarea rezistenţelor de punere la pămînt se face numai cu ajutorul curentului alternativ, curentul continuu producînd în jurul prizelor fenomene de electroliză care denaturează rezultatele măsurării.

Rezistenţele de punere la pămînt pot fi măsurate prin diferite metode, dintre care vom examina metoda ampermetrului şi a voltmetrului şi metoda punţii Wheatstone.

Schema de conexiuni a primei metode este arătată în fig. 15-38.

Între priza de pămînt A, a cărei rezistenţă trebuie măsurată, şi o priză auxiliară B se conectează înfăşurarea secundară a unui transformator electric, al cărui primar este alimentat de reţeaua locală de distribuţie. Se măsoară, cu ajutorul unui ampermetru, curentul de pămînt I_p şi, cu ajutorul unui voltmetru conectat între priza de pămînt A şi o sondă care se găseşte în zona de potenţial zero, tensiunea U_A a prizei. Rezistenţa prizei este dată de relaţia

$$r_{pA} = \frac{U_A}{I_p} \quad .$$

Pentru a se reduce la minimum eroarea măsurării, trebuie ca rezistența voltmetrului să fie mult mai mare decît rezistența de contact a sondei. De aceea se utilizează, de preferință, voltmetre electrostatice.

Metoda aceasta este aplicată, în special, pentru măsurarea rezistențelor mici de punere la pământ.

În metoda punții lui Wheatstone se atilizează o *punte cu fir* (fig. 15-39). Într-o asemenea punte, două din laturile punții obișnuite din fig. 15-24, și anume latura R_b și R, sînt înlocuite printr-un fir unic, cali-

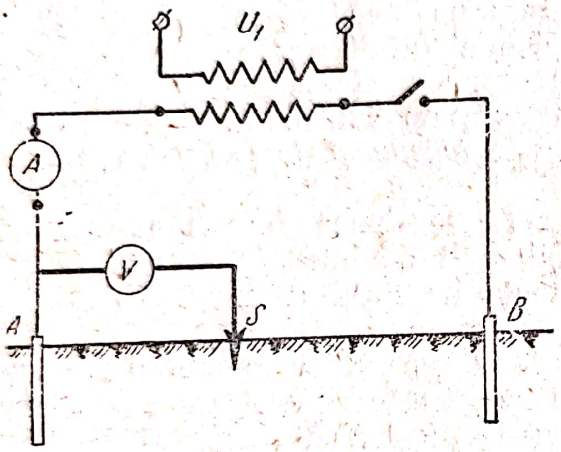


Fig. 15-38. Schema pentru măsurarea rezistenței de punere la pământ prin metoda ampermetrului și a voltmetrului

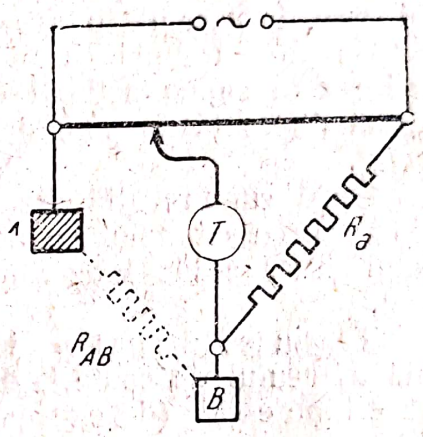


Fig. 15-39. Schema de principiu a montajului punții cu fir pentru determinarea rezistenței prizei de pământ

brat, de rezistență totală constantă, de-a lungul căruia se deplasează un cursor legat la unul din capetele diagonalei patrulaterului punții pe care este montat aparatul de măsurat. În aceste condiții raportul $\frac{R}{R_b}$ din relația (15-16) poate fi înlocuit prin raportul dintre lungimile celor două porțiuni ale firului calibrat. Celelalte două ramuri ale punții sînt formate, una din rezistența dintre priza A și o priză auxiliară oarecare, de pildă o priză B, iar cealaltă dintr-o rezistență de compensație R_a.

Puntea fiind alimentată de la o sursă de curent alternativ, galvanometrul trebuie înlocuit printr-un telefon sau printr-un aparat electrodinamic de precizie.

Echilibrul punții se obține prin deplasarea cursorului de-a lungul firului calibrat. În momentul echilibrului, sunetul emis de telefon dispare sau indicația aparatului electrodinamic este zero.

Pentrue efectuarea lucrării este necesară prezența a două prize auxiliare, notate în fig. 15-40 cu B și C.

Modul de lucru este arătat în fig. 15-40.

Se echilibrează puntea și se determină rezistența r_{AB} dintre prizele A și B. Se determină apoi rezistența r_{AC} dintre prizele A și C și, în fine,

rezistenţa r_{CA} dintre prizele C şi B. Notînd cu r_A, r_B şi r_C rezistenţele de punere la pămînt a celor trei prize, se poate scrie

$$r_{AB} = r_A + r_B \ ;$$
$$r_{AC} = r_A + r_C \ ;$$
$$r_{CB} = r_C + r_B \ .$$

Adunînd primele două egalităţi şi scăzînd, din suma obţinută, egalitatea a treia, obţinem valoarea căutată a rezistenţei prizei A

$$r_A = \frac{r_{AB} + r_{AC} - r_{BC}}{2} \ .$$

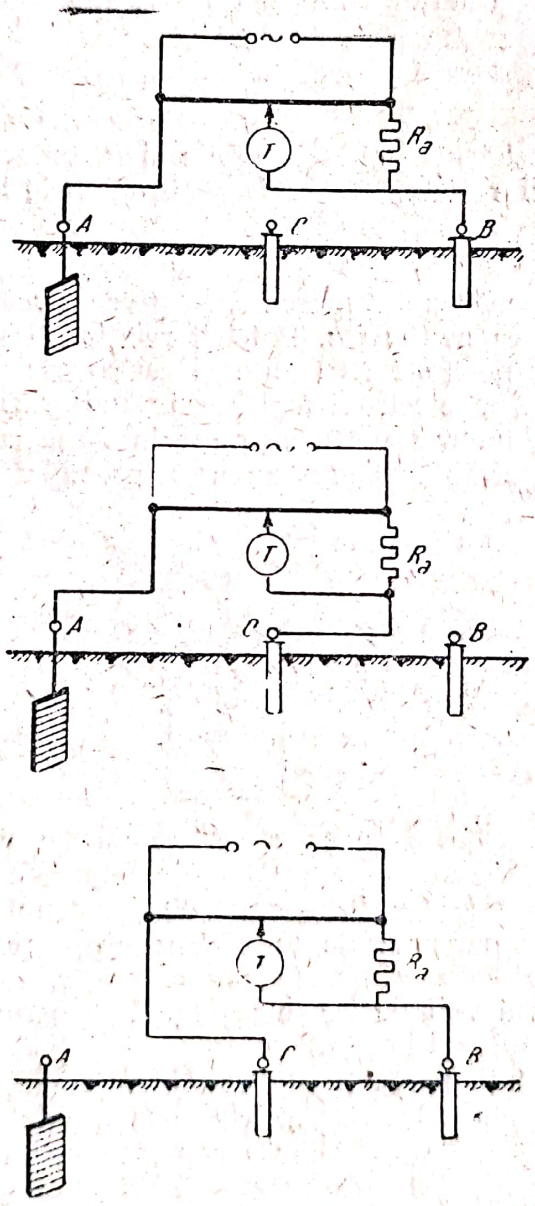


Fig. 15-40. Măsurarea rezistenţei unei prize de pămînt cu puntea cu fir şi două prize auxiliare

Metoda dă rezultate bune numai cînd rezistenţa de punere la pămînt respectivă are o valoare care depăşeşte 1 Ω.

15-21. Măsurarea puterilor în curent continuu

În general, puterile electrice pot fi măsurate cu aparatele numite *wattmetre* care indică direct valoarea puterii.

Dintre sistemele de aparate examinate, pot fi folosite ca wattmetre aparatele construite pe principiul electrodinamic. Într-adevăr, să presupunem că în aparatul reprezentat în fig. 15-10 bobina fixă este legată în serie cu circuitul, deci este parcursă de curentul principal, iar bobina mobilă este legată în derivație cu circuitul, la cele două fire ale distribuției, deci este parcursă de un curent proporțional cu tensiunea circuitului. Cuplul motor al aparatului va fi dat de relația

$$M_m = k_1 I i = k_1 I \frac{U}{R_b} = k_1' I U = k_1' P \ ,$$

în care R_b este rezistența bobinei mobile și P, puterea electrică care trece prin circuit. Cuplul rezistent fiind $M_2 = k_2 \alpha$, la echilibru avem

$$\alpha = k P \ , \qquad (15\text{-}22)$$

adică aparatul ne măsoară puterea care trece prin circuit și constituie ceea ce am definit ca *wattmetru*. Potrivit relației (15-25), deviațiile acului aparatului fiind proporționale cu puterea care trece prin aparat, înseamnă că scara wattmetrelor electrodinamice este uniformă.

Convențional, un wattmetru se reprezintă așa cum este redat în fig. 15-41. Bobina *a*, străbătută de curentul principal, se numește *bobină*

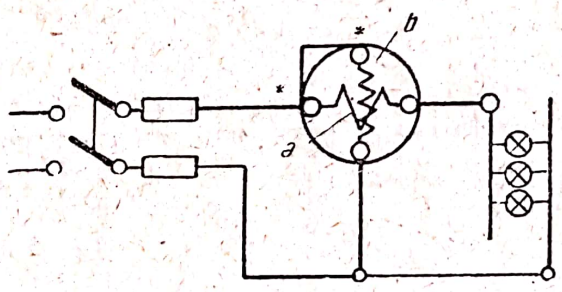


Fig. 15-41. Schema de montare a wattmetrului

ampermetrică sau *bobină serie* a aparatului, iar bobina *b*, care se leagă în derivație și este parcursă de un curent proporțional cu tensiunea, se numește *bobină voltmetrică* sau *bobină derivație*. Această din urmă bobină, ca orice bobină voltmetrică, este legată în serie în interiorul aparatului, cu o rezistență adițională.

Aparatul prezintă patru borne exterioare, două din ele fiind legate la capetele bobinei ampermetrice, celelalte la capetele bobinei voltmetrice.

Se pot extinde limitele de măsurare ale aparatului pentru o gamă mai mare de curenți, prin executarea bobinei ampermetrice din două (uneori patru) secții care, cu ajutorul unor barete metalice, pot fi legate în serie sau în paralel (fig. 15-42), iar, pentru o gamă mai mare de tensiuni, prin rezistențe adiționale, legate în serie cu bobina voltmetrică. Aceste din urmă rezistențe sînt alese în așa fel, încît curentul în circuitul voltmetric al aparatului să nu depășească limita admisă de aparat.

Bornele aparatului care trebuie legate la conductorul ce vine dinspre generator se numesc *borne dinspre generator* și sînt marcate cu o steluță.

Montarea corectă a wattmetrului se face legînd ambele borne marcate cu steluță (una a bobinei ampermetrice, cealaltă a bobinei voltmetrice) la conductorul care vine de la generator.

Ținînd seama că puterea în curent continuu este dată de produsul tensiunii circuitului cu intensitatea curentului din circuit, ne putem dispensa de wattmetru măsurînd tensiunea cu un voltmetru și curentul cu un ampermetru.

Metoda nu dă rezultate precise căci, dacă executăm montajul amonte

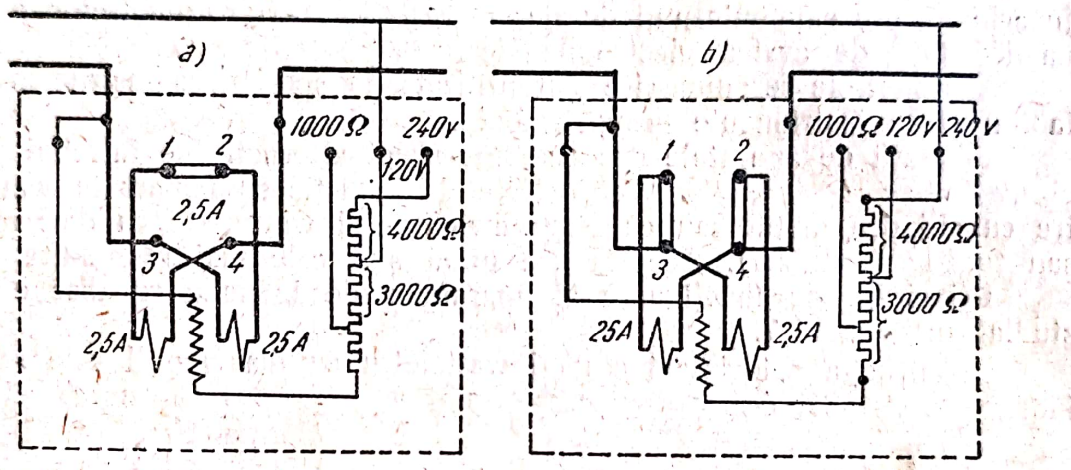


Fig. 15-42. Schema de construcție a unui vattmetru prevăzut cu dispozitiv de comutare pentru două valori limită ale curentului din circuit: *a*) pentru 2,5 A și *b*) pentru 5 A.

al aparatelor conform fig. 15-23 *a*, produsul UI ne va da, pe lîngă puterea real consumată în rezistența R_x, și puterea consumată în voltmetru, iar dacă executăm montajul aval, conform fig. 15-23 b, puterea consumată în ampermetru. În ambele cazuri, puterea măsurată va fi mai mare decît cea reală, ceea ce în cazul puterilor mici poate da erori sensibile.

Ținînd seama că, în general, voltmetrele consumă mai mult decît ampermetrele, metoda dă rezultate mai precise atunci cînd se aplică montajului amonte. În mod analog se pune problema la legarea bobinei voltmetrice a wattmetrelor.

15-22. Măsurarea puterii active în curent alternativ monofazat

În curent alternativ monofazat puterea activă fiind dată de expresia

$$P = UI \cos \varphi,$$

ea depinde de trei factori: tensiune, curent și factor de putere. Acești factori pot fi măsurați fiecare în parte și puterea se determină prin produsul lor. Metoda aceasta însă nu se aplică, din cauza erorilor de măsurare care apar la citirile celor trei aparate și a greutății de a face aceste măsurări simultan. De aceea, în curent alternativ puterile se măsoară numai cu ajutorul wattmetrelor.

Wattmetrele electrodinamice, descrise în par. precedent, se aplică și în curentul alternativ monofazat, unde ne dă puterea electrică activă din circuit. Prin urmare, cele spuse cu privire la funcționarea, la montajul și la extinderea limitelor de citire se aplică și în cazul funcționării acestor wattmetre în curent alternativ.

În curent alternativ se utilizează și *wattmetre ferodinamice,* o variantă a wattmetrelor electrodinamice, la care bobinele mobile sînt prevăzute cu miez de fier, astfel încît fluxurile celor două bobine serie și derivație se închid în cea mai mare parte prin fier. Această construcție prezintă avantajul unui cuplu motor mai puternic și a unei influențe mai reduse a cîmpurilor magnetice exterioare asupra indicațiilor aparatului. În schimb, prezența miezului de fier mărește eroarea wattmetrelor ferodinamice față de acelea electrodinamice.

Wattmetrele ferodinamice sînt utilizate, în special, ca instrumente de tablou și ca instrumente înregistratoare.

În afară de aparatele descrise, în curent alternativ se întrebuințează și *wattmetre de inducție.* Wattmetrele de inducție se împart în wattmetre cu cilindru mobil sau cu cîmp învîrtitor și wattmetre cu disc mobil sau fugitiv (repulsiv). Acestea din urmă sînt cele mai răspîndite.

Principiul de funcționare al aparatelor de inducție cu disc a fost studiat în par. 15-7.

Construcția principială a unui wattmetru cu disc mobil este redată în fig. 15-43. Cei doi electromagneți sînt așezați unul deasupra, celălalt

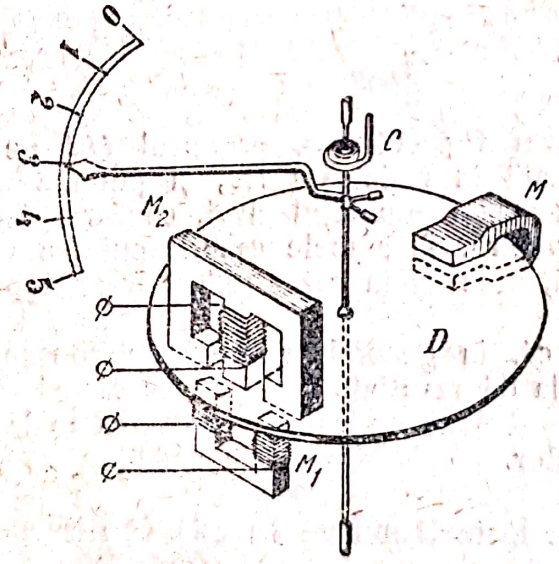


Fig. 15-43. Schema constructivă a wattmetrului de inducție

dedesubtul discului *D*. Electromagnetul inferior M_1 dispune de o bobină cu un număr redus de spire, executată cu un conductor de secțiune relativ mare care se leagă în serie cu circuitul principal. Această bobină, parcursă de curentul de sarcină *I*, produce un flux magnetic pulsatoriu Φ_I. Fluxul Φ_I străbate un disc ușor de aluminiu *D* care se poate roti în jurul axei sale și care constituie echipajul mobil al aparatului. Electro-

magnetul superior M_2 dispune de o bobină cu un număr foarte mare de spire executată cu un conductor de secțiune foarte redusă care se montează în paralel. Prin această bobină trece un curent proporțional cu tensiunea din circuit care produce un flux magnetic pulsatoriu Φ_U. O parte din acest flux, pe care o notăm cu Φ_{Ua} străbate discul de aluminiu și constituie fluxul activ al electromagnetului M_2; restul, pe care îl notăm cu Φ_{Ur}, se închide pe altă cale și constituie fluxul de reglaj al aparatului.

Cu aceste notații, relația (15-5) a cuplului motor devine

$$M_m = k_1 \Phi_I \Phi_{Ua} \sin \psi , \qquad (15\text{-}23)$$

în care ψ este defazajul dintre fluxurile Φ_I și Φ_{Ua}.

Pentru ca aparatul să funcționeze ca wattmetru, trebuie ca cuplul motor să fie proporțional cu puterea. Pentru aceasta este necesar: 1) ca fluxul electromagnetului legat în serie cu circuitul să fie proporțional cu intenstiatea curentului care trece prin circuit; 2) ca fluxul activ al electromagnetului legat în derivație cu circuitul să fie proporțional cu tensiunea circuitului și 3) să fie satisfăcută relația $\sin \psi = \cos \varphi$ (φ este decalajul dintre curentul și tensiunea din circuit).

Primele două condiții sînt satisfăcute dacă aparatul funcționează cu circuitele sale magnetice nesaturate. Condiția a treia este satisfăcută atunci cînd între unghiurile ψ și φ există relația

$$\psi = 90° - \varphi ,$$

căci, în acest caz,

$$\sin \psi = \sin (90° - \varphi) = \cos \varphi .$$

În fig. 15-44 a fost reprezentată diagrama vectorială a funcționării aparatului. Fluxul Φ_I este defazat în întîrziere față de curentul I cu un-

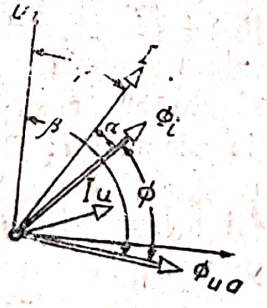


Fig. 15-44. Diagrama vectorială a wattmetrului de inducție

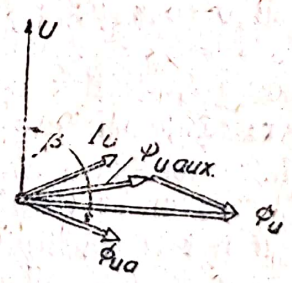


Fig. 15-45. Diagrama vectorială a circuitului de tensiune al wattmetrului de inducție

ghiul de pierderi în fier α_I. Prin urmare, față de tensiunea U, fluxul Φ_I este defazat cu unghiul $\varphi + \alpha_I$. Fluxul activ Φ_{Ua} trebuie să fie defazat față de fluxul Φ_I cu unghiul $\psi = 90° - \varphi$, deci față de tensiune cu unghiul

$$\beta = \varphi + \alpha_I + (90 - \varphi) = 90° + \alpha_I . \qquad (15\text{-}24)$$

Acest defazaj, dintre U și Φ_{Ua} se obține în modul următor:

Fluxul activ Φ_{Ua} se închide prin miezul din mijloc al electromagnetului M_2, disc, extremitățile magnetului M_1 (pe care le parcurge transversal) și miezurile laterale ale electromagnetului M_2. Datorită pierderilor

importante care au loc în calea fluxului Φ_{Ua} (inclusiv pierderea prin curenți Foucault în disc), acest flux este defazat, față de curentul I_U, cu un unghi sensibil mai mare decît fluxul Φ_{Ur}, care, închizîndu-se direct prin miezul din mijloc și cele laterale ale electromagnetului M_2, produce în calea sa pierderi cu mult mai reduse. În fig. 15-45 este reprezentată diagrama vectorială a circuitului de tensiune datorită electromagnetului M_2.

Se obține, în modul acesta, un unghi $\beta \geq 90° + \alpha_I$. Pentru a aduce unghiul β la valoarea dată de relația (15-24), se acționează asupra decalajului dintre fluxul de reglaj Φ_{Ur} și curentul I_U, punînd în calea acestui flux (în întrefierurile dintre miezul central și cele laterale ale magnetului M_2) plăcuțe de cupru care au ca scop să mărească pierderile produse de fluxul Φ_{Ur}. Deoarece fluxul Φ_U rămîne tot timpul constant (el depinde de tensiunea U a circuitului), rezultă că mărirea decalajului dintre Φ_{Ur} și I_U produce reducerea unghiului β.

În aceste condiții ($\Phi_I \equiv I$, $\Phi_{Ua} \equiv U$ și $\beta = 90° + \alpha_I$), relația (15-23) devine

$$M_m = k\,U\,I\cos\varphi = k\,P \quad . \tag{15-25}$$

Cuplul rezistent este creat de un resort spiral C, iar amortizarea de un magnet permanent M.

Wattmetrele de inducție prezintă următoarele calități:

1) scara uniformă, marcată obișnuit direct în unități de putere: wați, kilowați sau megawați;

2) cuplu motor puternic, ceea ce le face apte pentru a fi construite și ca aparate înregistratoare;

3) sînt insensibile la influența cîmpurilor exterioare, avînd un cîmp magnetic propriu suficient de puternic;

4) au o construcție solidă și, datorită lipsei pieselor de aducere a curentului la sistemul mobil, o capacitate mare de a suporta suprasarcinile.

Aceste calități dau aparatului o mare siguranță în exploatare.

Printre neajunsurile aparatelor de inducție semnalăm:

1) între tensiunea U și fluxul Φ_U nu există o proporționalitate riguroasă, ceea ce se răsfrînge asupra preciziei măsurătorilor;

2) nu pot fi construite ca aparate de precizie, în condiții normale precizia lor fiind de ordinul 1-1,5%.

Pentru extinderea limitelor de măsurare ale unui wattmetru în curent alternativ se utilizează transformatoare de măsură (vezi vol. II). În cazul unui curent de intensitate mare, pentru alimentarea bobinei serie se utilizează transformatoare de curent care reduc intensitatea curentului la 5 A, iar, în cazul unei tensiuni ridicate, se utilizează transformatoare de tensiune care reduc tensiunea aplicată bobinei derivație la 100 V.

Puterea măsurată de wattmetru se obține prin înmulțirea numărului de diviziuni α indicate de aparat cu constanta C scrisă pe acesta, exprimată în W/div. În cazul folosirii transformatoarelor de măsură, puterea se obține înmulțind valoarea C cu produsul rapoartelor de transformare k_I și k_U a acestor transformatoare și apoi cu numărul α, adică este dată de relația $P = C\,k_I\,k_U\,\alpha$ (wați)

15-23. Măsurarea puterii active în curent alternativ trifazat

1. Metoda celor trei wattmetre. Conform definiției puterii în curent alternativ, puterea trifazată este dată de relația

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C)\, dt = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C \cdot \quad (15\text{-}25)$$

Deci, în principiu, pentru a se măsura puterea în curent trifazat, ar fi nevoie de trei wattmetre, cîte unul pentru fiecare fază, avînd bobina

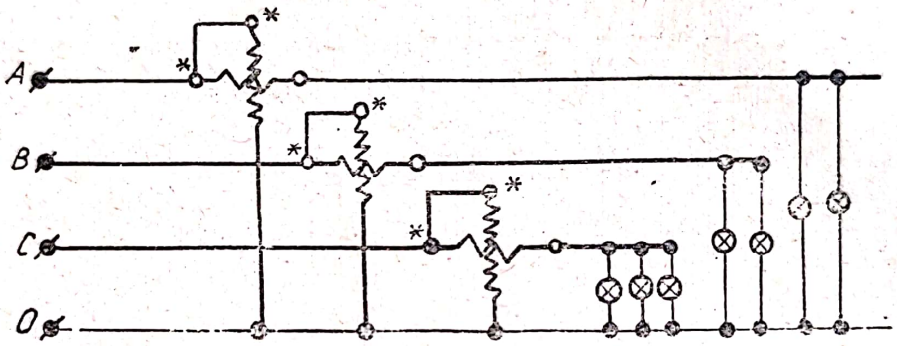


Fig. 15-46. Schema de montaj în cazul utilizării a trei wattmetre, în distribuție trifazată cu fir neutru

ampermetrică străbătută de curentul din faza respectivă și bobina voltmetrică montată între faza respectivă și punctul neutru, adică supusă tensiunii pe fază respective (fig. 15-46). Dacă sistemul nu are fir neutru,

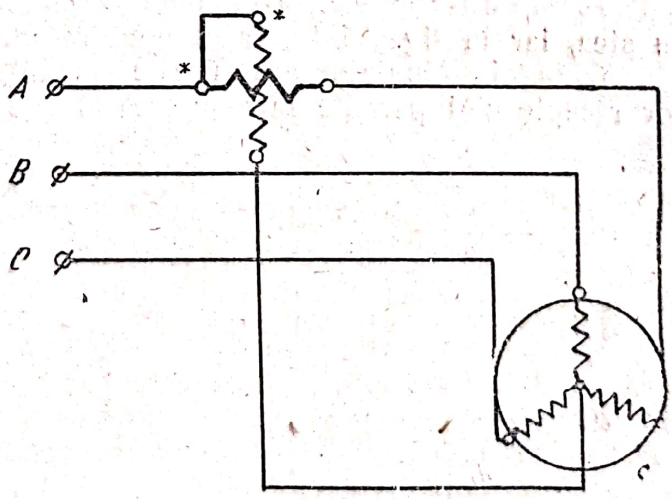


Fig. 15-47. Schema de montaj în cazul utilizării unui singur wattmetru monofazat receptor echilibrat, cu fazele legate în stea și neutrul accesibil

punctul neutru se creează în mod artificial, prin trei rezistențe legate în stea la cele trei faze.

Metoda celor trei wattmetre este incomodă, căci necesită citirea simultană a trei aparate și însumarea acestor citiri și susceptibilă de tot atîtea erori de citire și de aparat. De aceea această metodă se aplică rar în practică, fiind înlocuită, cînd este posibil, prin metoda celor două wattmetre sau prin metoda wattmetrului trifazat, pe care le vom arăta mai jos.

2. Metoda unui singur wattmetru. În cazul cînd distribuția este echilibrată, deci fazele debitează sau absorb puteri egale, este suficient

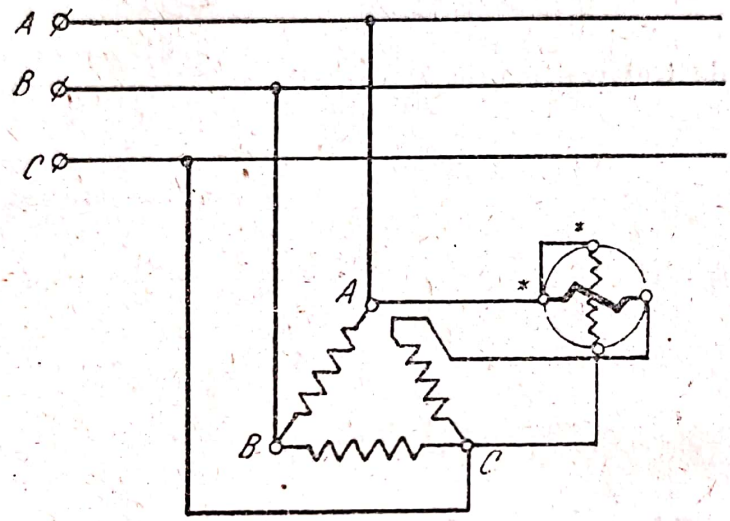


Fig. 15-48. Schema de montaj în cazul utilizării unui singur wattmetru monofazat, la un receptor echilibrat cu fazele legate în triunghi

să se determine puterea uneia din faze, cu ajutorul unui singur wattmetru și rezultatul să se înmulțească cu 3, pentru a avea puterea totală a sistemului. În fig. 15-47 este arătat cazul unui receptor echilibrat cu fazele legate în stea, iar în fig. 15-48, cazul unui receptor echilibrat cu fazele legate în triunghi. Montajul acesta este posibil numai cînd conexiunea fazelor receptorului permite introducerea în serie pe o fază a

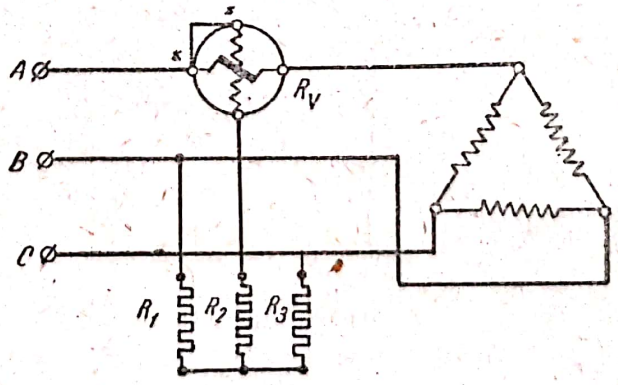


Fig. 15-49. Crearea punctului neutru artificial

bobinei ampermetrice a wattmetrului, deoarece în fond wattmetrul măsoară, în acest caz, puterea pe o singură fază.

Cînd fazele receptorului sînt legate în triunghi sau în stea cu punctul neutru inaccesibil, se poate crea un punct neutru artificial cu ajutorul a trei rezistențe active R_1, R_2 și R_3 (fig. 15-49) așa fel alese încît să satisfacă relația

$$R_V + R_2 = R_1 = R_3 \,, \qquad (15\text{-}26)$$

în care R_V este rezistența bobinei voltmetrice a wattmetrului electrodinamic. Dacă se utilizează un wattmetru de inducție, rezistențele cu ajutorul cărora se creează punctul neutru trebuie să fie neapărat inductive.

3. Metoda celor două wattmetre. Mai există o metodă de măsurare a puterii trifazate în distribuțiile fără fir neutru și anume *metoda celor două wattmetre* (fig. 15-50) care poate fi aplicată indiferent dacă sar-

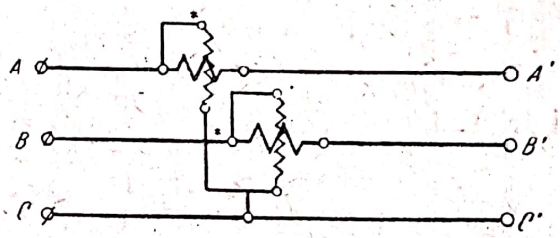


Fig. 15-50. Schema de montaj a wattmetrelor monofazate, în cazul măsurării puterii prin metoda celor două wattmettre

cina este sau nu simetrică sau dacă fazele receptorului sînt legate în stea sau în triunghi. *Este cea mai răspîndită metodă de măsurare a puterii în distribuțiile trifazate.*

Metoda celor două wattmetre se bazează pe faptul că puterea trifazată se poate descompune în două componente, care se însumează algebric pentru a da puterea activă totală, și că fiecare din aceste componente poate fi măsurată cu ajutorul unui wattmetru monofazat. Descompunerea puterii în două componente se poate realiza numai cînd curenții din sistem satisfac relația $i_A + i_B + i_C = 0$, fie prin încărcare simetrică a sistemului, fie prin natura montajului (lipsa firului neutru) dacă sarcina este nesimetrică.

Într-adevăr, expresia puterii active instantanee trifazate este dată de relația

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \,,$$

în care p_A, p_B și p_C sînt valorile instantanee ale puterii din fazele A, B și C ale receptorului. Distribuția neavînd fir neutru, trebuie să avem neapărat

$$i_A + i_B + i_C = 0 \,,$$

de unde

$$i_C = -(i_A + i_B) \,.$$

Introducînd această valoare a curentului i_C în expresia puterii instantanee, aceasta ia forma

$$p = (u_A - u_C)\, i_A + (u_B - u_C)\, i_B = u_{AC} i_A + u_{BC} i_B \,.$$

Puterea medie în cursul unei perioade care este, prin definiție, puterea activă a sistemului trifazat, devine

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (u_{AC}\,i_A + u_{BC}\,i_B)\,dt\,.$$

Integrînd, obținem relația

$$P = U_{AC}\,I_A\cos\psi_1 + U_{BC}\,I_B\cos\psi_2 \qquad (15\text{-}27)$$

în care ψ_1 este unghiul de decalaj dintre U_{AC} și I_A, iar ψ_2 este unghiul de decalaj dintre U_{BC} și I_A.

Prin urmare, măsurînd puterile

$$P_1 = U_{AC}\,I_A\cos\psi_1 \quad \text{și} \quad P_2 = U_{BC}\,I_B\cos\psi_2\,,$$

cu două wattmetre montate așa cum se arată în fig. 15-50, vom obține puterea sistemului trifazat respectiv.

În fig. 15-51 au fost reprezentate, vectorial, mărimile care intervin în metoda celor două wattmetre. Pentru simplificare, am presupus că sistemul trifazat este simetric și fazele uniform încărcate.

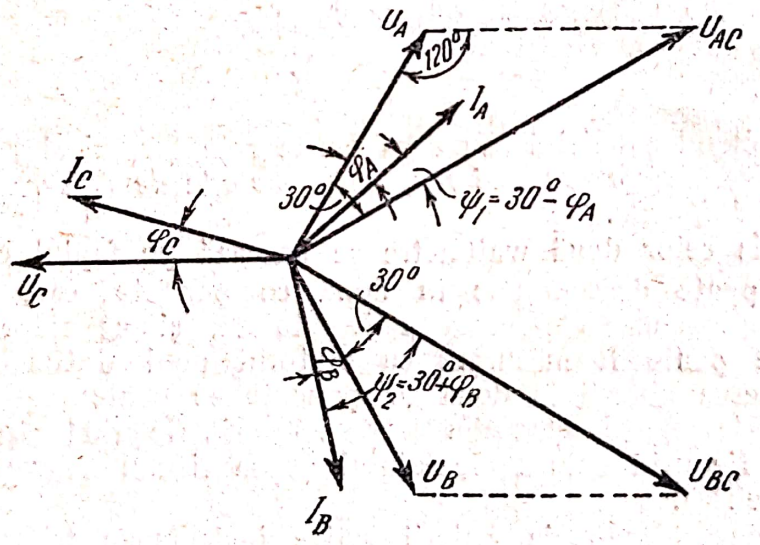


Fig. 15-51. Diagrama vectorială a schemei folosită în metoda celor două wattmetre

După cum rezultă din figură $\psi_1 = 30° - \varphi_A$, iar $\psi_2 = 30° + \varphi_B$ în care φ_A și φ_B reprezintă defazajul între tensiunea și curentul respectiv pe fazele A și B. Prin urmare, indicația primului wattmetru este

$$P_1 = U_{AC}\,I_A\cos\psi_1 = U_{AC}\,I_A\cos(30° - \varphi_A)\,, \qquad (15\text{-}28)$$

iar a celui de al doilea,

$$P_2 = U_{BC}\,I_B\cos\psi_2 = U_{BC}\,I_B\cos(30° + \varphi_B)\,. \qquad (15\text{-}29)$$

Suma indicațiilor celor două wattmetre, adică puterea totală, este

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC}\,I_A\cos(30° - \varphi_A) + U_{BC}\,I_B\cos(30° + \varphi_B)\,.$$

În cazul unui sistem simetric și echilibrat, avem

$$U_{AB} = U_{BC} = U_l \; ; \quad I_A = I_B = I_l \; ; \quad \varphi_A = \varphi_B = \varphi$$

și deci putem scrie

$$P = P_1 + P_2 = U_l I_l [\cos (30° - \varphi) + \cos (30° + \varphi)] ,$$

de unde obținem

$$P = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos \varphi , \qquad (15\text{-}30)$$

adică se verifică, și pe această cale, principiul metodei celor două wattmetre.

Din relațiile (15-28) și (15-29) rezultă că într-un sistem simetric și echilibrat indicațiile celor două wattmetre sînt egale numai în cazul sarcinii active căci, în acest caz, decalajul φ este nul și relațiile devin

$$P_1 = U_l I_l \cos 30° \quad \text{și} \quad P_2 = U_l I_l \cos 30° .$$

Cînd decalajul φ devine egal cu 60° (inductiv), indicația wattmetrului al doilea, potrivit relației (15-29) devine 0 căci

$$P_2 = U_l I_l \cos (30° + \varphi) = U_l I_l \cos (30° + 60°) = 0$$

și întreaga putere este dată numai de primul wattmetru

$$P_1 = U_l I_l \cos (30° - \varphi) = U_l I_l \cos (30° - 60°) = \sqrt{3}\, U_l I_l \cos 30° .$$

Cînd decalajul este inductiv $\varphi > 60°$, puterea înregistrată de primul wattmetru $P_1 = U_l I_l \cos (30° - \varphi)$ rămîne pozitivă, iar cea înregistrată de al doilea wattmetru devine negativă căci, în acest caz, $(30° + \varphi) > 90°$ și acul indicator al acestui wattmetru deviază în sens opus. Pentru a se putea citi indicația wattmetrului al doilea trebuie ca sensul curentului să fie schimbat într-unul din circuitele acestui wattmetru și în acest caz indicația lui trebuie scăzută din aceea a primului wattmetru. Prin urmare, cînd $\varphi > 60°$, avem

$$P = P_1 - P_2 .$$

Dacă $\varphi > 60°$ este capacitiv, indicațiile primului wattmetru sînt negative și vom avea

$$P = P_2 - P_1 .$$

Cînd fazele sînt egal încărcate, ceea ce este cazul de pildă al unui motor electric, factorul de putere ($\cos \varphi$) poate fi calculat foarte precis cu ajutorul relației

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}\, \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} , \qquad (15\text{-}31)$$

care se determină precum urmează

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{U_{AC} I_A \cos (30° - \varphi) - U_{BC} I_B \cos (30° + \varphi)}{U_{AC} I_A \cos (30° - \varphi) + U_{BC} I_B \cos (30° + \varphi)} =$$

$$= \frac{\cos (30° - \varphi) - \cos (30° + \varphi)}{\cos (30° - \varphi) + \cos (30° + \varphi)} = \frac{2 \sin 30° \sin \varphi}{2 \cos 30° \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi ,$$

de unde obținem relația (15-31). Metoda are dezavantajul că necesită două citiri care trebuie făcute simultan.

Cînd sistemul încărcat nesimetric are fir neutru, nu se poate aplica metoda celor două wattmetre. În acest caz aplicăm metoda celor trei wattmetre, expusă la punctul 1.

4. Metoda wattmetrului trifazat. În aplicarea metodei celor două wattmetre, în loc de a utiliza două aparate se poate utiliza un singur wattmetru, de construcție specială, numit *wattmetru trifazat.*

Wattmetrul trifazat este format din două wattmetre monofazate care acționează pe același ax comun și sînt conectate după schema din fig. 15-50. Cuplul motor la axul wattmetrului trifazat este egal cu suma cuplurilor celor două wattmetre. Prin urmare, indicațiile lui sînt proporționale cu puterea circuitului trifazat cu trei conductoare și fără fir neutru, oricare ar fi repartiția sarcinii pe cele trei faze ale sistemului.

Wattmetrele trifazate pot fi construite după principiul aparatelor electrodinamice, ferodinamice și de inducție. Un asemenea wattmetru (fig. 15-52) are șapte borne, din care patru, două de fiecare parte a aparatului,

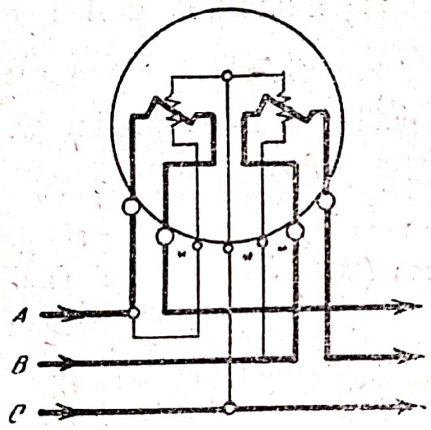


Fig. 15-52. Schema de legare în circuit a wattmetrului trifazat

servesc pentru legarea bobinelor ampermetrice, iar restul de trei borne, de dimensiuni mai mici aflate la mijloc, servesc pentru legarea bobinelor voltmetrice ale aparatului. Dintre aceste din urmă borne, borna din mijloc servește pentru legătura la faza care nu trece prin aparat și care se numește *faza de referință* a sistemului de măsură (faza *C* în fig. 15-50 și 15-52).

Exemplul 15-3. Să se determine indicațiile celor două wattmetre și puterea totală a unei sarcini active, neuniform repartizată, în cazul unui receptor ale cărui faze, legate în triunghi, prezintă următoarele rezistențe $R_{AB} = 16\ \Omega$, $R_{BC} = 8\ \Omega$, $R_{CA} = 12\ \Omega$, iar tensiunea aplicată este de 380 V.

Soluția: Se înlocuiește triunghiul rezistențelor active printr-o stea echivalentă, aplicînd relațiile (11-28)

$$R_A = \frac{R_{CA}\,R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{12 \cdot 16}{16 + 8 + 12} = \frac{192}{36} = 5{,}34\ \Omega;$$

$$R_B = \frac{16 \cdot 8}{36} = 3{,}6\ \Omega; \quad R_C = \frac{8 \cdot 12}{36} = 2{,}66\ \Omega.$$

Se obțin ca admitanțe ale stelei echivalente

$$G_A = \frac{1}{R_A} = \frac{1}{5{,}34} = 0{,}1872 \text{ S}; \quad G_B = \frac{1}{3{,}56} = 0{,}281 \text{ S};$$

$$G_C = \frac{1}{2{,}66} = 0{,}376 \text{ S}.$$

Tensiunea aplicată fiind 380 V, tensiunea pe fază este $\frac{380}{\sqrt{3}} = 220$ V.

Tensiunile complexe ale fazelor sînt

$$\overline{U}_A = 220 \text{ V}; \quad \overline{U}_B = (-110 - j\,190) \text{ V}; \quad \overline{U}_C = (-110 + j\,190) \text{ V}.$$

Tensiunea între punctele neutre (deplasarea neutrului)

$$\overline{U}_0 = \frac{\overline{U}_A G_A + \overline{U}_B G_B + \overline{U}_C G_C}{G_A + G_B + G_C} = \frac{31 - j\,18{,}05}{0{,}8445} = (-37{,}44 + j\,21{,}4) \text{ V}.$$

Curentul în fazele A și B, pe care sînt montate circuitele serie ale wattmetrului, este

$$\overline{I}_A = (\overline{U}_A - \overline{U}_0)\, G_A = (257{,}44 - j\,21{,}4)\, 0{,}1872 = (48{,}14 - j\,4{,}0) \text{ A} =$$

$$= 48{,}4\, e^{-j\,4^\circ 50'} \text{ A},$$

$$\overline{I}_B = (\overline{U}_B - \overline{U}_0)\, G_B = (-72{,}56 - j\,211{,}4)\, 0{,}281 = (-20{,}4 - j\,59{,}4) \text{ A} =$$

$$\text{A} = 62{,}78\, e^{-j\,70^\circ 50'} \text{ A}.$$

Tensiunea la bornele bobinelor voltmetrice ale wattmetrelor sînt

$$\overline{U}_{AC} = \overline{U}_A - \overline{U}_C = (330 - j\,190) \text{ V} = 380\, e^{-j\,30^\circ} \text{ V},$$

$$\overline{U}_{BC} = \overline{U}_B - \overline{U}_C = -j\,380 \text{ V} = 380\, e^{-j\,90^\circ} \text{ V}.$$

Urmează că unghiurile ψ_1, corespunzător primului wattmetru, și ψ_2, corespunzător celui de al doilea wattmetru, sînt $\psi_1 = -30^\circ - (-4^\circ 50') = -25^\circ 10'$; $\psi_2 = -90^\circ + (70^\circ 50') = -19^\circ 10'$.

De unde

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos \psi_1 = 380 \cdot 48{,}14 \cdot 0{,}905 = 16\,555 \text{ W};$$

$$P_2 = U_{BC} + I_B \cos \psi_2 = 380 \cdot 62.9 \cdot 0.944 = 22\,400 \text{ W};$$

$$P = P_1 + P_2 = 16\,555 + 22\,400 \approx 39\,000 \text{ W} = 39 \text{ kW}.$$

Verificare

$$P = \frac{380^2}{16} + \frac{380^2}{8} + \frac{380^2}{12} = 39 \text{ kW}.$$

15-24. Măsurarea energiei în curent continuu

Aparatele care măsoară și înregistrează energia electrică se numesc *contoare electrice*.

În curent continuu se utilizează, aproape exclusiv, contoare electrodinamice (fig. 15-53).

Bobina ampermetrică a contorului, legată în serie cu circuitul și parcursă de curentul principal, este compusă dintr-un număr redus de spire din sîrmă groasă care formează două bobine fixe *M*, paralele între ele. Între aceste bobine se găsește bobina voltmetrică a aparatului (echi-

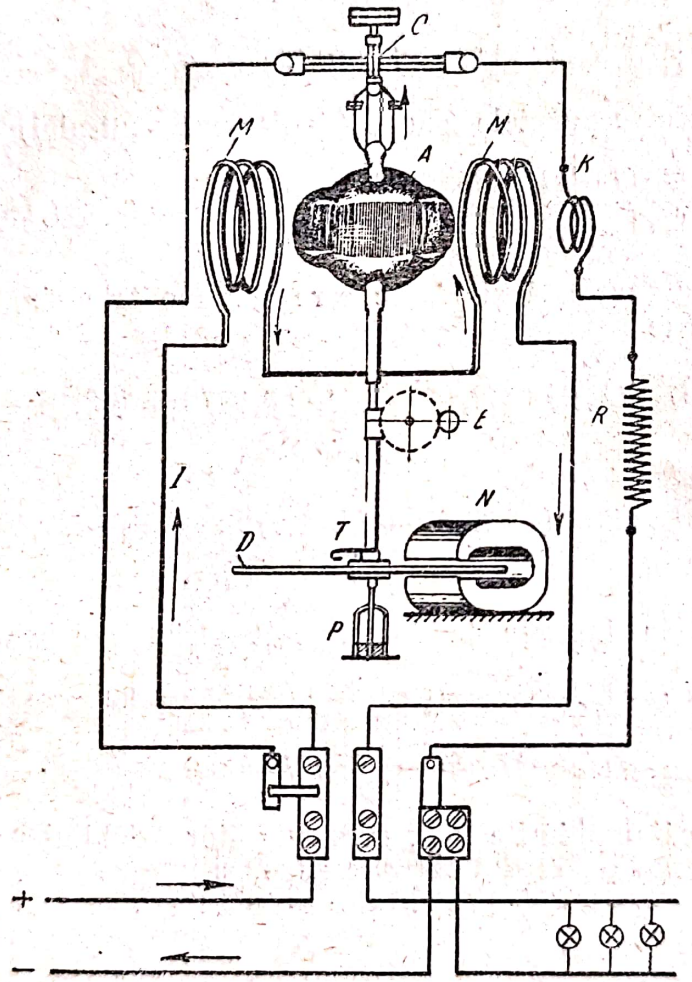


Fig. 15-53. Schema constructivă a contorului electrodinamic

pajul mobil), notată cu A, executată dintr-un număr mare de spire din sîrmă subțire. Bobina *A* este legată în derivație cu circuitul și este parcursă de un curent proporțional cu tensiunea acestuia. Bobina ampermetrică se numește *inductorul* contorului, iar cea voltmetrică, *indusul* contorului.

Curentul este adus în indus cu ajutorul a două perii formate din lamele subțiri de argint care alunecă pe un mic colector *C*, legat cu spirele bobinei *A*. În circuitul care alimentează indusul se găsește o

rezistență adițională R, ca în orice circuit voltmetric, precum și o bobină de compensație K, al cărui rol este să mărească cuplul motor al aparatului prin acțiunea fluxului acestei bobine asupra curentului care străbate indusul. Acest cuplu suplementar compensează cuplul de frecare al indusului în lagărul de pivotare P al axului său și cuplul de frecare al periilor pe colector.

Sub acțiunea reciprocă dintre curentul principal I, care străbate bobinele fixe M ale aparatului, și curentul proporțional cu tensiunea circuitului care străbate indusul aparatului, apare un cuplu motor dat de relația $M_m \; U\,I$ care pune indusul în mișcare de rotație.

Cuplul rezistent al aparatului este produs de curenții Foucault care iau naștere într-un disc de aluminiu D, fixat pe axul bobinei mobile, care se rotește între polii unui magnet permanent N. Acest cuplu rezistent este proporțional cu viteza unghiulară de rotație ω a discului. Deci $M_r = k_2\,\omega$.

Discul va avea o viteză uniformă cînd cuplul motor este egal cu cel rezistent, deci cînd

$$k_1\,U\,I = k_2\,\omega\,,$$

de unde

$$U\,I = P = k\,\omega\,.$$

Înmulțind ambii membrii cu dt obținem

$$P\,dt = dW = k\,\omega\,dt$$

sau

$$dW = k\,d\alpha\,,$$

expresie în care dW este energia elementară corespunzătoare timpului dt, iar $d\alpha$ este unghiul elementar de rotație corespunzător aceluiași timp dt.

Integrînd de la zero pînă la un moment oarecare t, obținem energia corespunzătoare

$$W = \int_0^t dW = k \int_0^t d\alpha$$

sau

$$W = k\,\alpha\,.$$

Dar unghiul α poate fi pus sub forma

$$\alpha = 2\,\pi\,N\,,$$

în care N este numărul total de rotații executate de disc în intervalul de timp t. Deci

$$W = C\,N\,. \qquad (15\text{-}32)$$

Prin urmare, energia electrică măsurată este proporțională cu numărul de învîrtituri ale axului aparatului.

Spre deosebire de aparatele examinate pînă acum care sînt *aparate indicatoare*, adică care dau, prin deplasarea acului indicator, valoarea momentană a mărimii măsurate, contoarele sînt *aparate totalizatoare* care înregistrează întreaga cantitate a mărimii ce trece prin aparat.

Pentru a se putea citi valoarea energiei măsurate de aparat, axul contorului este prevăzut cu un șurub fără fine care, printr-un mecanism de roți dințate, acționează un sistem de discuri indicatoare de multipli zecimali, etalonate direct în kilowattore (sistemul E din fig. 15-53).

Constanta $C = \frac{W}{N}$, dată de relația (15-32), se numește *constanta efectivă* a aparatului. Ea reprezintă energia electrică consumată efectiv în rețea în timpul unei rotații a contorului. Cantitatea de energie înregistrată de mecanismul de înregistrare la o rotație a contorului se numește *constanta nominală* a contorului (C_n).

Precizia unui contor este caracterizată prin eroarea lui relativă, dată de relația

$$\Delta_r = \frac{W_1 - W_2}{W_1} \cdot 100 , \qquad (15\text{-}33)$$

în care W_1 este energia înregistrată de contor, iar W_2 este energia efectiv consumată în rețea. Deoarece $W_1 = C_n N$, iar $W_2 = CN$, rezultă că eroarea relativă a aparatului, exprimată în funcție de constantele sale, este

$$\Delta_r = \frac{C_n N - CN}{C_n N} 100 = \frac{C_n - C}{C_n} 100 . \qquad (15\text{-}34)$$

Curba de eroare a contorului, care dă eroarea lui relativă în funcție de sarcină, poartă numele de *caracteristica contorului*.

Pentru a reduce influența cîmpurilor magnetice exterioare asupra funcționării aparatului, contoarele sînt închise, uneori, în cutii masive de oțel care joacă rolul de ecran magnetic.

15-25. Măsurarea energiei active în curent alternativ monofazat

Măsurarea și înregistrarea energiei active în curent alternativ monofazat se face, aproape exclusiv, cu contoare de inducție, pentru calitatea lor de a fi simple și ieftine și de a da, pentru cazurile practice, o precizie satisfăcătoare.

Principiul lor de funcționare și construcție este același cu al wattmetrului de inducție, descris în par. 15-22.

În fig. 15-54 este redată schema de construcție a unui contor de inducție. Bobina derivație este așezată pe miezul electromagnetului M_U. Prin trecerea curentului ea dă naștere la două fluxuri: Φ_{Ua} și Φ_{Ur}. Primul flux Φ_{Ua}, după ce străbate discul D al echipajului mobil, se închide prin partea inferioară a miezului electromagnetului M_U, situată sub disc, între polii magnetului M_I, al bobinei serie. Cel de al doilea flux Φ_{Ur} trece prin șuntul magnetului M_U și, după ce străbate o placă (nu este redată în figură) cu ajutorul căreia se execută reglajul contorului, se închide urmînd mai departe același traseu ca și fluxul Φ_{Ua}.

Electromagnetul M_I al bobinei serie are forma unei potcoave și este așezat sub disc. Fluxul Φ_I, produs de acest electromagnet, străbate discul de două ori și se închide, deasupra discului, prin miezul electromagnetului M_U.

Cu ajutorul plăcii de alamă pusă în calea fluxului de reglaj, se obține satisfacerea relației (15-24)

$$\beta = 90° + \alpha_I$$

și, deoarece circuitele magnetice ale aparatului funcționează nesaturat,

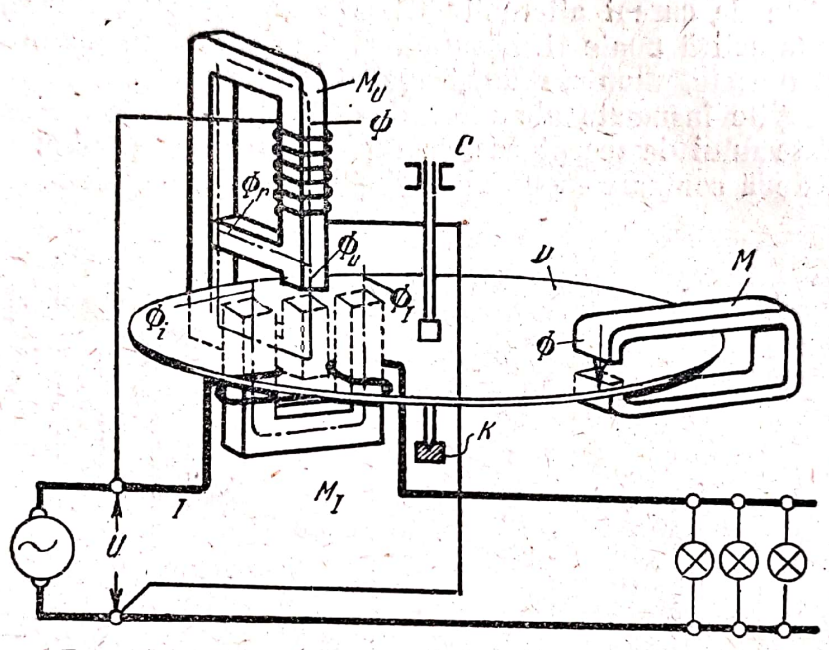


Fig. 15-54. Schemă constructivă a contorului de inducție

fluxul Φ_I este proporțional cu curentul I, iar fluxul Φ_{Ua}, cu tensiunea U. În aceste condiții cuplul motor al contorului este, conform relației (15-25),

$$M_m = k_1 U I \cos\varphi = k_1 P.$$

Cuplul rezistent, creat de magnetul permanent M, este proporțional, ca și la contorul electrodinamic, cu viteza unghiulară ω a contorului

$$M_r = k_2 \omega.$$

Discul va avea o viteză uniformă cînd $M_m = M_r$; deci

$$P = k \omega.$$

Printr-un raționament analog celui aplicat la contorul electrodinamic, rezultă că energia electrică, măsurată și înregistrată de contor într-un interval de timp t, este proporțională cu numărul de învîrtituri N al axului aparatului corespunzătoare acelui interval de timp, adică

$$W = C N. \qquad (15\text{-}35)$$

În privința constantei efective, a constantei nominale și a erorii relative a aparatului, se aplică cele arătate în par. precedent.

Contoarele de inducție prezintă aceleași neajunsuri ca și wattmetrele de inducție. Între altele, nu sînt aparate de mare precizie. Erori de ordinul $\pm 2 \div \pm 2{,}5\%$ sînt admisibile chiar la instrumentele din clasa întîia de precizie. La contoarele de inducție din clasa a doua de precizie, se admit erori, la $\cos \varphi = 0{,}8$, pînă la $\pm 4\%$.

15-26. Măsurarea energiei active în curent alternativ trifazat

În rețelele de curent alternativ trifazat cu trei conductoare, fără fir neutru, energia activă poate fi măsurată și înregistrată cu ajutorul a două contoare monofazate, montate după metoda celor două wattmetre (fig. 15-50). Indicațiile însumate ale celor două contoare ne dă consumul de energie al sistemului de receptoare. În fig. 15-55 este reprezentată schema de montaj a două contoare monofazate după schema celor două wattmetre.

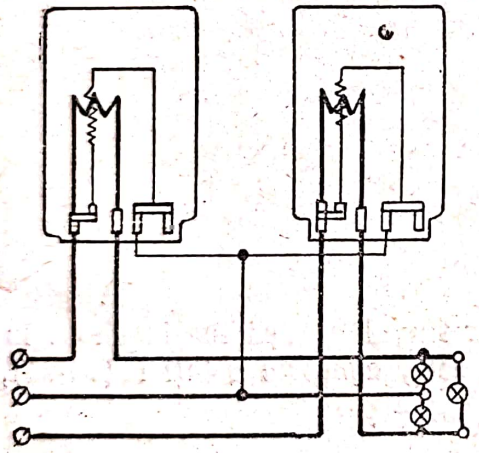


Fig. 15-55. Schema de legare în circuit a două contoare monofazate, după schema celor două wattmetre

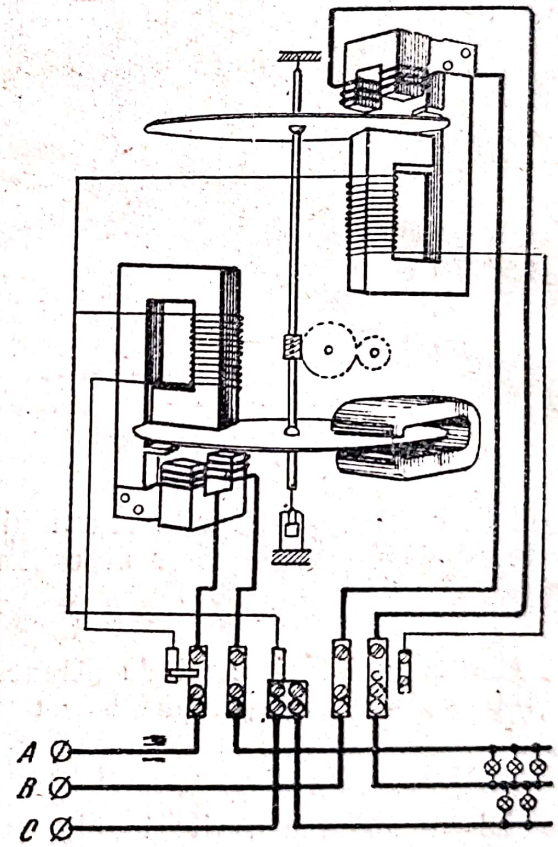


Fig. 15-56. Schema constructivă a contorului trifazat, cu două elemente monofazate

Se poate evita însumarea înregistrărilor celor două contoare monofazate utilizînd contoare trifazate speciale, compuse din combinarea, într-un singur instrument, a două sau trei contoare monofazate. Asemenea contoare trifazate se numesc *contoare de curent trifazat cu două* sau *trei elemente*.

Contoarele cu două elemente sînt utilizate pentru înregistrarea energiei electrice în rețele cu trei conductoare (fără fir neutru) oricare ar fi regimul de încărcare al fazelor. Asemenea contoare dispun de două

sisteme electromagnetice, analoge sistemelor din contoarele de inducție monofazate, care acționează asupra aceluiași disc sau fiecare sistem pe un disc separat, cele două discuri fiind fixate, în acest din urmă caz, pe același ax (fig. 15-56).

Cele mai răspîndite sînt contoarele trifazate cu două elemente și un singur disc, prezentînd o construcție mai simplă.

În circuitele trifazate echilibrate (cu fazele încărcate uniform), energia poate fi măsurată cu un singur contor monofazat, conectat la fel ca wattmetrele monofazate (fig. 15-47 și 15-48). Consumul total de energie al circuitului trifazat este egal cu de trei ori energia înregistrată de contor.

Cînd fazele circuitului trifazat cu fir neutru sînt încărcate neuniform, pentru măsurarea energiei este necesară utilizarea a trei contoare monofazate, montate cîte unul pe fiecare fază, la fel cu montarea wattmetrelor (fig. 15-46).

15-27. Măsurarea puterii reactive și a energiei reactive

Pentru o utilizare optimă a instalațiilor de producere, transport și distribuție a energiei electrice și pentru reducerea pierderilor, prin efect

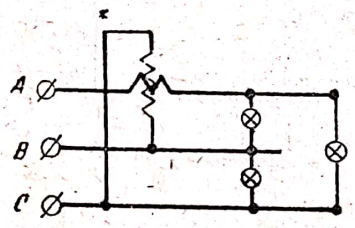


Fig. 15-57. Schema de legare în circuit a wattmetrului pentru măsurarea puterii reactive

Joule-Lenz, pe linie și în generator, se urmărește să se obțină, în exploatarea rețelelor electrice, un $\cos \varphi$ cît mai aproape de unitate, adică un $\sin \varphi$ cît mai aproape de zero, deci o putere reactivă furnizată rețelei cît mai redusă. În acest scop, se tarifează și energia reactivă a consumatorilor, pentru a-i sili să-și reducă cît mai mult această energie.

Puterea reactivă a unui circuit trifazat, cu fazele încărcate uniform, poate fi măsurată cu un singur wattmetru obișnuit, de putere activă, montat așa cum se arată în fig. 15-57. Decalajul dintre curentul I_A și tensiunea U_{BC} fiind de $90^0 - \varphi$ (vezi fig. 15-51), rezultă că wattmetrul va indica

$$P = U_{BC} I_A \cos (90^\circ - \varphi) = U_{BC} I_A \sin \varphi \cdot \qquad (15\text{-}36)$$

Ținînd seama că în cazul tensiunilor simetrice și a fazelor egal încărcate

$$U_{BC} = U_l \quad \text{și} \quad I_A = I_l ,$$

puterea reactivă a sistemului trifazat este

$$Q = \sqrt{3}\, U_l\, I_l \sin \varphi \cdot$$

Rezultă că pentru a obține puterea reactivă a întregului circuit trifazat, este suficient să înmulțim puterea dată de relația (15-36) cu $\sqrt{3}$.

În cazul fazelor uniform încărcate și a tensiunilor simetrice, puterea reactivă poate fi măsurată și prin indicațiile a două wattmetre, montate ca în fig 15-50, aplicînd formula

$$Q = \sqrt{3}\,(P_2 - P_1),$$

căci

$$Q = \sqrt{3}\,(P_2 - P_1) =$$

$$= \sqrt{3}\,[U_l\, I_l \cos(30° - \varphi) - U_l\, I_l \cos(30° + \varphi)] = \sqrt{3}\, U_l\, I_l \sin \varphi \cdot$$

În cazul unei distribuții neuniforme a sarcinii pe faze, puterea și energia reactivă pot fi măsurate cu wattmetre și contoare speciale, montate așa cum se arată în fig. 15-58. În acest caz, tensiunile trebuie să fie

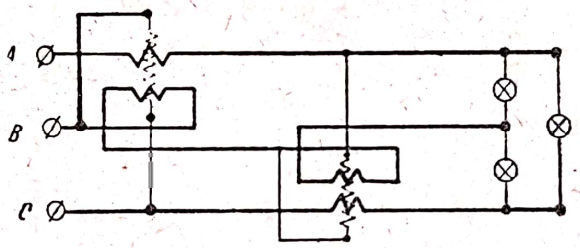


Fig. 15-58. Schema legării în circuit a contorului de energie reactivă

simetrice și să fie respectată, la montarea aparatelor în circuit, ordinea de succesiune a fazelor. Aceleași instrumente pot fi folosite și în circuitele trifazate cu fir neutru.

15-28. Măsurarea factorului de putere

În cazul circuitului monofazat, factorul de putere ($\cos \varphi$) poate fi determinat indirect, măsurînd cu un wattmetru puterea activă P a circuitului, cu un voltmetru tensiunea U, cu un ampermetru curentul I și aplicînd relația

$$\cos \varphi = \frac{P}{U\, I} \cdot$$

Această metodă prezintă inconvenientul că necesită citirea simultană a trei aparate de măsură, însoțită de erorile de indicație și de citire respective. În afară de aceasta, la valori mici ale decalajului, cînd $\cos \varphi$ variază între 0,95 și 1, metoda nu prezintă suficientă precizie deoarece, la asemenea decalaje, o eroare oricît de mică în indicațiile apara-

telor sau în citirea lor, antrenează o eroare sensibilă în determinarea valorii lui cos φ și a decalajului φ.

Metoda aceasta, de măsurare a factorului de putere și a decalajului cu ajutorul unui wattmetru, unui ampermetru și unui voltmetru, se poate aplica și circuitelor trifazate, cu condiția însă ca sarcina să fie uniform repartizată pe faze, adică decalajul φ să se păstreze același pentru fiecare din faze.

O metodă mai precisă de măsurare a factorului de putere și a decalajului, în cazul circuitelor trifazate uniform încărcate, aplicată mai ales la încărcările industriale ale electromotoarelor, este metoda utilizării relației (15-31)

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}, \qquad (15\text{-}37)$$

în care P_1 și P_2 sînt indicațiile a două wattmetre monofazate, montate

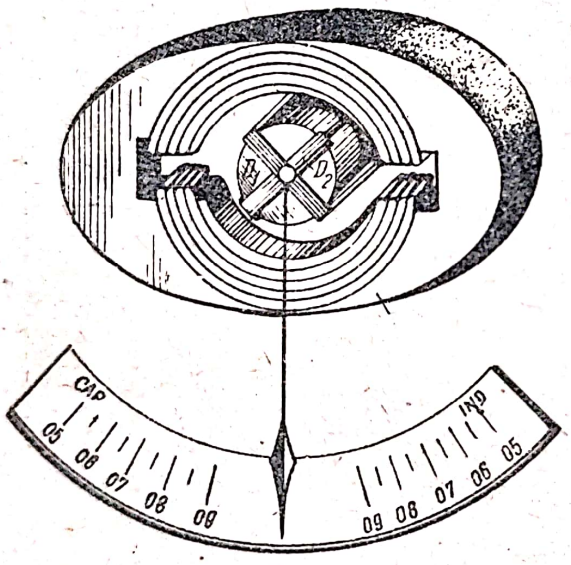


Fig. 15-59. Schema constructivă a fazmetrului ferodinamic

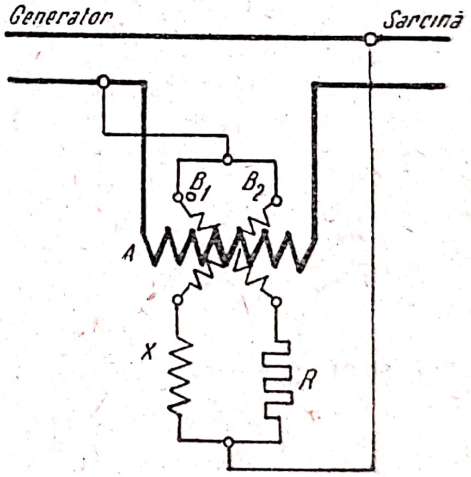


Fig. 15-60. Schema legării în circuit a unui fazmetru ferodinamic

pentru măsurarea puterii active a circuitului prin metoda celor două watmetre (fig. 15-50).

Din relația (15-37) calculăm decalajul φ și, cu ajutorul acestuia, pe cos φ.

În afară de aceste metode indirecte de măsurare a factorului de putere și a decalajului, există și aparate speciale care ne permit măsurarea directă a valorii decalajului φ, prin citirea lui pe scara aparatului. Asemenea aparate se numesc *fazmetre*.

Fazmetrele sînt construite, cel mai adesea, pe principiul electrodinamic. În fig. 15-59 este redată, schematic, construcția unui fazmetru ferodinamic.

Într-un fazmetru electrodinamic monofazat, echipajul mobil se compune din două bobine voltmetrice B_1 și B_2 (fig. 15-60), cuplate rigid între ele sub un unghi drept și fixate pe același ax. Aceste bobine sînt

legate în derivație pe circuitul electric. Echipajul mobil se găsește în interiorul unei bobine fixe A, bobina ampermetrică a aparatului, care se leagă în serie cu circuitul electric.

Bobina B_1 a echipajului mobil este legată în serie cu o rezistență R, iar bobina B_2, cu o reactanță inductivă X. Rezistența R și reactanța X sînt astfel alese încît curenții I_1 și I_2 care parcurg, respectiv, bobinele B_1 și B_2, să fie decalați între ei cu 90^0. La un decalaj φ între curentul I și tensiunea U a circuitului electric, curentul I_1, care este în fază cu tensiunea U_1, este decalat cu unghiul φ față de curentul I, iar curentul I_2 este decalat cu 90^0 față de tensiunea U și cu $(90^0 - \varphi)^0$ față de curentul I (fig. 15-61).

Prin acțiunea dintre cîmpul bobinei fixe A, parcurse de curentul I, și cîmpul bobinei mobile B_1, parcurse de curentul I_1, se creează un cuplu motor dat de relația

$$M_{m1} = k_1 I I_1 \cos\varphi \sin\alpha ;$$

în care α este unghiul cu care sistemul mobil deviază față de axul bobinei fixe A (fig. 15-62).

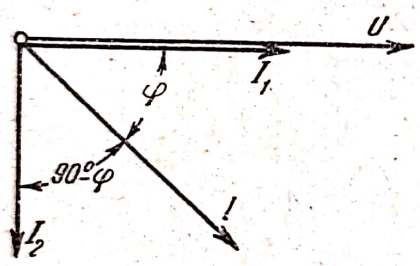


Fig. 15-61. Descompunerea curentului în fazmetru

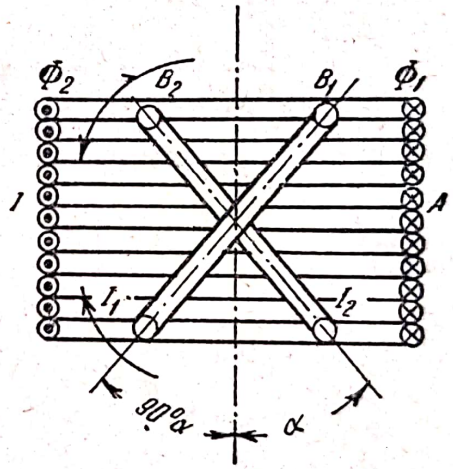


Fig. 15-62. Acțiunea reciprocă a bobinelor fazmetrului ferodinamic

De asemenea, prin acțiunea dintre cîmpul bobinei fixe A și cîmpul bobinei mobile B_2, parcurse de curentul I_2, se creează un cuplu motor dat de relația

$$M_{m2} = k_2 I I_2 \cos(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \alpha) = k_2 I I_2 \sin\varphi \cos\alpha .$$

Deviația echipajului mobil încetează cînd cele două cupluri motoare sînt egale, adică atunci cînd

$$k_1 I I_1 \cos\varphi \sin\alpha = k_2 I I_2 \sin\varphi \cos\alpha ,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 I I_2}{k_1 I I_1} \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{I_2}{I_1} \operatorname{tg}\varphi$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha = k \operatorname{tg}\varphi , \qquad (15\text{-}38)$$

deoarece curenţii I_1 şi I_2 sînt constanţi, depinzînd numai de tensiunea aplicată.

Prin urmare, aparatul ne dă direct decalajul.

Scara aparatului poate fi etalonată pentru a ne da sau unghiul de decalaj φ, $\cos\varphi$ sau $\operatorname{tg}\varphi$. În acest din urmă caz unghiul φ îl găsim cu ajutorul tabelelor trigonometrice, iar factorul de putere cu ajutorul relaţiei

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} . \qquad (15\text{-}39)$$

Din expresia (15-38), rezultă că la o schimbare a semnului unghiului φ se schimbă şi semnul unghiului α. Prin urmare, la o sarcină capacitivă, echipajul mobil se deplasează în sens invers decît se deplasează la sarcini inductive. Rezultă că fazmetrele se pot construi cu scară bilaterală, pentru sarcini inductive şi capacitive (fig. 15-59).

Fazmetrul electrodinamic trifazat se întrebuinţează atunci cînd ten-

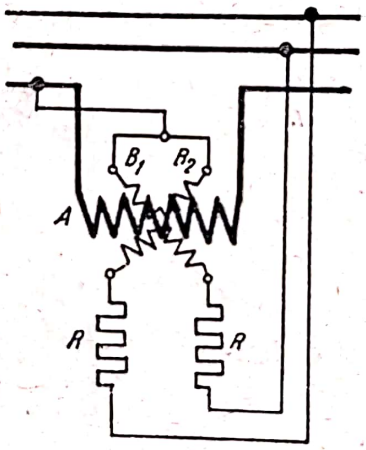


Fig. 15-63. Schema fazmetrului ferodinamic trifazat

siunile sînt simetrice şi încărcarea fazelor uniformă. Aparatul măsoară decalajul dintre curentul pe fază şi tensiunea pe fază care este acelaşi pentru toate trei fazele.

Într-un fazmetru electrodinamic trifazat (fig. 15-63) defazarea dintre curenţii I_1 şi I_2, necesară funcţionării aparatului, se obţine prin conectarea, în serie cu bobinele B_1 şi B_2, a rezistenţelor R_1 şi R_2, legate la faze diferite ale circuitului trifazat.

15-29. Frecvenţmetre

Măsurarea frecvenţei curentului alternativ se face cu aparate numite *frecvenţmetre*.

Cel mai răspîndit frecvenţmetru este frecvenţmetrul cu *vibraţie* sau *de rezonanţă*. Un asemenea aparat dispune de o serie de lamele L de oţel

(fig. 15-64), de diferite lungimi și grosimi, așezate una lîngă alta și fixate, la un capăt, de o bară orizontală metalică K. Capătul liber al lamelelor este îndoit în unghi drept și vopsit în partea exterioară cu alb. De placa K este fixată piesa de oțel A care constituie armătura unui electromagnet M. La rîndul ei, bara K este fixată de carcasa aparatului, prin intermediul a două plăci flexibile F.

Dacă alimentăm bobina electromagnetului cu un curent alternativ, armătura sa A este supusă unui număr de vibrații egal cu dublul frec-

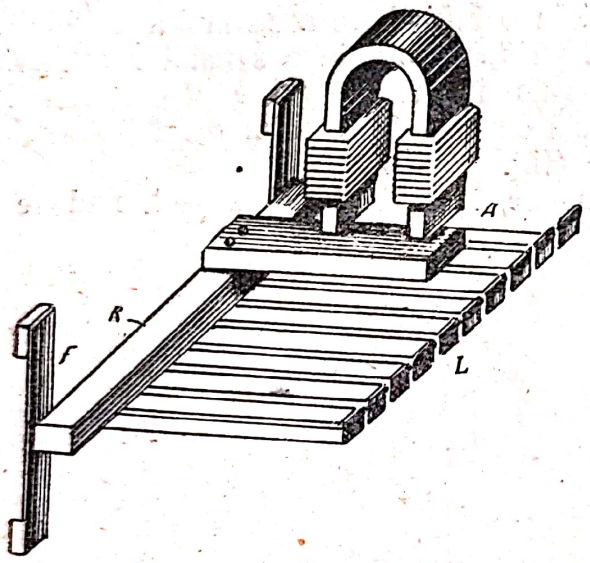


Fig. 15-64. Sistemul vibrator al frecvențmetrului

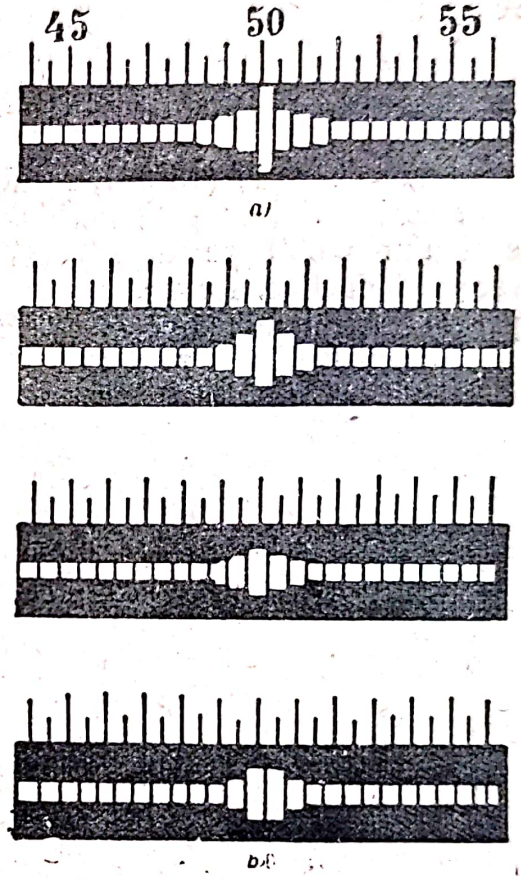


Fig. 15-65. Aspectele vibrațiilor frecvențmetrului, pentru diverse frecvențe. De sus în jos 50,0 ; 50,1 ; 50,2 ; 50,25 Hz.

venței acestui curent, deoarece, în cursul unei perioade a curentului, armătura este de două ori atrasă de electromagnet (cînd curentul trece prin valorile pozitive și negative) și de două ori eliberată (cînd curentul trece prin zero). Vibrațiile armăturii A sînt transmise, prin intermediul barei K, lamelelor L care vor executa, la rîndul lor, aceleași mișcări oscilatorii ca și armătura. Obișnuit vibrațiile lamelelor sînt însă foarte mici, aproape imperceptibile ochiului.

Dacă frecvența oscilațiilor proprii ale uneia din lamelele L coincide cu dublul frecvenței curentului alternativ care alimentează bobina electromagnetului, această lamelă intră în rezonanță mecanică, amplitudinea oscilațiilor sale este puternică și devine vizibilă (fig. 15—65 *a*).

Lamelele avînd lungimi și grosimi diferite, posedă fiecare o altă frecvență de rezonanță, deci la fiecare schimbare a frecvenței curentului

vibrează perceptibil altă lamelă. Aparatul este etalonat direct în hertzi, valoarea frecvenței fiind dată de diviziunea scării în dreptul căreia vibrează lamela aflată în rezonanță. Deoarece odată cu această lamelă vibrează, cu mai puțină intensitate, și lamelele vecine a căror frecvență de rezonanță este apropiată de aceea a curentului, frecvența curentului este dată de lamela care vibrează cu amplitudinea maximă. Dacă vibrează simultan două lamele cu aceeași amplitudine (fig. 15-65 b), frecvența curentului este egală cu media indicațiilor scării din dreptul celor două lamele. În fig. 15-65 *a* frecvențmetrul indică 50 Hz, iar în fig. 15-65 *b*, 50,25 Hz.

Frecvențmetrul se leagă întocmai ca și un voltmetru, deci între bornele de tensiune ale circuitului.

15-30. Aparate înregistratoare

În afară de aparatele examinate pînă acum, care ne măsoară mărimile respective, există și aparate care, simultan cu măsurarea, înregistrează grafic mărimile măsurate, dînd curbele de variație în timp a acestor mărimi. Asemenea aparate se numesc *aparate înregistratoare*.

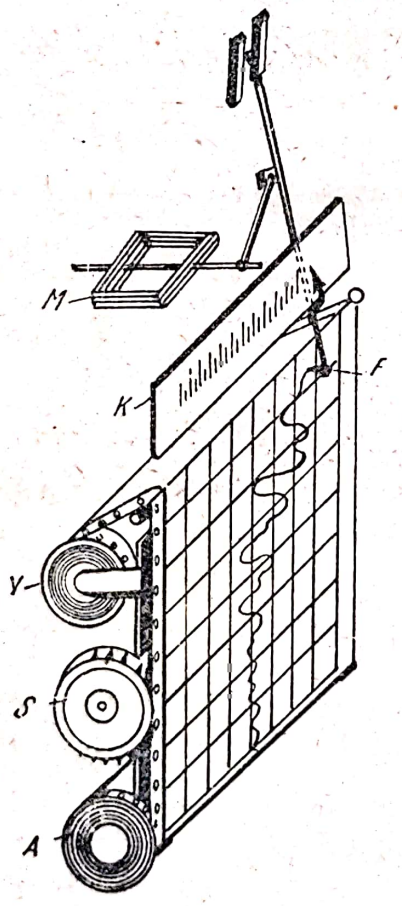


Fig. 15-66. Dispoztivul de înregistrare al unui aparat înregistrator cu înregistrare continuă

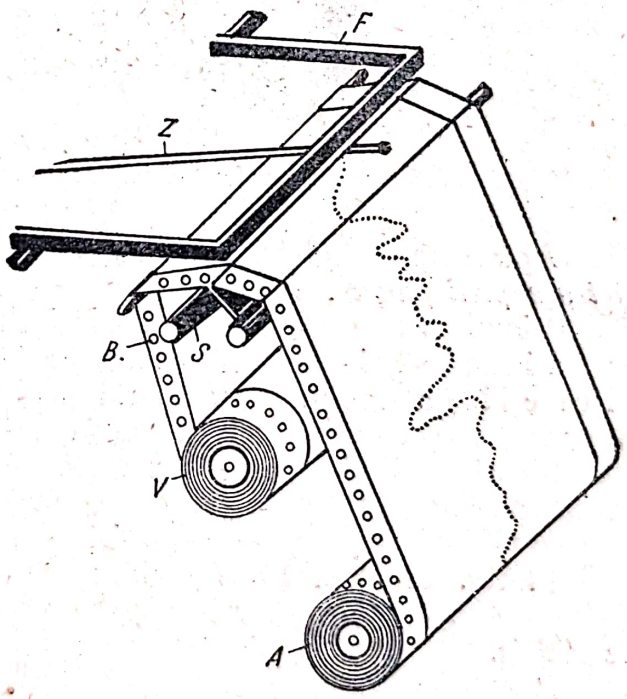


Fig. 15-67. Dispozitivul de înregistrare al unui aparat înregistrator cu înregistrare prin puncte

Echipajul mobil al aparatelor înregistratoare, pe lîngă acul indicator, este prevăzut cu un dispozitiv pentru înregistrarea indicațiilor pe o bandă de hîrtie care se deplasează cu ajutorul unui mecanism special de ceasornicărie.

Banda de hîrtie este prevăzută cu linii de-a lungul şi de-a latul ei care reprezintă scara timpului şi scara mărimii înregistrate de aparat.

Înregistrările se fac cu ajutorul unei peniţe acţionată de acul indicator al aparatului. Cel mai adesea, peniţa are forma unui tub capilar de sticlă, îndoit în unghi drept, unul din capete fiind în contact cu banda de hîrtie celălalt fiind cufundat într-un rezervor de cerneală.

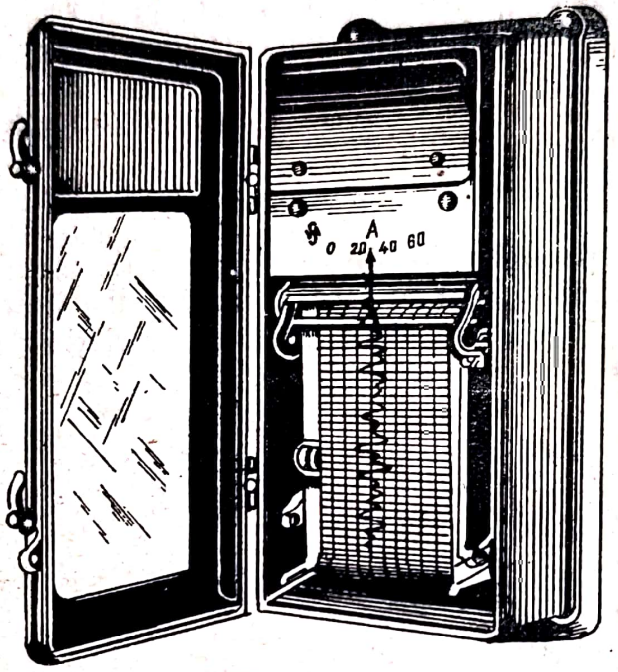


Fig. 15-68. Vedere exterioară a unui aparat înregistrator

Aparatele înregistratoare pot fi cu *înregistrare continuă* şi cu *înregistrare prin puncte.*

Primul sistem se aplică atunci cînd mărimile de măsurat sînt destul de mari încît să fie capabile să producă un cuplu suficient pentru a putea mişca echipajul mobil care poartă peniţa de înregistrare, învingînd rezistenţa de frecare a peniţei pe banda de hîrtie. Al doilea sistem se aplică atunci cînd mărimile de măsurat sînt foarte mici şi nu ar putea mişca peniţa de înregistrare. Sistemul se mai aplică şi cînd se urmăreşte să se obţină indicaţii de mare precizie.

În fig. 15-66 şi 15-67 sînt reprezentate dispozitivele de înregistrare ale celor două sisteme, iar în fig. 15-68, aspectul unui aparat înregistrator de tablou.

15-31. Oscilografe

Numim *oscilografe* aparatele care servesc pentru examinarea şi, eventual, înregistrarea prin fotografiere a curbelor de variaţie în timp a unor mărimi care variază foarte rapid, cum ar fi de pildă tensiunea, curentul şi puterea alternativă etc.

După construcţia şi modul lor de funcţionare, oscilografele se împart în două categorii diferite fundamental una faţă de cealaltă: a) *oscilografe cu inerţie,* prevăzute cu un echipaj mobil mecanic şi b) *oscilografe*

fără inerție, în care elementul mobil este constituit dintr-un fascicol de electroni.

Oscilografele cu inerție se construiesc după unul din următoarele principii de funcționare: magnetoelectric, electromagnetic, ferodinamic și electrostatic. Cele mai răspîndite oscilografe sînt însă cele magnetoelectrice.

Un asemenea oscilograf este compus dintr-un vibrator, un sistem optic și un dispozitiv pentru observarea și fotografierea curbelor studiate.

În oscilagraful magnetoelectric, vibratorul este format dintr-un magnet permanent puternic *M* (fig. 15-69), în al cărui întrefier, redus la minimum, se află întinsă o buclă formată dintr-o panglică metalică foarte subtire B_1 prin care trece curentul de studiat. Pe buclă este fixată o mică

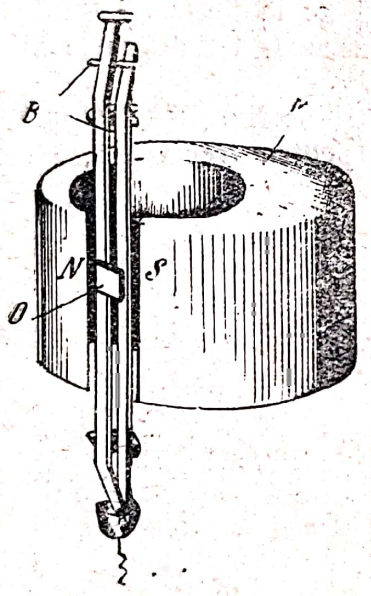


Fig. 15-69. Sistemul magnetic al unui oscilograf

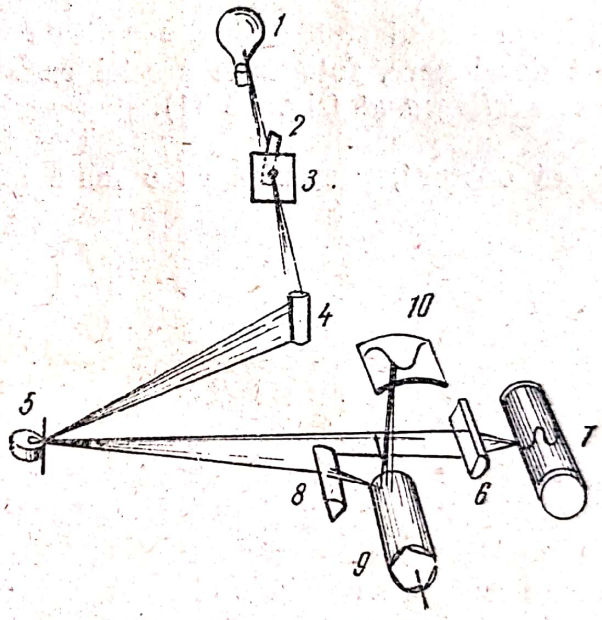


Fig. 15-70. Principiul de construcție și schema optică a oscilografului

oglinjoară *O*, ale cărei laturi sînt de circa 1 mm. Bucla, împreună cu oglinjoara, constituie echipajul mobil al aparatului.

Sistemul optic al unui oscilograf cu inerție se compune dintr-o sursă de lumină *1* (fig. 15-70) al cărui fascicul de raze trece printr-o prismă *2*, o diafragmă *3* și printr-o prismă triunghiulară de reglaj *4* care concentrează fasciculul pe oglinjoara *5* a vibratorului. Oglinjoara vibratorului reflectă cea mai mare parte a fasciculului luminos pe lentila cilindrică, *6* care îl concentrează în focarul său, pe suprafața cilindrică a tamburului *7* pe care se află hîrtie sensibiă sau film fotografic. Restul fasciculului luminos reflectat de oglinjoara vibratorului este cules de prisma triunghiulară *8*, care îl transmite suprafeței unui tambur prismatic *9*, acoperit cu oglinzi plane care, la rîndul său, îl îndreaptă spre un ecran mat *10*.

Să urmărim acum modul de funcționare al aparatului.

La trecerea prin bucla vibratorului a curentului de studiat sau a unui curent proporțional cu tensiunea de studiat, bucla și, împreună cu ea, oglinjoara va suferi din partea cîmpului magnetic permanent o de-

viație din poziția de echilibru proporțională cu valoarea curentului. Dacă avem de-a face cu un curent alternativ, bucla împreună cu oglinjoara va devia periodic, cînd într-un sens cînd în altul, după sensul curentului din buclă, executînd astfel o mișcare oscilatorie în jurul axei sale verticale, cu o frecvență egală cu aceea a curentului de studiat.

Dacă în timpul acestor oscilații trimitem un fascicul luminos spre oglinjoara *5*, iar tamburul cilindric *7* și cel prismatic *9* stau pe loc, pe ecranuul *10* apare o fîșie luminoasă paralelă cu axa tamburului *9*, iar după developarea filmului sau a hîrtiei sensibile de pe tamburul cilindric *7* apare o fîșie (neagră pe hîrtie, albă pe film) paralelă cu axa acestui tambur, fîșie a cărei lungime este egală cu suma celor două amplitudini, cea pozitivă și cea negativă, a curentului studiat.

Dacă cele două tambururi *7* și *9*, antrenate de un mic motor electric, se rotesc cu o anumită viteză uniformă, pe ecranul *10* apare curba fixă a curentului studiat, iar pe pelicula purtată de tamburul *7* se obține, după developare, fotografia acestei curbe. O asemenea fotografie se numește *oscilogramă* (fig. 15-71).

Tamburul cilindric *7*, împreună cu filmul respectiv, este închis într-o cameră obscură, prevăzută cu o fantă îngustă pentru trecerea fasciculului

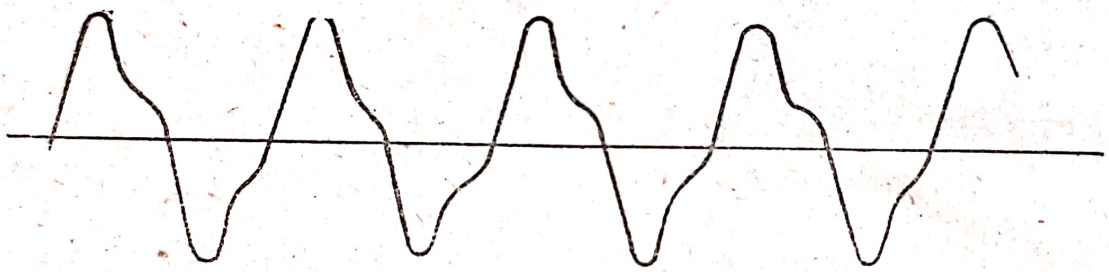


Fig. 15-71. Aspectul unei oscilograme

de lumină care se închide și se deschide automat, după principiul de obturație al aparatelor fotografice.

Oscilografele actuale se construiesc cu trei sau mai multe echipaje (bucle) de măsurare, putîndu-se astfel observa și înregistra simultan un număr corespunzător de procese variabile.

Oscilograful permite observarea și fotografierea nu numai a fenomenelor periodice, ci și acelor tranzitorii.

Oscilografele cu inerție pot fi folosite pentru studiul fenomenelor periodice oscilatorii a căror frecvență nu depășește 10 000 Hz și a fenomenelor aperiodice, cu o durată de minimum 1 μs. Peste aceste limite, se utilizează oscilografele fără inerție care se numesc, în mod curent, *oscilografe catodice*. De oscilografele catodice ne vom ocupa în vol. II al lucrării.

CAPITOLUL XVI

MĂSURAREA PE CALE ELECTRICĂ A MĂRIMILOR NEELECTRICE

16-1. Considerații generale

În prezent tehnica măsurărilor electrice depășește cu mult domeniul electrotehnic, găsindu-și o largă aplicare în diverse alte domenii ale tehnicii.

Aparatele electrice de măsură se folosesc, din ce în ce mai frecvent, la măsurarea mărimilor mecanice, termice, optice, chimice, acustice etc. Se măsoară pe cale electrică: dimensiuni liniare, viteze unghiulare, accelerații, presiuni, deplasări, cupluri de torsiune, deformații și solicitări interioare ale materialelor, temperaturi, cantități de căldură, diferențe de nivel ale lichidelor, concentrația lichidelor și a gazelor, concentrația ionilor de hidrogen în soluțiile chimice, gradul de umiditate etc.

Nu se poate concepe astăzi o industrie metalurgică, chimică, textilă, petroliferă etc. care să nu utilizeze, pentru controlul și comanda proceselor sale de producție, aparatura necesară măsurării electrice a mărimilor neelectrice.

Preferința care se dă metodei măsurării pe cale electrică a mărimilor neelectrice se datorește calităților acestui sistem în comparație cu vechile mijloace de măsurare. Primul și totodată cel mai important avantaj al acestei metode constă în posibilitatea de a se transmite la distanță măsurătorile efectuate. Se asigură astfel posibilitatea centralizării, pe un tablou, a rezultatelor măsurării simultane a diverșilor parametri, diferiți prin natura lor, corespunzători unui aceluiași proces și se realizează, mai bine decît cu oricare alte instrumente de măsură, controlul simultan și automat de la distanță.

Alt avantaj îl constituie posibilitatea, practic nelimitată, de automatizare și de înregistrare continuă a oricărui proces de măsurare, oricît de complex ar fi el. Se transformă astfel metodele manuale subiective, în metode obiective, putîndu-se compara între ele, ușor și exact, rezultatele obținute. Se poate da ca exemplu automatizarea unora din analizele chimice.

Este de remarcat că în toate aceste măsurări pe cale electrică, inerția de înregistrare poate fi redusă la limita necesară obținerii unei fidelități satisfăcătoare, cînd este vorba de măsurarea unor fenomene care variază rapid. În această privință, un exemplu grăitor îl constituie oscilograful catodic.

Scanned with OKEN Scanner

Un alt avantaj, nu mai puțin important, al măsurării electrice a mărimilor neelectrice îl prezintă faptul că această metodă permite determinarea automată a unei mărimi mai complicate (depinzînd, de pildă, de mai mulți factori), din măsurările efectuate asupra unor mărimi simple, cum ar fi, de pildă, produsul sau cîtul mărimilor simple, integrala în timp sau derivata unei mărimi simple etc. Se pot efectua în mod automat, pe această cale calcule matematice complete și obține energii consumate, cantități de abur livrate etc.

În sfîrșit, un alt mare avantaj al acestei metode constă în posibilitatea de a se obține cu ușurință game întinse de măsurări cu aceleași aparate, prin modificarea sensibilității instrumentului electric respectiv de măsurare.

16-2. Caracteristicile aparaturii pentru măsurarea electrică a mărimilor neelectrice

Pentru a se măsura o mărime neelectrică prin metode electrice trebuie, în prealabil, ca mărimea neelectrică să fie transformată într-una electrică. Rezultă că, prin natura sa, aparatura necesară este în general mai complicată decît aceea utilizată pentru măsurarea mărimilor electrice și posedă un specific al său propriu, legat de acest domeniu al tehnicii măsurărilor.

O asemenea aparatură constă, în general, din următoarele trei elemente:

a) Un aparat denumit *traductor* sau *mutator,* al cărui rol este să transforme direct mărimea neelectrică de măsurat într-o mărime electrică. Un asemenea aparat mai poartă și numele de *receptor.*

Uneori, mărimea neelectrică se măsoară, în prealabil, cu un aparat de măsură neelectric (mecanic, termic, optic etc.), rezultatul acestei măsurări exprimîndu-se, de regulă, prin deplasarea indicatorului aparatului mecanic de măsură. În acest caz traductorul, care acum poartă și denumirea de *emițător,* transformă acest rezultat într-o mărime electrică.

În general, funcționarea traductoarelor se bazează pe dependența unui parametru electric al corpurilor solide, lichide sau gazoase de mărimea neelectrică de măsurat, de exemplu: (I) variația rezistenței cu temperatura, a capacității cu distanța între armături, a inductanței cu variația reluctanței etc. sau (II) apariția de f.e.m., fie prin inducție electromagnetică, fie pe cale electrostatică, termoelectrică, fotoelectrică etc. Traductoarele, al căror principiu de funcționare se bazează pe fenomenele (I) se numesc *traductoare parametrice,* iar cele care se bazează pe fenomenele (II), *traductoare generatoare.*

b) *Aparatul electric de măsură* propriu zis, construit după unul din principiile obișnuite, a cărui scară este gradată de regulă direct în unitățile mărimii neelectrice de măsurat.

c) Aparatura denumită *schema electrică* care face legătura între traductor și aparatul electric de măsură.

Cel mai adesea, această aparatură este deservită de o sursă de energie electrică auxiliară care, în unele cazuri, alimentează numai schema electrică. Alteori, traductorul însuși constituie sursa de energie electrică, atît pentru schemă cît și pentru aparatul electric de măsură.

Scanned with OKEN Scanner

Schemele electrice se reduc, uneori, la simple conductoare de legătură între traductor și aparatul de măsură. Alteori, asemenea scheme pe lîngă conductoarele de legătură conțin, de pildă, punți de curent continuu sau alternativ, potențiometre de curent continuu etc.

În sfîrșit, în unele cazuri schema de conexiuni este și mai complicată, conținînd o serie de aparate auxiliare, precum: dispozitive de amplificare a curentului sau a tensiunii înainte de a intra în aparatul electric de măsură, dipozitive de redresare a unui curent alternativ (vezi vol. II) pentru a putea fi măsurat cu un aparat electric de curent continuu etc.

În cele ce urmează, vom examina cîteva exemple de aparate mai simple, pentru măsurarea electrică a mărimilor neelectrice. Și, deoarece fiecare aparat are numeroase variante constructive, bazate pe fenomene diferite, vom descrie numai unele din aceste variante.

16-3. Măsurarea electrică a dimensiunilor liniare

Într-o serie de industrii, în special în cea a metalurgiei prelucrătoare, este ecesară o măsurare a dimensiunilor liniare sau, mai bine

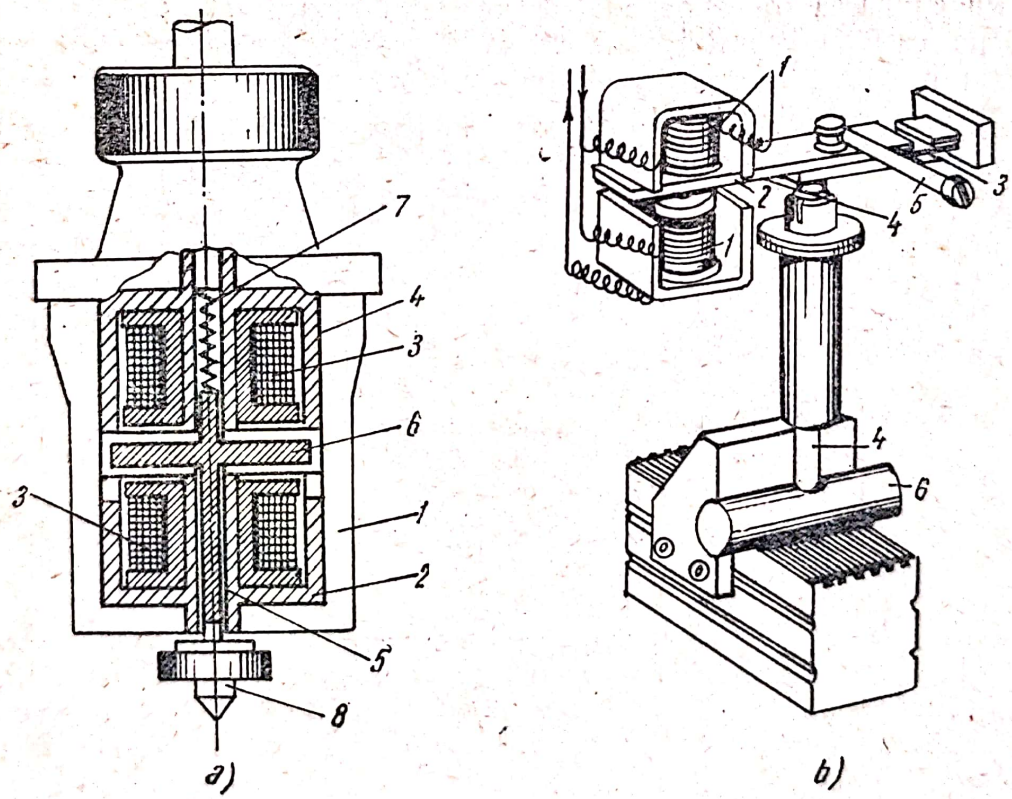


Fig. 16-1. Traductorul micrometrului inductiv:
a) fără pîrghii, *b*) cu pîrghii de transmisie

zis, a abaterilor de la o lungime normală, cu o mare precizie, împinsă uneori pînă la cîțiva microni.

Se obțin asemenea precizii prin măsurări electrice, utilizîndu-se în acest scop, între altele, *micrometre inductive* și *micrometre capacitive*.

Traductorul micrometrului inductiv (fig. 16-1) transformă o mică deplasare geometrică a unei armături într-o variație a inductanței unei bobine.

În fig. 16-1*a* este reprezentat traductorul unui micrometru inductiv fără pîrghii.

În corpul *1*, confecționat din material nemagnetic, se găsesc două bobine *3*, așezate pe miezurile *2* și *4* din fier moale. O armătură din fier moale *6* este fixată pe axul *5* care trece prin ambele miezuri. Un capăt al axului constituie piciorul de măsurat *8* al traductorului, celălalt capăt se reazimă pe reostatul *7* care produce presiunea necesară măsurării. La orice abatere a dimensiunii de măsurat de la lungimea standard, armătura se deplasează și, în modul acesta, variază în sens invers inductanțele bobinelor *3*.

Fig. 16-1 b reprezintă traductorul unui micrometru inductiv cu pîrghii de transmisie. Sînt notate cu *1* bobinele, *2* armătura, *3* arcul elastic al armăturii, *4* tijele de transmisie, *5* șurubul de reglaj și *6* obiectul de măsurat.

Bobinele traductorului sînt montate într-o punte de curent alternativ și dezechilibrul punții, produs prin variația diferențială a inductanțelor, este măsurat cu un aparat de curent continuu, după ce în prealabil curentul a fost redresat.

Funcționarea traductorului micrometrului capacitiv (fig. 16-2) se bazează pe variația capacității dintre două armături, cînd una din ele se deplasează.

Traductorul din fig. 16-2*a* este înzestrat cu o tije de măsurare *1* care se reazimă cu un capăt pe obiectul de măsurat 2, iar cu celălalt

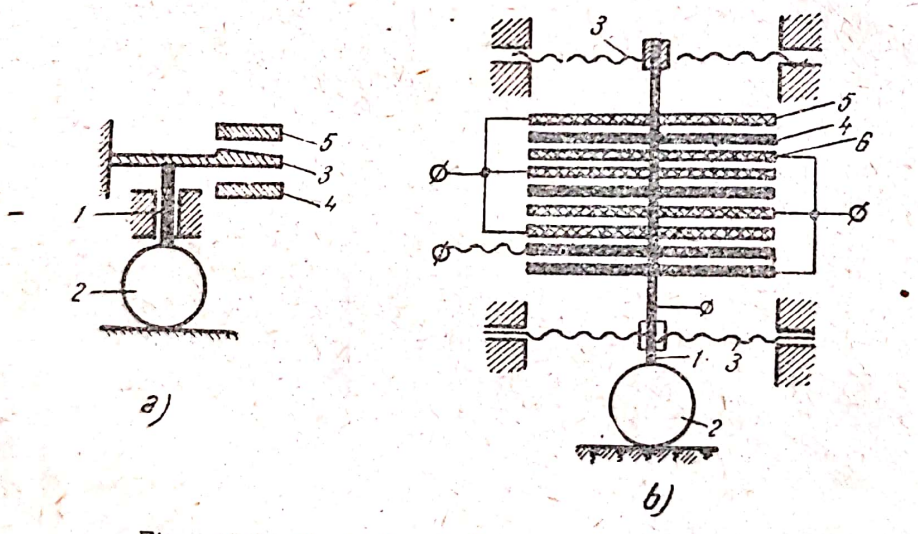


Fig. 16-2. Traductorul micrometrului capacitiv

capăt deplasează o placă *3*, fixată de un arc elastic. Placa mobilă *3* și plăcile fixe *5* constituie două condensatoare diferențiale, a căror capacitate variază în sens invers și depinde de dimensiunile obiectului de măsurat.

În fig. 16-2 b este redat principiul constructiv al unui micrometru capacitiv, de mare sensibilitate, ale cărui condensatoare diferențiale sînt formate din mai multe plăci. Tija de măsurare *1* este susținută de lamele flexibile *3* și poartă plăcile mobile *4* ale condensatoarelor. Aceste plăci mobile sînt dispuse între două sisteme de plăci fixe *5* și *6*, cu care for-

mează două condensatoare *4-5* și *4-6*. Capacitatea acestor condensatoare variază în sens invers la orice deplasare a tijei.

Ca și în cazul precedent, schema electrică a acestui traductor conține o punte de curent alternativ și determinarea dimensiunii liniare se obține prin măsura dezechilibrului punții, citită pe un aparat de curent continuu etalonat în unități de lungime.

Un asemenea aparat se poate utiliza, de pildă, pentru sortarea bilelor de rulmenți, putînd indica chiar fracțiuni de micron.

Pentru măsurarea *grosimii tolelor*, cînd se dispune de o singură față a acestora, se utilizează una din următoarele metode: a rezistenței electrice a tolei, a inducției electromagnetice, a radiațiilor și a ultrasunetelor.

Vom examina primele două metode.

În fig. 16-3 este reprezentată schema aparatului pentru măsurarea grosimii tolelor late de metal prin metoda rezistenței electrice.

Experimental se constată că dacă se trece prin tolă un curent constant furnizat de o sursă exterioară de c. c. și se măsoară, cu ajutorul unei perechi de electrozi, căderea de tensiune între două puncte de pe

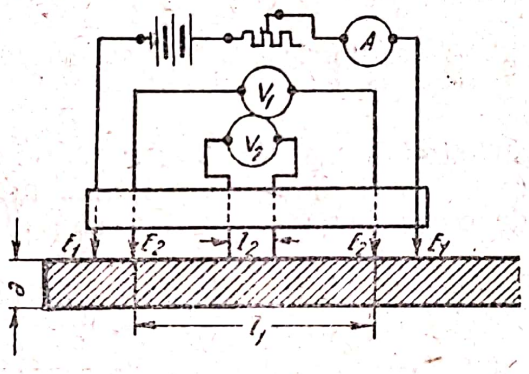


Fig. 16-3. Schema aparatului pentru măsurarea grosimii tolelor metalice prin metoda rezistenței electrice

suprafața tolei, această cădere de tensiune, indicată de un voltmetru, variază cu grosimea tolei și cu rezistivitatea materialului acesteia. Din această cauză, ar fi necesară o etalonare a aparatului de măsură pentru fiecare material în parte.

Se presupunem că, în loc să se folosească o pereche de electrozi, se folosesc perechile E_1-E'_1 și E_2-E'_2, în prima pereche electrozii fiind așezați unul față de altul la o distanță $l_1 > a$ grosimea tolei, iar în cea de a doua, la o distanță $l_2 < a$. Dacă notăm cu U_1 și U_2 căderile de tensiune respective, se poate arăta că raportul U_1/U_2 este funcție numai de valorile l_1/a și l_2/a și nu depinde nici de intensitatea curentului, nici de materialul din care este făcută tola. Deci se poate scrie

$$\frac{U_1}{U_2} = f\left(\frac{l_1}{a}, \frac{l_2}{a}\right).$$

Pentru valori date ale lungimilor l_1 și l_2, relația precedentă devine

$$\frac{U_1}{U_2} = f_1(a).$$

Raportul tensiunilor se citește cu un logometru (vezi par. 15-17), a cărui etalonare se face direct în unități de grosime a tolelor.

În cazul unor grosimi foarte mici, cum sînt straturile depunerilor superficiale pe cale galvanică, se utilizează *metoda inducției electromagnetice*.

Funcția de traductor este îndeplinită, în această metodă, de un transformator electric *Tr* (fig. 16-4), al cărui flux magnetic se închide

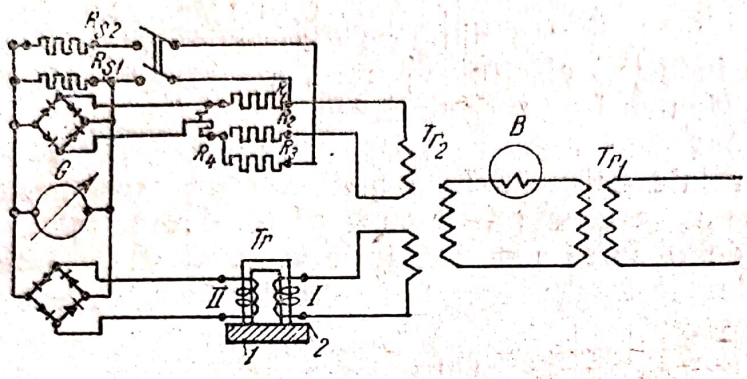


Fig. 16-4. Schema aparatului pentru măsurarea grosimii straturilor galvanice

prin tola *1* și prin stratul metalic *2* depus prin galvanostegie. Intensitatea curenților Foucault induși de fluxul alternativ al transformatorului depinde de conductanța electrică a stratului, deci de grosimea acestuia.

Prin înfășurarea secundară II a transformatorului trece atît fluxul primar al acestuia, cît și fluxul produs de curenții Foucault care, conform legii lui Lenz, se opune fluxului primar, deci se scade din acel flux. În consecință, tensiunea secundară a transformatorului (vezi vol. II, Transformatoarele electrice) va scădea cu atît mai mult, cu cît curenții induși în stratul depus prin galvanostegie sînt mai accentuați.

Grosimea stratului depus se măsoară cu ajutorul unui aparat electromagnetic, etalonat în unități de grosime, după redresarea în punte a curentului alternativ (vezi vol. II, redresările de curent).

Schema electrică conține un dispozitiv de compensare electrică a influenței tolei fără strat acoperitor (R_1-R_2). Prin șuntarea parțială a sursei de corectare, se pot obține două scări de măsură.

Este de remarcat că metoda nu poate fi utilizată decît pentru straturi din materiale nemagnetice, deci nu poate fi utilizată în cazul nichelării. Etalonarea aparatului depinde de natura stratului de acoperire.

Cu asemenea aparate se pot măsura grosimi pînă la 60μ.

16-4. Măsurarea electrică a deformațiilor și solicitărilor interioare

Asemenea măsurări se execută cu aparate numite *tensometre*. Deformația se măsoară determinînd variația dimensiunilor liniare a unei anumite porțiuni a piesei, deformată sub acțiunea unor sarcini statice sau dinamice.

Odată determinată deformația și cunoscînd modulul de elasticitate al materialului din care este confecționată piesa, se poate determina, cu

ajutorul legii lui Hooke, solicitarea pe suprafața porțiunii încercate a piesei.

Dimensiunea liniară a corpului, care se ia ca bază pentru determinarea solicitărilor interioare, se recomandă a fi cît mai mică. În aceste condiții, se înțelege că traductorul unui tensometru electric trebuie să fie foarte sensibil.

Deoarece, în general, direcția tensiunilor principale nu este cunoscută și tensometrele măsoară tensiunile numai de-a lungul bazei aparatului, pentru a se determina tensiunile principale se aplică metoda măsurării deformațiilor în trei direcții: într-o direcție oarecare, fixată arbitrar, și în alte două direcții, prima la 45°, a doua la 90° față de cea arbitrară.

Dintre tipurile constructive de tensometre vom examina tensometrul cu rezistență (tensometrul rezistent) și tensometrul magnetic.

În fig. 16-5 *a* este reprezentat schematic un *tensometru rezistent*

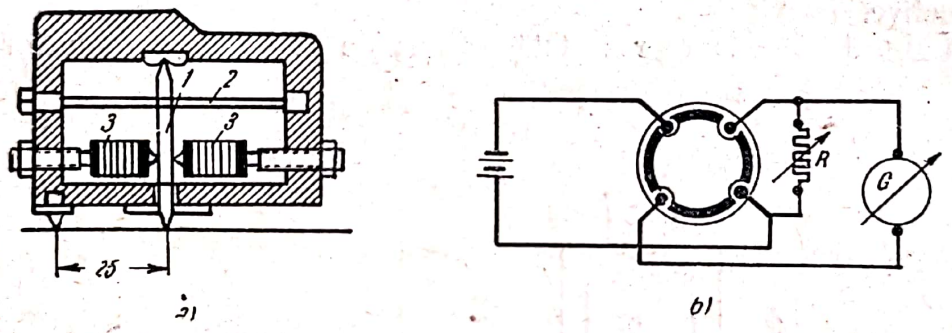


Fig. 16-5. Traductorul tensometrului cu rezistență; *a*) cu rezistențe din rondele de cărbune; *b*) cu inel din tensolit

cu cărbune, de tip diferențial, cu baza de măsură de 25 mm. Mutatorul dispune de două coloane, alcătuite din rondele de cărbune, a căror rezistență electrică depinde de presiunea la care sînt supuse rondelele.

Suportul mobil *1* al aparatului este susținut de tija 2. Coloanele *3* din rondele de cărbune au, la presiunea inițială, o rezistență de cîte 10 Ω. Coloanele de cărbune constituie două din laturile unei punți Wheatstone, alimentată sub o tensiune de 12 volți în curent continuu. La presiunea inițială, rezistențele coloanelor fiind egale, puntea se găsește în echilibru și galvanometrul indică zero.

Orice disimetrie între rezistențele celor două coloane, provocată din deformația piesei supuse unei sarcini, este scoasă în evidență în diagonala punții de curent continuu prin deplasarea acului galvanometrului, a cărui scară este gradată în microni.

Acest tensometru, datorită greutății reduse a traductorului său (cca 140 g), poate fi utilizat și la sarcini dinamice, cu o frecvență care, în unele cazuri, poate ajunge la 100 Hz.

Pentru sarcini dinamice de frecvență pînă la cca 3 000 Hz, se utilizează un tensometru în care rezistența din rondele de cărbune se înlocuiește printr-un semiconductor numit *tensolit* care se obține din praf de grafit amestecat cu lac de bachelită.

Acest material este depus într-un strat subțire pe interiorul unui inel de cca 20 mm diametru, 1 mm grosime și 5 mm lărgime, confecționat dintr-un material plastic (fig. 16-5 *b*). Prin patru puncte de contact ale stratului semiconductor se creează o punte electrică cu patru laturi.

Inelul astfel pregătit este lipit cu clei de bachelită pe piesa de încercat și puntea echilibrată cu ajutorul rezistenței variabile *R*.

Deformarea piesei antrenează o deformare a inelului. De pildă, la compresiunea orizontală a piesei inelul se va transforma într-o elipsă; cele două segmente verticale ale acestuia vor fi întinse, iar cele două segmente orizontale, comprimate. Rezistențele semiconductorului corespunzătoare acestor segmente vor varia și puntea electrică se dezechilibrează.

Această dezechilibrare ne determină deformarea în direcție orizontală.

Inelele traductoare nu pot fi utilizate decît o singură dată, deoarece ele nu se pot deslipi de pe piesa de încercat. Înainte de încercarea dinamică, se efectuiază o etalonare experimentală statică pe inelul respectiv.

Tensometrele magnetice se împart în două clase: magneto-elastice și inductive.

În fig. 16-6 este reprezentată schema de principiu a traductorului *1*

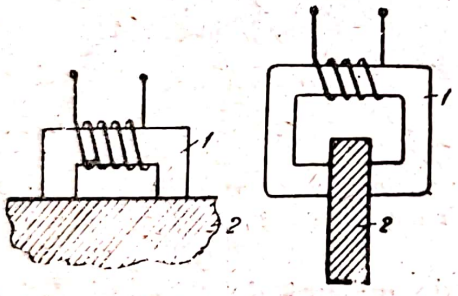


Fig. 16-6. Schema de principiu a traductorului unui tensometru magneto-elastic

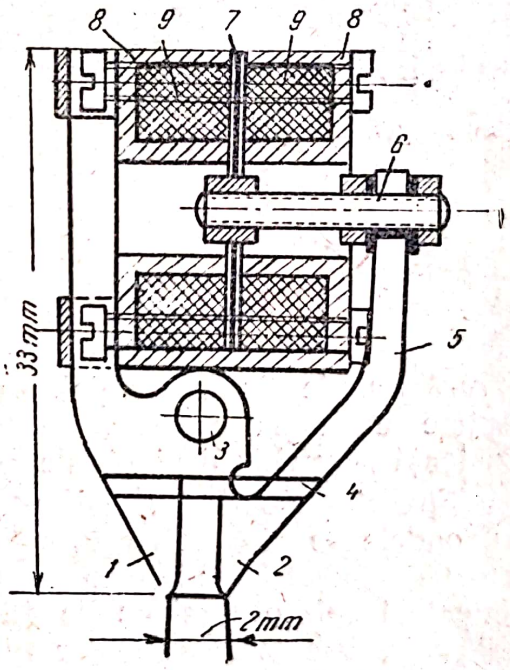


Fig. 16-7. Traductorul tensometrului inductiv

al unui *tensometru magneto-elastic*, a cărui funcționare se bazează pe variația inductanței bobinei unui circuit magnetic, din care face parte și piesa de fier sau de oțel 2 supusă încercării. Prin deformarea piesei se modifică permeabilitatea materialului său feromagnetic, deci se modifică inductanța bobinei. Pentru ca aparatul să fie sensibil, trebuie ca întrefierul circuitului magnetic să fie cît mai redus cu putință și ca reluctanța porțiunii de circuit magnetic prin piesa 2 care se încearcă să fie mare față de reluctanța restului de circuit magnetic.

În fig. 16-7 este reprezentat traductorul unui *tensometru inductiv* cu baza de 2 mm care funcționează, la fel ca și micrometrele inductive

descrise în par. 16-3, prin variația inductanței bobinei unui circuit magnetic a cărui armătură se deplasează.

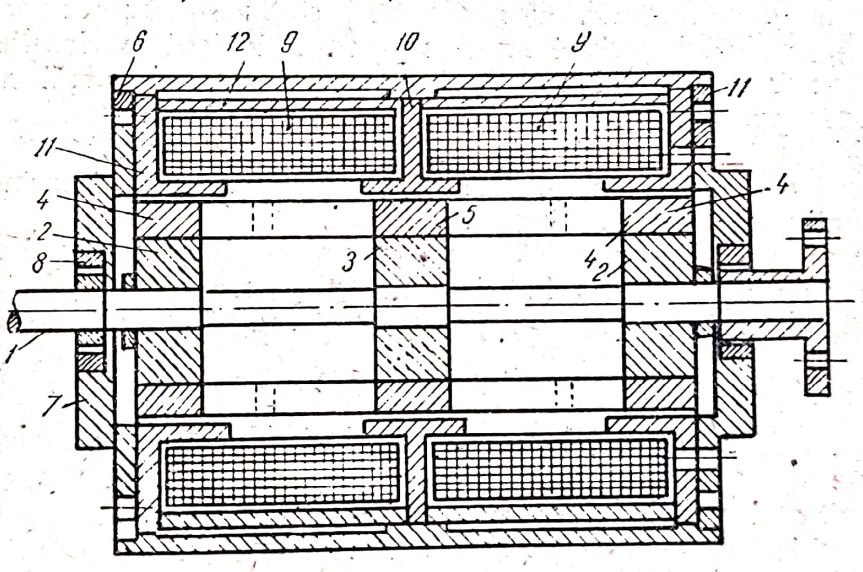
Traductorul are două picioare: piciorul *1* din stînga este fix și susține bobinele electromagnetului; piciorul *2* din dreapta este mobil și se deplasează odată cu baza, transmițînd mișcarea armăturii mobile solidară cu el. Cele două picioare sînt legate între ele, la partea lor inferioară, prin arcul plat *4*. Un buton de reglaj *6* permite așezarea inițială a armăturii *7* într-o poziție mediană. Cu *9* sînt notate bobinele și cu *8* miezul de fier al acestora. Tensometrul se fixează de piesa de încercat printr-o bară elastică de oțel care se introduce în orificiul *3*.

Schema electrică a aparatului conține o punte de curent alternativ cu redresor și aparatul indicator.

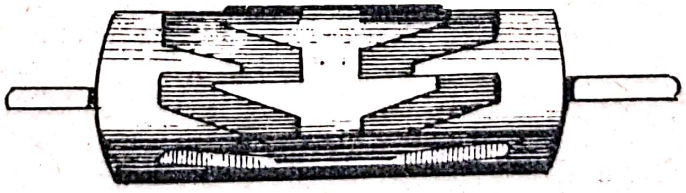
Tensometrele inductive sînt aparate foarte sensibile, permițînd citiri de ordinul cîtorva microni.

16-5. Măsurarea electrică a cuplului (momentului) de torsiune

Aparatele utilizate pentru măsurarea cuplului de torsiune al unui arbore se numesc *torsiometre*. Funcționarea acestora se bazează, în general, pe fenomenul inducției.



a)



b)

Fig. 16-8. Traductorul torsiometrului de inducție; *a)* sechma constructivă a ansamblului; *b)* rotorul

Traductorul unui torsiometru de inducție este reprezentat, schematic, în fig. 16-8.

Pe axul *1*, legat prin flanșe cu arborele de încercat, se montează trei inele metalice nemagnetice, de regulă din cupru, inelele extreme *2* și inelul din mijloc *3*. Peste aceste inele de cupru se așază trei inele de fier: inelele *4* peste inelele *2* și inelul *5* peste inelul *3*. Inelele de fier sînt prevăzute lateral cu dinți (fig. 16-8 *b*) și anume inelul din mijloc este dințat în ambele părți, iar cele din extremități au dinții îndreptați către inelul din mijloc. Acest ansamblu constituie rotorul aparatului.

Cu *6* este notat corpul statorului și cu *7* capacele sale laterale, în care sînt fixate lagărele *8*.

Statorul aparatului dispune de bobinele *9*, fixate între piesele de fier *10* și *11*. Fluxul magnetic creat de bobine se închide prin cilindrii de fier *12* parcurgînd următorul traseu: un inel de fier extrem de pe rotor, dinții acestui inel, întrefierul dintre acești dinți și dinții inelului din mijloc, inelul din mijloc, întrefierul dintre acest inel și stator, piesa magnetică *10* din mijlocul statorului, cilindrul *12*, piesa magnetică *11*, întrefierul dintre această piesă și inelul extrem al rotorului, unde se închide.

Cînd sub influența cuplului de măsurat axul traductorului se răsucește, spațiile dintre dinții unui sistem de inele ale rotorului (fig. 16-8 b), de pildă cei din stînga, se micșorează, iar spațiile dintre dinții celuilalt sistem de inele se măresc. Urmează deci că la fiecare sistem de dinți lungimea întrefierului variază în sens opus. Reluctanțele circuitelor magnetice ale celor două bobine variază în sens invers și, odată cu ele, inductanțele respective.

Traductorul se montează într-o punte de curent alternativ și dezechilibrul dintre inductanțe este măsurat cu un aparat indicator de curent alternativ, montat pe diagonala punții.

Sistemul este foarte sensibil, putîndu-se obține, la o rotire de 0,5°, o variație de cca 20% din inductanța bobinelor.

Lungimea mutatorului este de 200-300 mm.

16-6. Dinamoametre și manometre electrice

Pentru măsurarea forțelor care apar la prelucrarea mecanică a metalelor (forțe de tăiere, presiuni de ștanțare, de laminare etc.) și a presiunii gazelor și a lichidelor (la motoarele termice, pompe, compresoare etc.), se utilizează aparate numite *dinamometre* pentru forțe și *manometre* pentru presiuni.

O condiție principală pe care trebuie să o îndeplinească aceste aparate este ca ele să răspundă la o deplasare oricît de mică a organului de lucru al traductorului. Această condiție este satisfăcută pe de-a întregul de dinamometrele și manometrele cu traductoare piezoelectrice și magneto-elastice.

Fenomenul piezoelectric constă din apariția unor sarcini electrice pe suprafața unor cristale de dielectrici sub influența tensiunilor mecanice sau a deformației. La dispariția tensiunilor, dielectricul revine la starea neelectrizată.

În fig. 16-9 este reprezentată schema de principiu a traductorului unui *dinamometru piezometric*, pentru măsurat forțele de tăiere.

În corpul de fontă *1* se găsesc două plăci de cuarț *k*, de suprafață suficient de mare pentru ca presiunea pe ele să nu depășească 800 kg/cm². Între plăcile de cuarț se găsește electrodul *6*.

Grupul celor două plăci de cuarț este fixat într-o parte prin bucșa de oțel *3*, în centrul căreia se găsește bila de oțel *2*, al cărei rol este de a transmite numai componenta forței perpendiculară pe suprafața cuarțului. De cealaltă parte grupul se reazimă pe segmentul de oțel *4*, care prin strîngerea tamponului *5*, servește la egalizarea poziției plăcilor de cuarț.

Sub acțiunea forțelor de compresiune *P* aplicate pe bila *2*, electrodul *6* ia diverse potențiale față de masă, proporționale cu aceste forțe. Printr-un fir care trece printr-o bucșe izolată de chihlimbar, potențialul ob-

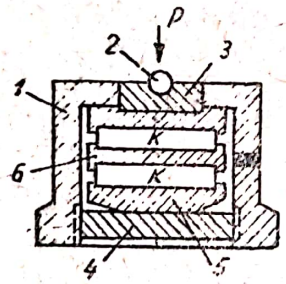


Fig. 16-9. Traductorul piezometric al unui dinamometru electric

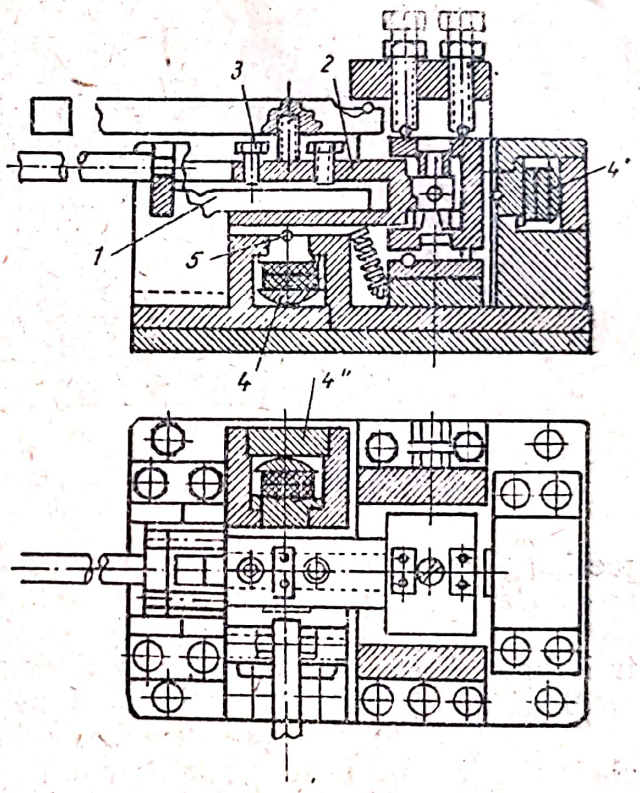


Fig. 16-10. Suportul de măsurare al instalației piezometrice pentru determinarea forțelor de tăiere la strung

ținut este trimis la dispozitivul de măsură, după ce în prealabil trece printr-un amplificator.

Pentru analiza unui proces de tăiere se întrebuințează simultan trei receptoare piezoelectrice, așezate în așa fel încît să recepționeze trei componente perpendiculare între ele ale forțelor de tăiere.

În fig. 16-10 este arătată schema constructivă a unui suport de măsurare montat pe un strung. Efortul care acționează asupra cuțitului *1* se transmite traductorului prin dornul *2*, în care se fixează cuțitul cu ajutorul buloanelor *3*. Capătul din față al dornului se reazimă pe bila *5* care transmite presiunea asupra receptorului *4*. Celelalte două receptoare sînt notate cu *4'* și *4''*.

Pentru a descompune cît mai precis forța de tăiere în componente, trebuie ca dornul în care se fixează cuțitul să se poată deplasa liber, cîțiva microni, în lungul celor trei axe.

Conexiunile traductoarelor sînt scoase la un soclu cu trei prize, fixate pe un izolator de chihlimbar.

Dinamometrele piezometrice sînt folosite chiar la măsurări de forțe de zeci de tone, de pildă la măsurarea presiunilor în procesele de ștanțare și laminare. În acest caz, traductoarele lor sînt prevăzute cu pîrghii sau dispozitive elastice care nu transmit asupra cuarțului decît o fracțiune cunoscută din efortul total.

În fig. 16-11 este redată schema de principiu a unui traductor de *dinamometru magnetoelastic*, folosit pentru măsurarea forțelor de com-

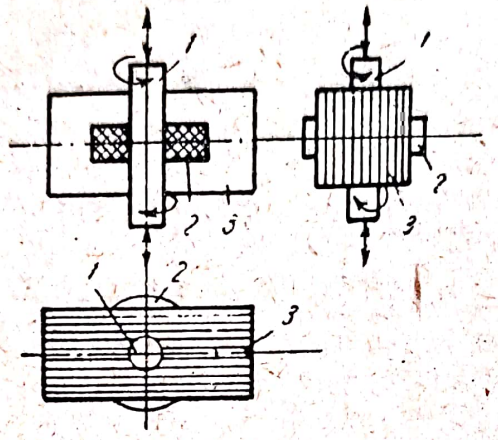


Fig. 16-11. Schema de principiu a traductorului unui dinamometru magneto-elastic

presiune, întindere și torsiune. Traductorul constă dintr-un miez cilindric de oțel *1*, pe care este așezată bobina *2*. Circuitul magnetic este închis prin jugul de oțel *3*, de reluctanță magnetică foarte redusă. Supus unor eforturi de compresiune, tracțiune sau torsiune, miezul cilindric de oțel își modifică permeabilitatea, schimbînd astfel valoarea inductanței bobinei.

Utilizînd un traductor cu miezuri cilindrice cu pereții interiori de grosimi diferite, se poate varia limita forțelor măsurate de receptor fără a depăși limita de elasticitate a miezului. Un astfel de traductor poate fi folosit pentru măsurarea unor forțe pînă la 8 000 kg.

16-7. Măsurarea electrică a vitezei unghiulare

Vitezele unghiulare de rotație (turațiile) se măsoară electric cu aparatul numit *tacometru electric*. Tipurile constructive de asemenea aparate sînt foarte variate. În cele ce urmează vom descrie *tacometrul de inducție* a cărui funcționare se bazează pe principiul inducției electromagnetice.

În fig. 16-12 este reprezentat *tacometrul electric de inducție*, al cărui traductor constă dintr-un mic generator de curent alternativ. Rotorul generatorului este format dintr-o serie de magneți permanenți, de polarități succesive contrarii. Rotorul este antrenat de arborele a cărui turație se măsoară, direct sau printr-un reductor de viteză. Tensiunea alternativă produsă în statorul generatorului care este proporțională cu viteza de rotație a rotorului, deci a arborelui care îl antrenează, alimentează un voltmetru gradat în rotații pe minut.

Se construiesc, după același principiu, și tacometre în care generatorul electric este un mic dinam de curent continuu.

Tacometrele de inducție sînt utilizate în special de vehiculele de transport. Deoarece temperatura pe vehicule poate varia în limite destul de largi, trebuie luate precauțiuni speciale pentru a evita erori importante de măsură, provocate prin variația temperaturii. Cauzele unor asemenea erori provin din dilatarea arcului voltmetrului indicator și variația

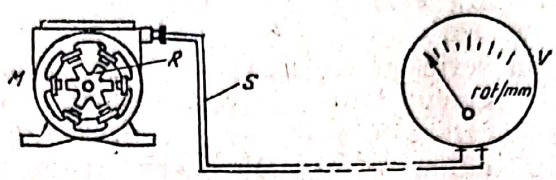


Fig. 16-12. Tacometrul electric de inducție

modulului său de elasticitate, din variația inducției magnetice a magneților generatorului, din variația rezistenței electrice a circuitului etc. Toate aceste cauze trebuie analizate atent la construirea aparatului, în vederea compensării efectelor respective.

16-8. Măsurarea electrică la distanță a nivelului lichidelor

Aparatele destinate măsurării electrice la distanță a nivelului lichidelor din rezervoare se numesc *nivelmetre electrice*.

Tipul comun este cel cu *reostat* care se întrebuințează în special la rezervoarele de benzină ale autovehiculelor (automobile, avioane etc.).

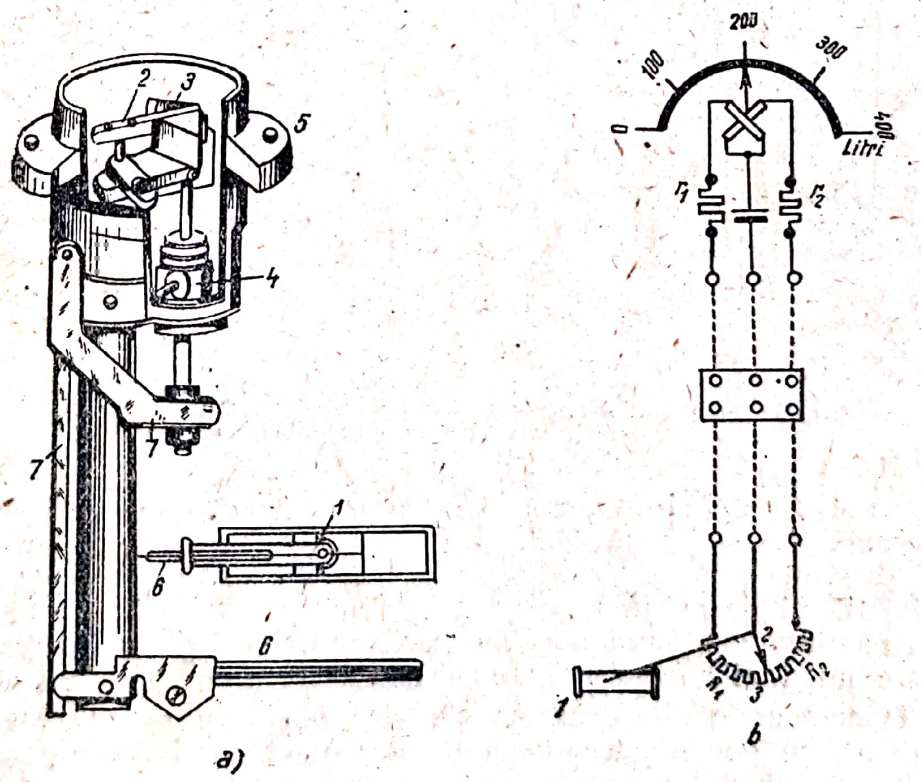


Fig. 16-13. Nivelmetru cu reostat pentru benzină;
a) traductorul nivelmetrului; *b)* schema electrică

În fig. 16-13*a* este reprezentat, schematic, receptorul unui *nivelmetru cu reostat*. El se compune din plutitorul *1*, introdus în rezervorul de ben-

zină, de la care pleacă tijele și pîrghiile *6-7* la cursorul *2* al reostatului reglabil *3*. Pentru ca vaporii de benzină să nu poată pătrunde în camera reostatului, tija de comandă a cursorului trece printr-un burduf elastic etanș *4*. Traductorul se fixează pe rezervor cu ajutorul flanșei *5*.

După cum rezultă din fig. 16-13 *b*, reostatul aparatului este montat potențiometric (vezi par. 2-9) și este legat, prin trei conductoare, cu instrumentul inductor, care este un logometru. Cele două bobine ale logometrului sînt legate în serie cu rezistențele R_1 și R_2 ale reostatului potențiometric. La variația nivelului în rezervor, variază poziția cursorului, variază în sens invers rezistențele R_1 și R_2, deci variază în sens invers curenții în bobinele logometrului. Din această cauză variază raportul

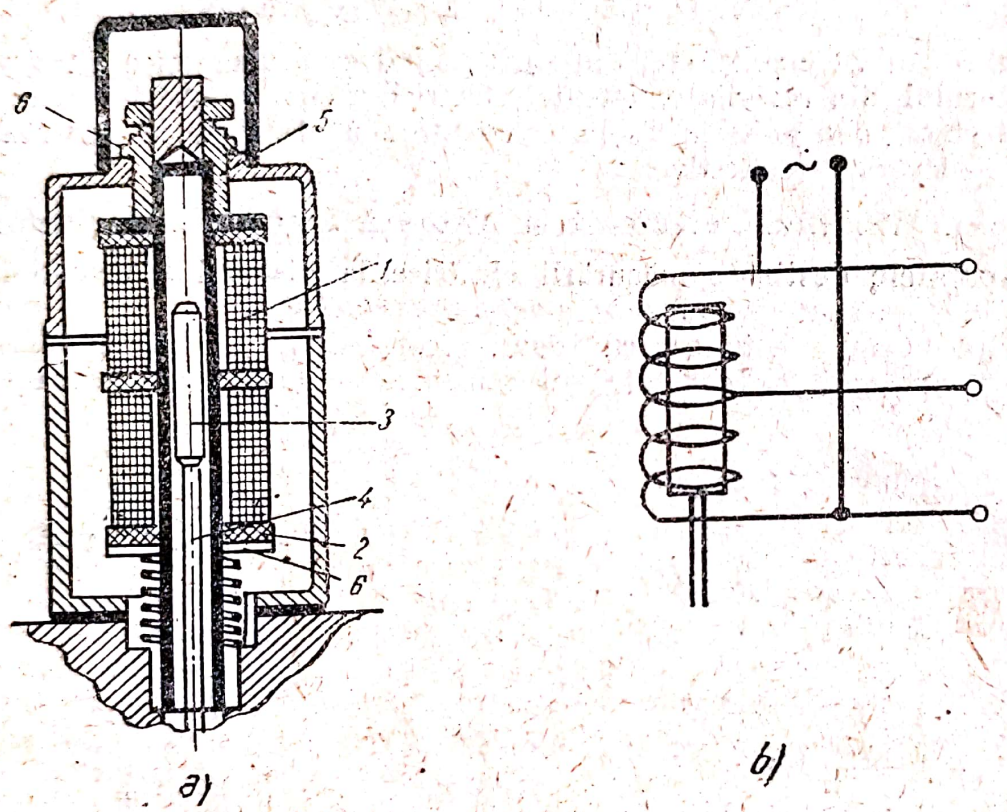


Fig. 16-14 Traductor de nivelmetru inductiv diferențial : *a)* secțiune longitudinală ; *b)* schema alimentării electrice

dintre acești curenți și, în consecință, variază indicația acului instrumentului de măsură.

Rezistențele r_1 și r_2 servesc pentru reglarea aparatului pentru o anumită limită de măsurare.

Aparatul de măsură se etalonează experimental, gradarea scării făcîndu-se în unitățile de măsură ale mărimii neelectrice (unități de capacitate).

Traductoarele nivelmetrelor electrice pot fi prevăzute, în locul rezistențelor, cu două inductanțe variabile funcționînd după principiul inductiv diferențial.

În fig. 16-14 este reprezentat traductorul unui *nivelmetru inductiv diferențial*. Traductorul este prevăzut cu o bobină *1*, fixată pe o carcasă *2* din material nemagnetic. În interiorul bobinei se deplasează miezul *3* din tole de fier, legat direct de plutitor prin tija *4* executată din material

nemagnetic. Teava 5 împiedică contactul vaporilor sau lichidului mediului măsurat cu înfășurările bobinei. Poziția de zero a instrumentului de măsură, cînd miezul se află în poziția inițială, poate fi reglată prin deplasarea față de miez a bucșei *6*, fixată de carcasa bobinei.

Bobina se compune din două secțiuni și este alimentată în curent alternativ, așa cum este arătat în fig. 16-14 *b*. La deplasarea miezului reactanțele inductive și impedanțele celor două secțiuni ale bobinei variază în sens invers.

Cele două secțiuni ale bobinei se leagă pe laturile alăturate ale unei punți simple de curent alternativ.

Adesea se întrebuințează dispozitivul din fig. 16-15, care transmite direct, la distanță, în citiri finale, dezechilibrul dintre cele două secțiuni ale bobinei traductorului. Ca indicator se utilizează un aparat similar cu tra-

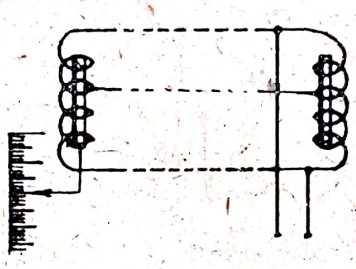


Fig. 16-15. Schema conexiunilor unui nivelmetru inductiv cu indicator inductiv

ductorul, compus dintr-o bobină cu două secțiuni, prevăzute cu un miez mobil, de care este fixat un ac indicator care se deplasează în fața unei scări gradate. Secțiunile traductorului și ale bobinei receptoare alcătuiesc cele patru brațe ale unei punți simple. Puntea se află în echilibru atunci cînd miezurile ambelor bobine se găsesc așezate simetric față de secțiunile bobinei respective și se dezechilibrează atunci cînd miezul traductorului, legat de indicatorul de nivel, se deplasează. În acest din urmă caz, intensitatea curentului din secțiunile bobinei aparatului indicator variază și cîmpul magnetic rezultant va acționa miezul bobinei în același sens cu deplasarea miezului traductorului. Cînd parametrii bobinelor traductorului și instrumentului indicator sînt identici, miezul acestuia din urmă va reproduce exact deplasarea miezului traductorului.

16-9. Aparate electrice pentru măsurarea temperaturilor

Aparatele electrice pentru măsurarea temperaturilor sînt utilizate în cele mai variate domenii ale tehnicii. Ele acoperă o scară largă de măsurare, cuprinsă între -260^0 C și $+2\,000^0$ C.

Aparate electrice pentru măsurarea temperaturilor pînă la cca $1\,000^0$ C se numesc *termometre electrice*, iar peste cca $1\,000^0$ C, *pirometre electrice*.

Cele mai utilizate în practica industrială sînt termometrele electrice cu rezistență și pirometrele termoelectrice (termocuplurile).

a) **Termometrele cu rezistență.** Funcționarea acestor aparate se bazează pe fenomenul variației cu temperatura a rezistenței electrice a unui

fir metalic. Ele se construiesc, în general, cu fir de nichel sau de platină și se folosesc, obișnuit, pentru temperaturi pînă la cca 1 000° C.

În fig. 16-16 este reprezentat traductorul unui termometru electric cu fir de platină. Firul de platină, gros de 0,07 mm, este înfășurat, sub formă bifilară, pe o placă de mică. Rezistența la 0° a firului este de 46 Ω. Placa suport împreună cu firul de platină este presată între alte două plăci de mică, pentru a izola firul față de armătura aparatului. Întregul pachet de plăci de mică astfel format este înfășurat cu o bandă de argint și constituie *elementul sensibil la căldură* al traductorului termometrului electric. Elementul sensibil se introduce într-un tub de aluminiu care protejează înfășurarea de platină contra deteriorărilor mecanice.

Tubul de aluminiu cu elementul sensibil este închis într-o armătură

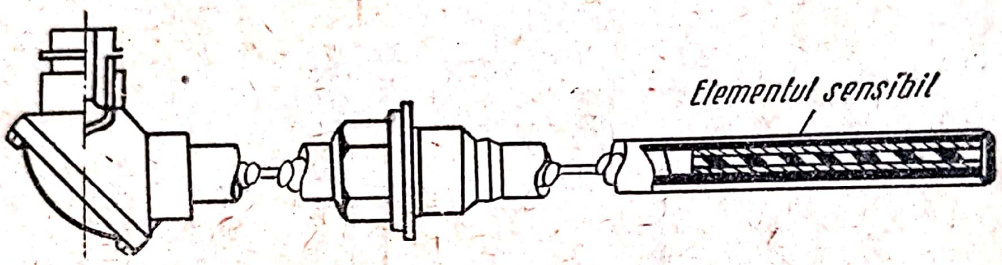


Fig. 16-16. Traductorul termometrului cu rezistență

de protecție din oțel inoxidabil, etanșă pătrunderii lichidelor sau gazelor și rezistentă loviturilor mecanice.

Dacă R_1 și R_2 sînt rezistențele firului de platină măsurate la temperaturile t_1 și t_2, din relația (2-24)

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha (t_2 - t_1)]$$

se deduce diferența de temperatură $(t_2 - t_1)$, respectiv temperatura t_2 care trebuie măsurată, temperatura t_1 și coeficientul de temperatură α al metalului fiind cunoscute.

Rezistențele R_1 și R_2 ale termometrului se măsoară cu puntea Wheatstone sau cu potențiometrul.

Termometrele cu rezistență sînt utilizate în special la măsurări de diferențe mici de temperatură, de pildă acelea care intervin în calorimetrie, la determinarea punctelor de solidificare etc. De asemenea, ele sînt întrebuințate ori decîte ori se cere un mare grad de precizie care poate fi împins pînă la 1 sau 2 la 10 000.

În industrie termometrele cu rezistență au o utilizare restrînsă, în anumite cazuri speciale fiind preferate dispozitivele cu termocupluri.

b) Pirometrele termolectrice (termocuplurile). Aceste aparate sînt folosite pentru măsurarea temperaturilor pînă la 1 500° C, în cazuri excepționale, pînă la 1700°C. Funcționarea lor se bazează pe fenomenul termoelectric, examinat în par. 4-8.

Pirometrul termoelectric este format dintr-un termocuplu care constituie traductorul aparatului, dintr-un aparat electric care măsoară forța

termoelectromotoare a acestuia, şi din conductoarele de legătură respective care constituie schema electrică a aparatului.

Un termocuplu sau termoelement este alcătuit din sudarea, între ele, a două sîrmi sau benzi de metale diferite, numite *termoelectrozi*. Contactul sudat constituie *capătul activ* sau *capătul cald* al aparatului şi se aşază în locul a cărui temperatură trebuie măsurată. Extremităţile libere ale termoelectrozilor formează *capătul rece* al aparatúlui şi se leagă la bornele unui galvanometru de curent continuu (fig. 16-17).

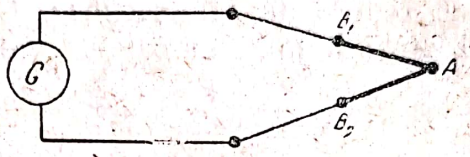


Fig. 16-17. Schema de principiu a termocuplului: A punctul de sudură (capătul cald); B_1 şi B_2 extremităţile reci

Dacă capătul activ al termocuplului este supus unei temperaturi $T_1{}^0$ iar capătul rece este menţinut la o temperatură cunoscută $T_2{}^0$ (obişnuit la temperatura mediului ambiant), f.e.m. E_{T_2} care apare în circuit este proporţională cu diferenţa $T_2{}^0 - T_1{}^0$. Prin urmare, acul galvanometrului deviază proporţional cu încălzirea punctului cald. Galvanometrul se etalonează pentru a ne da direct, în grade Celsius, temperatura măsurată.

În tabela 16-1 sînt arătate metalele şi aliajele cele mai întrebuinţate în construcţia termocuplurilor, cu arătarea domeniilor de temperatură pentru care sînt folosite.

Tabela 16-1

Metale şi aliajele folosite în construcţia termocuplurilor şi domeniile temperaturilor măsurate

TIPUL TERMOCUPLULUI	Domeniul de măsurare a temperaturii	
	Serviciu continuu °C	Serviciu de scurtă durată °C
Platin — platin - rhodiu 10 %	0 . . . 1450	1700
Platin — platin - rhodiu 13%	0 . . . 1450	1700
Cromel — Alumel	0 . . . 1100	1350
Crom — Constantan	0 . . . 900	1100
Cupru — Constantan	— 190 . . . 350	600

Termocuplurile supuse temperaturilor din ultima coloană a tabloului trebuie supuse la o reetalonare.

După cum rezultă din tablou, pentru măsurarea temperaturilor moderate, pînă la 350° C, se folosesc termocupluri cupru-constantan; pentru

măsurarea temperaturilor înalte, pînă la 1700° C, se folosesc termocupluri la care unul din metale este din platină pură, iar cel de al doilea dintr-un aliaj de platină rhodiu.

Pentru a se măsura temperatura de topire a oțelului (1700° C), termocuplul platin-platin-rhodiu se introduce în oalele de turnare, în baia cuptorului Martin sau în creuzetele cuptoarelor cu inducție. Pentru aceasta, termocuplul este fixat într-o piesă de molibden și este protejat printr-un înveliș exterior de cuarț. După fiecare măsurare, învelișul de cuarț trebuie înlocuit. Învelișul de molibden rezistă la 100 cufundări a cca 33 s fiecare.

În fig. 16-18 este reprezentat, în secțiune, termocuplul utilizat la măsurarea temperaturii oțelului topit în oalele de turnare. Capătul activ

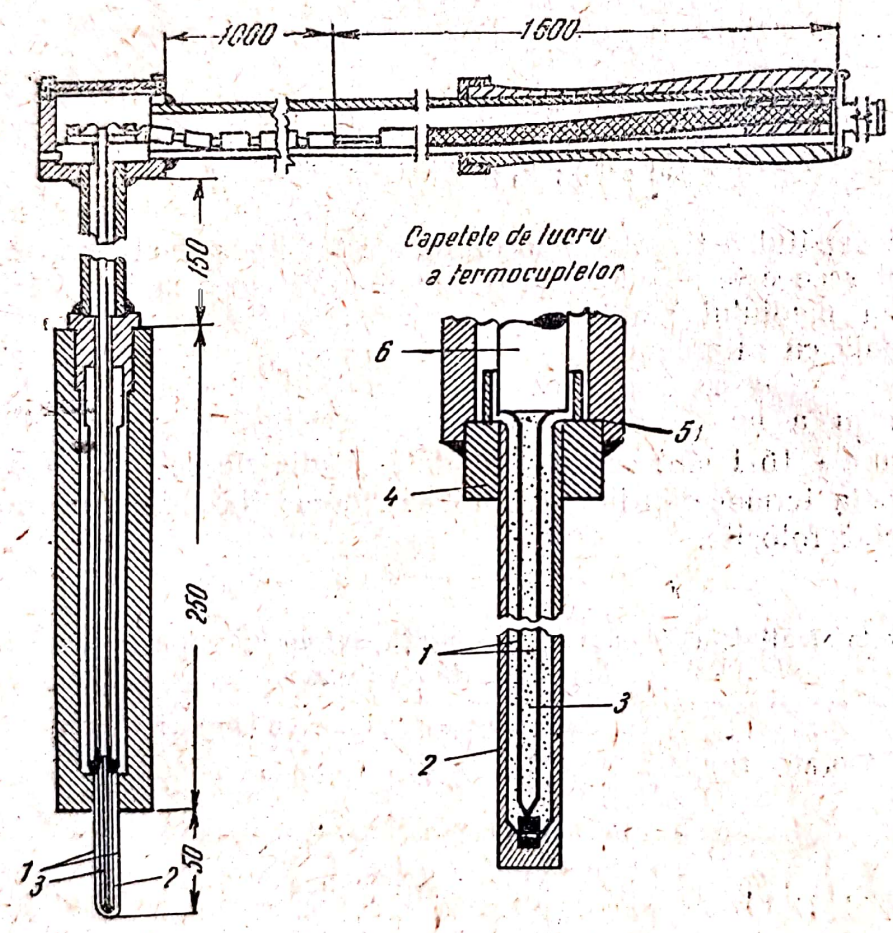


Fig. 16-18. Termocuplul pirometrului pentru măsurarea temperaturii oțelului topit în oalele de turnare

al termoelectrozilor *1* se găsește presat în fundul lăcașului de molibden *2*. Pentru izolarea termoelectrozilor între ei și față de lăcașul de molibden, acest lăcaș este umplut cu oxid de aluminiu (Al_2O_3), notat în figură cu *3*, calcinat în prealabil la 1700° C. Lăcașul de molibden este protejat de învelișul de cuarț care nu apare în figură.

În tabela 16-2 este redată variația f.e.m. a diverselor termocupluri în funcție de temperatură.

În afară de galvanometre, f.e.m. ale termocuplurilor pot fi măsurate cu ajutorul potențiometrelor care dau rezultate mai precise decît metoda citirii directe cu galvanometrul. Pentru a se scurta durata măsurării și pentru a se obține o citire directă a temperaturii măsurate,

Tabela 16-2

Variația f.e.m. în funcție de temperatură pentru termocuplurile uzuale (temperatura extremităților reci ale conductoarelor 0°C)

F.e.m. m V	Grade centigrade			F.e.m. m V	Grade centigrade		
	Platin-platin rhodiu 10%	Platin-platin rodiu 13%	Cupru constantan		Cromel-alumel	Fier-constantan	Cromel-constantan
0	0	0	0	0	0	0	0
1	147	145	25	5	122	93	80
2	263	259	49	10	246	182	153
3	365	361	72	15	367	272	221
4	474	457	94	20	485	262	286
5	578	550	115	25	602	453	350
6	675	638	136	30	720	543	413
7	770	724	156	35	841	628	475
8	861	806	176	40	966	711	537
9	950	886	195	45	1 096	789	599
10	1 037	964	213	50	1 232	865	661
11	1 122	1 040	232	55	1 376	946	723
12	1 206	1 114	250	60	—	—	786
13	1 290	1 187	268	65	—	—	850
14	1 374	1 259	285	70	—	—	915
15	1 458	1 332	302	—	—	—	—
16	1 543	1 404	319	—	—	—	—
17	—	1 477	336	—	—	—	—
18	—	1 550	353	—	—	—	—

se utilizează dispozitive de echilibrare automată a potențiometrului cu ajutorul unui mic motor electric sau cu ajutorul unui potențiometru electronic. Aparatele respective prezintă însă dezavantajul unui cost ridicat.

16-10. Măsurarea electrică a concentrațiilor

Măsurarea concentrației apei în lichide, a vaporilor de apă în medii gazoase, a concentrației sărurilor în lichide etc. se execută cu aparate electrice care se bazează, în special, pe măsurarea conductibilității electrice a mediului respectiv.

De pildă, o problemă curentă în industrie o constituie concentrația de NaCl în apele de alimentare a cazanelor cu abur sau în aburul supraîncălzit care alimentează turbinele sau alte instalații industriale, cunoscut fiind că o proporție mare de asemenea săruri scurtează viața instalațiilor respective.

Concentrația de NaCl se determină măsurîndu-se conductibilitatea apei de alimentare sau a apei de condensare din instalație. Pentru această măsurare se folosește o punte Wheatstone de curent alternativ, una din

laturile acesteia fiind formată de soluţia a cărei conductibilitate o măsurăm. În diagonala punţii se găseşte montat, prin intermediul unui redresor, un aparat de curent continuu care indică, după gradul de dezechilibru al punţii, concentraţia în NaCl.

Coeficientul de temperatură relativ ridicat al electrolitului face ca rezistenţa acestuia să varieze în timpul măsurării, introducînd o eroare asupra rezultatului obţinut, numită *eroarea de temperatură* a electrolitului. De asemenea, prezenţa în lichid a unor gaze dizolvate, în special a bioxidului de carbon şi a amoniacului, produce o nouă eroare asupra rezultatului, *eroarea de gaze*.

Prima eroare se elimină introducînd în schema electrecă a măsurării o rezistenţă din manganin în derivaţie cu rezistenţa electrolitului şi una de cupru, în derivaţie cu rezistenţa electrolitului, calculate astfel încît

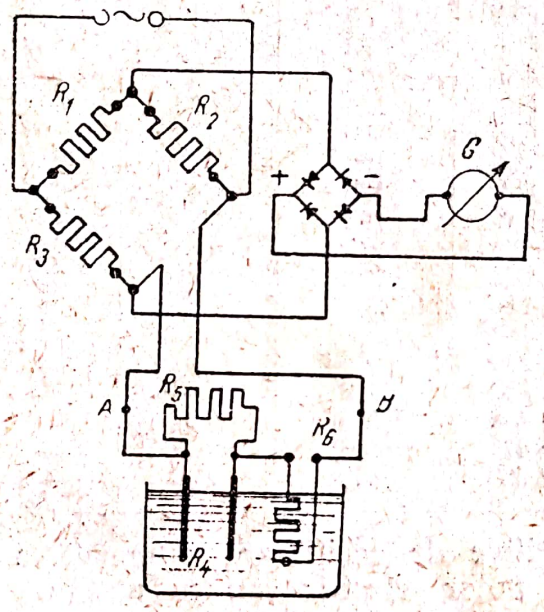


Fig. 16-19. Schema unui dispozitiv de măsurare a concentraţiei sărurilor

să se obţină automat o compensare a erorii de temperatură între limitele de 20 şi 50°C.

În fig. 16-19 este reprezentată schema electrică a unei asemenea măsurări. Rezistenţa de manganin R_5 se montează în afara celulei electrolitice, iar cea de cupru R_6, în interiorul celulei, pentru a lua temperatura lichidului încălzit prin trecerea curentului. Ambele aceste rezistenţe servesc pentru compensarea erorii de temperatură a rezistenţei R_4 a electrolitului.

Metode similare sînt utilizate pentru măsurarea concentraţiei soluţiile foarte impure, de baze şi acizi, în secţiile de finisare ale fabricilor de textile.

16-11. Analiza electrică a gazelor

În procesele industriale de ardere și în alte reacții chimice este necesară analiza cantitativă a compoziției amestecului de gaze rezultat.

În cazul arderii, interesează în primul rînd proporția de CO_2 sau de CO plus H_2 din gaze, pentru a se verifica dacă arderea s-a făcut sau nu complet; în cazul altor reacții chimice, interesează proporțiile de O_2, SO_2, Cl și de vapori de apă conținute în gaz.

Analiza electrică a gazelor se face măsurînd efectul produs de conductibilitatea termică sau de căldura de reacția chimică a gazelor asupra unei rezistențe electrice (termorezistență).

În fig. 16-20 este reprezentat tipul constructiv cel mai răspîndit de traductor cu termorezistență folosit la aceste aparate.

Termorezistența (fig. 16-20 *a*) se compune dintr-un fir subțire de platină *1*, fixat cu unul din capete la tija de cupru *2*, iar cu celălalt, de o spirală de platină și iridiu *3*, lipită de a doua tijă de cupru. Ambele tije de cupru sînt introduse într-o bucșe din masă plastică izolantă *4*.

Traductoarele aparatelor electrice de analiza gazului CO_2 au, de regulă, patru termorezistențe care se montează pe laturile unei punți Wheatstone.

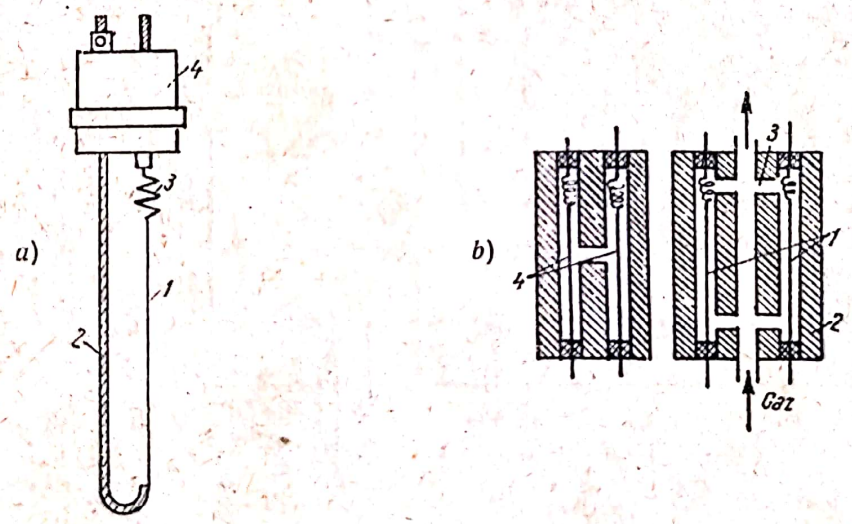


Fig. 16-20. Construcția termorezistenței și a traductorului aparatului de analize electrică de CO_2

Două din aceste termorezistențe și anume cele introduse în camerele prin care trece amestecul de gaze de analizat (termorezistențe active) se montează pe laturile opuse ale punții. Celelalte două, introduse în camere umplute cu un gaz de comparație, cel mai adesea cu aer, (termorezistențele neactive), sînt montate pe celelalte două laturi opuse. Ele servesc pentru compensarea erorilor provenind din variația temperaturii ambiante.

În fig. 16-20 *b* este arătat principiul constructiv al unui asemenea traductor. Termorezistențele active *1* sînt introduse în camerele blocului turnat *2*. Gazul de analizat străbate un canal central de unde, prin canale laterale, pătrunde în camerele termorezistențelor. Camerele de comparație *4* sînt închise ermetic și umplute cu aer.

Termorezistențele traductorului parcurse de curentul furnizat de o baterie de acumulatoare dezvoltă căldură prin efect Joule-Lenz. O parte din această căldură este transmisă mediului ambiant, prin conductibilitatea termică a amestecului de gaze din jurul lor. Temperatura termorezistențelor active, deci și rezistența lor este astfel o funcție a conductibilității termice a gazului care, la rîndul ei, este determinată de proporțiile diferitelor gaze din amestec.

Schema de montaj a punții pentru analiza gazelor este reprezentată în fig. 16-21. Se reglează reostatul R_r și reostatul în montaj potențiometric R_p (un fir calibrat), pînă cînd galvanometrul indică zero. Termorezistențele parcurse de curent se încălzesc la cca 100°C. Echilibrul punții se realizează fără trecerea gazului prin camerele termorezistențelor active.

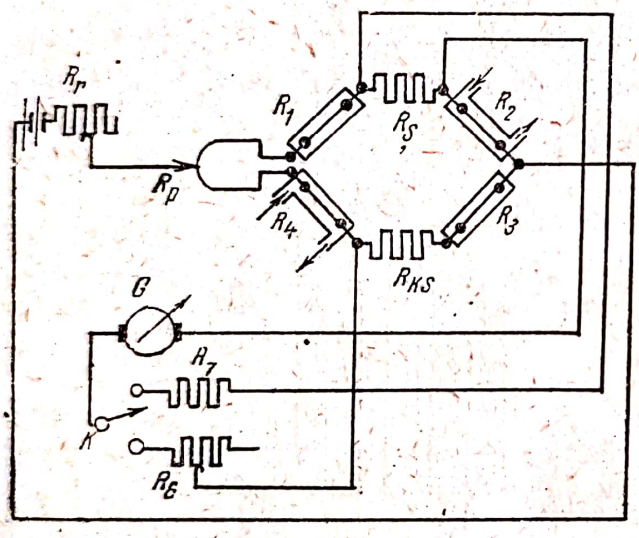


Fig. 16-21. Schema electrică a aparatului de analiza electrică a gazelor

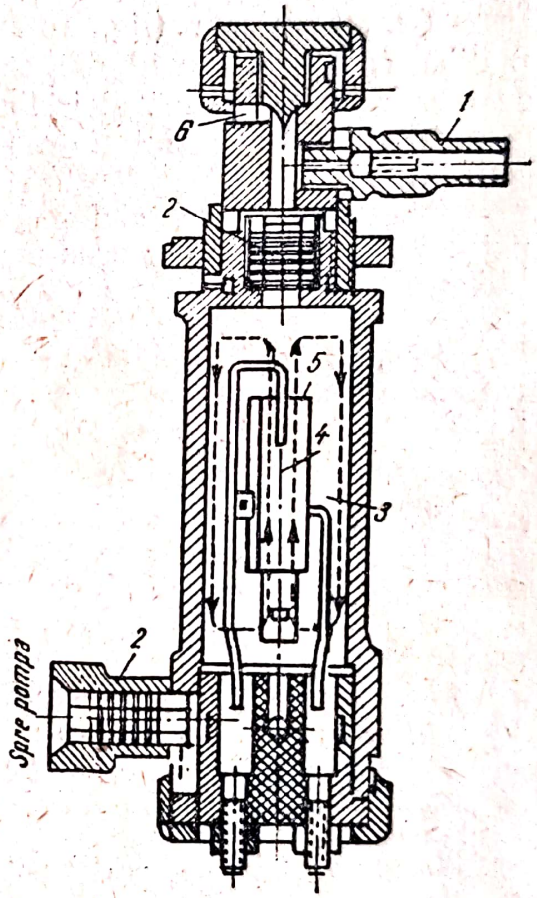


Fig. 16-22. Traductorul analizatorului de gaz pentru măsurarea concentrației vaporilor de benzină din aer

Trecîndu-se apoi prin aceste camere gazul de analizat, temperatura termorezistențelor, deci valorile rezistențelor respective se modifică și puntea se dezechilibrează. Scara instrumentului de măsură se gradează pentru a se citi direct concentrația unui anumit gaz.

În schema punții, $R_ş$ reprezintă o rezistență șunt a aparatului de citire, $R_{kş} = R_ş$, R_6 și R_7 servesc la reglarea aparatului.

Analizatoarele electrice de gaz funcționează pe *principiul căldurii de reacție* folosesc efectul căldurii de reacție chimică a gazului asupra

termorezistențelor, la fel cu cele care folosesc efectul conductibilității termice. Aceste analizatoare sînt utilizate în special atunci cînd se analizează amestecuri de gaze inflamabile sau concentrații mici (0,5 mg/l) de gaze.

La trecerea curentului prin termorezistența activă a unui asemenea analizator, căldura produsă aprinde amestecul de gaze inflamabile din jurul ei. Căldura de ardere a gazelor ridică temperatura termorezistenței, deci mărește valoarea rezistenței electrice a acesteia, ceea ce conduce, ca și în cazul precedent, la dezechilibrarea punții de măsură. Influența conductibilității termice a gazului este neglijabilă și nu influențează rezultatele.

Cînd aerul conține un anumit procent de vapori de benzină, se formează un amestec exploziv. Limitele concentrațiilor, care prezintă pericol de explozie depind, pe de o parte, de calitatea benzinei, pe de alta, de temperatura aerului. Limita inferioară a concentrației este de 1%, cea superioară de 5%.

Tipul cel mai răspîndit de analizator al concentrației explozive a vaporilor de benzină în aer este arătat în fig. 16-22.

Amestecul de aer și vapori de benzină este trimis, cu ajutorul unei pompe de mînă, prin tubul *1* și sitele de cupru *2*, în camera de ardere *3*. Rolul acestor site, care se găsesc și la ieșirea gazului din camera de ardere, este de a împiedica propagarea, în afara traductorului, a eventualelor unde de explozie. În camera de ardere se găsește termorezistența *4*, așezată în axul tubului 5 care permite formarea prin convecție a unui curent de gaz ascensional în jurul firului, asigurînd astfel o ardere mai completă a vaporilor de benzină. Amestecul de gaze arse iese prin partea inferioară a traductorului.

Arderea vaporilor de benzină este produsă prin încălzirea prin curent electric a termorezistenței.

Schema electrică a aparatului constă dintr-o punte în care trei laturi sînt formate din rezistențe de manganină egale, iar latura a patra din termorezistența traductorului.

Analizatoarele de CO_2+H_2 și cele de concentrații mici de CO (0,5 mg/l) sînt asemănătoare analizatorului de vapori de benzină descris mai sus.

În general, rezultatele analizelor obținute pe această cale au o precizie de 3-6%.

În ultimul timp au fost construite aparate electrice pentru analiza gazelor în care separarea acestora se face folosindu-se proprietățile lor magnetice. În special oxigenul, datorită paramagnetismului său accentuat față de celelalte gaze, poate fi relativ ușor separat prin această metodă.

16-12. Aparate electrice pentru măsurarea umidității

Conținutul de umiditate al corpurilor solide (lemn, cereale, textile și orice alte materiale absorbante) poate fi determinat printr-una din următoarele trei metode: 1) metoda conductivității electrice, 2) metoda constantei dielectrice sau metoda capacitivă și 3) metoda pierderilor dielectrice.

Toate aceste metode dau posibilitatea unei măsurări rapide a umidității și pot fi utilizate atît în laborator cît și în practica măsurărilor industriale.

Funcționarea aparatelor care folosesc *metoda conductivității electrice* se bazează pe variația acestei conductivități la corpurile solide în funcție de umiditatea lor. Legătura dintre rezistența unui corp solid și umiditatea sa poate fi exprimată prin relația

$$R = \frac{A}{C^n},$$

în care R este rezistența corpului (inversul conductanței);

A — o constantă, determinată de dimensiunile probei și a conținutului său de săruri;

C — umiditatea materialului, în procente din greutatea substanței uscate.

Exponentul n este caracteristic materialului de analizat, depinzînd de natura și structura acestuia. Pentru țesăturile de mătase și de lînă, $n = 15\text{-}16{,}5$; pentru cele de bumbac $n = 8\text{-}10$.

Metoda conductivității electrice se caracterizează printr-o sensibilitate mare la creșterile procentuale ale umidității. De pildă, dacă $n = 10$, la o creștere a umidității C cu 12%, cînd raportul $C/C_0 = 1{,}12$ (C_0 este umiditatea inițială) rezistența se micșorează de $1{,}12^{10} = 3{,}1$ ori.

Pentru a determina umiditatea lemnului prin metoda conductivității se înfig, în proba de lemn, două ace fine la o anumită distanță unul de altul și se măsoară rezistența electrică dintre aceste ace. La țesături se măsoară rezistența pînzei așezate între doi electrozi formați din două plăci sau din cilindrii unui valț.

Măsurarea acestor rezistențe se face, în general, cu ajutorul unei punți cu tuburi electronice.

Aparatele construite pe principiul *metodei constantei dielectrice* se bazează pe constatarea că valoarea constantei dielectrice a unui amestec de două substanțe variază, în limite largi, atunci cînd procentele celor două substanțe (presupuse cu constante dielectrice diferite) se schimbă.

În fig. 16-23 este reprodusă curba de variație a capacității unui condensator cu dielectricul din fibre sau țesătură, în funcție de variația procentuală a umidității.

Traductorul *aparatului capacitiv* pentru măsurat umiditatea este constituit din două plăci plane paralele în cazul țesăturilor, sau din doi cilindri în cazul grînelor.

Variația capacității se măsoară cu ajutorul unei punți diferențiale sau conectînd capacitatea respectivă în circuitul oscilant al unui oscilator cu tub electronic. În acest din urmă caz, un condensator variabil montat în paralel cu condensatorul traductorului servește pentru menținerea frecvenței oscilatorului constantă.

Aparatele de măsurat umiditatea pe *principiul pierderilor dielectrice* se aplică în special la determinarea umidității corpurilor fibroase.

Aspectul exterior al unui asemenea aparat este arătat în fig. 16-24.

Traductorul are o formă cilindrică, în interiorul căreia se găsește un tub electronic. El dispune de 4 perechi de tije, legate în paralel. Tijele

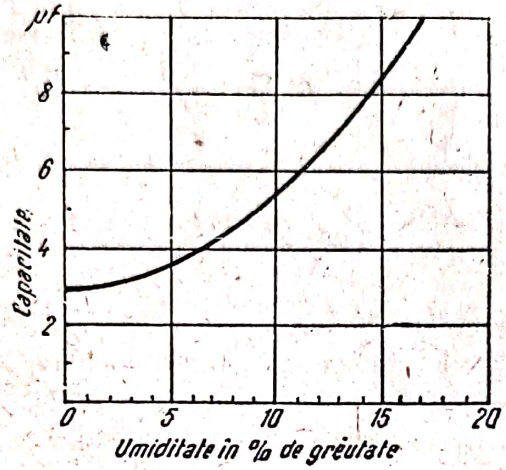


Fig. 16-23. Curba de variație a capacității unui condensator cu dielectric din fibre sau țesătură, în funcție de umiditatea exprimată în procente de greutate

sînt racordate la o bobină cuplată inductiv cu circuitul anodic și cu circuitul de grilă a unui tub electronic (vezi vol. II).

La măsurarea umidității se introduc tijele traductorului în masa de țesătură sau de fibre, făcînd astfel să pătrundă, în materialul de analizat,

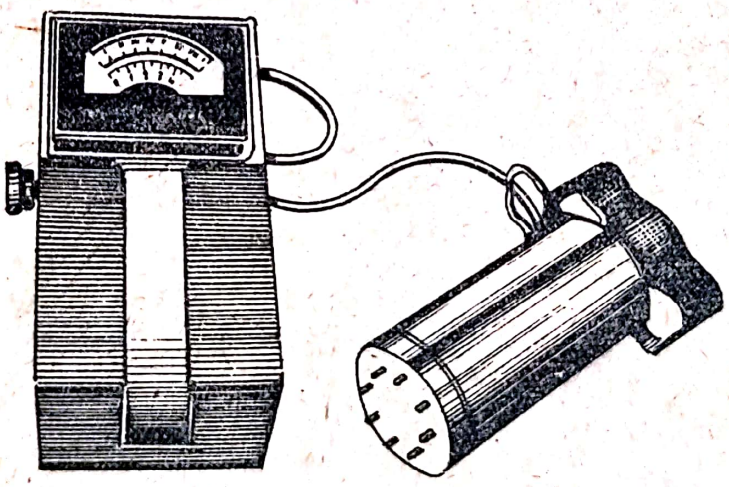


Fig. 16-24. Aspectul exterior al aparatului pentru măsurat umiditatea, bazat pe pierderile în dielectric

liniile de forță ale cîmpului electric de înaltă frecvență produse de circuitul oscilant al traductorului. Pierderile dielectrice care apar încarcă generatorul electronic. Valoarea acestor pierderi, deci și sarcina generatorului, depinde de umiditatea materialului de analizat. Curentul de grilă, măsurat cu ajutorul unui galvanometru, ne indică gradul de umiditate.

BIBLIOGRAFIA VOL. I

C. A. Crug: „Bazele electrotehnicii", vol. I şi II, traducere din limba rusă. Editura Energetică de Stat, 1952 şi 1953.

L. R. Neiman şi F. L. Kalatarov: „Bazele teoretice ale electrotehnicii", traducere din limba rusă. Vol. I şi II. Editura Energetică de Stat, 1955, vol. III, Editura Tehnică, 1956.

N. N. Masurov şi V. S. Popov: „Electrotehnică teoretică", traducere din limba rusă, Editura Energetică de Stat, 1953.

E. V. Chitaev şi N. F. Grevţev: „Curs de electrotehnică generală", traducere din limba rusă. Editura Energetică de Stat, 1953.

A. S. Casatchin, M. A. Perecalin şi P. C. Sergheev: „Electrotehnica". Editura Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1952.

C. A. Crug şi alţii: „Principii de electrotehnică", Editura Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1952.

M. A. Perecalin: „Circuite electrice", Editura Gosenergoizdat, Moscova-Leningrad, 1950.

I. Fris şi A. Timoreva: „Curs de fizică generală", vol. II, traducere din limba rusa. Editura Tehnică, 1955.

G. Benischke: „Principes scientifiques de l'électrotehnique". Traducere după ediţia VI-a germană. Editura Albin Michel, Paris.

G. Bruhat: „Cours d'électricité". Editura Masson & Comp. Paris, 1924.

J. Fischer-Hinnen: „L'électrotehnique des practiciens", tradusă din limba germană. Editura Dunod, Paris, 1925.

L. Donati şi G. Sartori: „Elettrotecnica". Editura Ulrico Hoepli, Milano, 1930.

G. Castelfranchi: „Fisica sperimentale ed applicata". Volume secondo, Electrologia. Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1934.

N. Vasilescu-Karpen: „Curs de electricitate". M. O. Imprimeria Naţională, 1935 şi 1941.

C. Budeanu: „Electricitate şi electrotehnică". Partea I. Editura Institutului Politehnic, Bucureşti, 1950.

R. Rădulcţ: „Bazele teoretice ale Electrotehnicii", vol. I, II şi III. Editura Institutului Politehnic, Bucureşti, 1953-1955.

V. Novacu: „Introducere în electrodinamică", vol. I şi II. Editura Academiei R.P.R., 1955.

I. S. Antoniu: „Chestiuni speciale de electrotehnică". Editura Academiei R.P.R., 1956.

Gh. Petrescu: „Elemente de electricitate, electrotehnică şi aplicaţiuni ale electricităţii". Bucureşti, 1946.

C. Lazu: „Electrotehnica". Editura Institutului Politehnic, Bucureşti, 1952.

C. Lazu: „Electrotehnică generală, teoretică şi aplicată". Vol. I şi II. Editura Energetică de Stat, 1954 şi 1955.

E. Trufin: „Electricitate teoretică şi industrială", vol. I, Tiparul Romînesc, Timişoara, 1944.

I. S. Antoniu: „Instrumente de măsură electrice industriale, în exploatările de electricitate". Bucureşti, 1946.

M. Popa şi J. Wagner: „Culegere de probleme de electricitate şi electrotehnică". Editura Energetică de Stat, 1954.

I. L. Baida şi alţii: „Curs general de măsuri electrice", traducere din limba rusă. Editura Energetică de Stat, 1953.

V. S. Popov: „Măsurări şi aparate electrice de măsurat", traducere din limba rusă. Editura Energetică de Stat 1953.

A. M. Turicin: „Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice", vol. I şi II. Traducere din limba rusă. Editura Energetică de Stat, 1954.

TABLA DE MATERII

	Pag.
Prefaţa	3
Introducere	5
1. Definiţia şi istoricul pe scurt al electrotehnicii	5
2. Noţiuni despre energie	9
4. Proprietăţile energiei electrice	10
5. Rolul economic al electrificării	11
6. Sistemul de unităţi de măsură folosite în studiul electrotehnicii	12
CAP. I: Cîmp şi potenţial electric	17
1-1. Producerea electricităţii prin frecare	17
1-2. Explicarea fenomenului electrizării prin frecar	18
1-3. Cîmp electric. Electrizarea prin influenţă	18
1-4. Legea lui Coulomb	20
1-5. Caracterizarea mediului electric. Permitivitate	21
1-6. Intensitatea cîmpului electric	24
1-7. Potenţial şi tensiune electrică	28
1-8. Suprafeţe echipotenţiale	31
CAP. II: Circuitul electric de curent continuu	34
2-1. Conductoare şi izolanţi electrici	34
2-2. Curentul electric	35
2-3. Legea lui Ohm	36
2-4. Rezistenţa şi conductanţa electrică	39
2-5. Variaţia rezistenţei cu temperatura	42
2-6. Expresia puterii şi a energiei electrice	44
2-7. Efectul termic al curentului electric	45
2-8. Calculul încălzirii conductoarelor electrice	47
2-9. Legarea rezistenţelor în serie	50
2-10. Surse de energie electrică. Forţe electromotoare. Receptoare electrice	51
2-11. Scurtcircuite. Siguranţe fuzibile	55
2-12. Reostate	56
2-13. Legea lui Ohm pentru circuite electrice neomogene	59
2-14. Diagrama potenţialelor de-a lungul unui circuit electric	61
CAP. III: Calculul circuitelor electrice de curent continuu	65
3-1. Legile lui Kirchhoff	65
3-2. Legarea rezistenţelor în paralel	69
3-3. Legarea mixtă a rezistenţelor	72
3-4. Metoda tensiunii între noduri	74
3-5. Metoda transformării	77
3-6. Metoda suprapunerii	81
3-7. Metoda circuitelor independente	84

Scanned with OKEN Scanner

		Pag.
CAP. IV:	**Efectul chimic al curentului electric. Fenomene termoelectrice**	87
4-1.	Conductivitatea electroliților	87
4-2.	Fenomenul electrolizei	90
4-3.	Aplicațiile industriale ale electrolizei	91
4-4.	Pile electrice	93
4-5.	Elementele normale	97
4-6.	Acumulatoarele	98
4-7.	Încărcarea acumulatoarelor	106
4-8.	Legarea pilelor și acumulatoarelor	107
4-9.	Fenomene termoelectrice	110
CAP. V:	**Capacitatea electrică. Energia cîmpului electric**	112
5-1.	Fluxul intensității cîmpului electric	112
5-2.	Teorema lui Gauss	113
5-3.	Inducția electrică	115
5-4.	Aplicațiile teoretice ale teoremei lui Gauss	116
5-5.	Distribuția sarcinii pe corpurile conducătoare	119
5-6.	Capacitate electrică și condensator electric	120
5-7.	Condensatorul plan	122
5-8.	Condensator cilindric	124
5-9.	Capacitatea liniilor bifilare	125
5-10.	Descărcări disruptive și rigiditate dielectrică	127
5-11.	Energie înmagazinată în cîmpul electric	128
5-12.	Legarea condensatoarelor	129
5-13.	Capacitatea condensatoarelor cu dielectric mixt	132
5-14.	Tipuri industriale de condensatoare	134
5-15.	Încărcarea condensatorului	136
5-16.	Descărcarea condensatorului	140
CAP. VI:	**Electromagnetism**	142
6-1.	Cîmpul magnetic	142
6-2.	Acțiunea cîmpului magnetic asupra conductorului parcurs de curent	145
6-3.	Acțiunea cîmpului magnetic asupra electronului aflat în mișcare în cîmp	147
6-4.	Inducția magnetică	148
6-5.	Fluxul magnetic	149
6-6.	Legea lui Biot-Savart	151
6-7.	Intensitatea cîmpului magnetic	157
6-8.	Permeabilitatea magnetică	159
6-9.	Legea circuitului magnetic	161
6-10.	Forțe electrodinamice	166
6-11.	Materiale feromagnetice	169
6-12.	Fenomenul histerezis	172
6-13.	Refracția liniilor de inducție magnetică	175
6-14.	Circuitul magnetic	178
6-15.	Calculul circuitului magnetic	181
CAP. VII:	**Inducția electromagnetică**	184
7-1.	Fenomenul inducției electromagnetice	184
7-2.	F.e.m. indusă în circuit	187
7-3.	F.e.m. indusă în conductorul rectiliniu	188
7-4.	Fenomene reversibile în aplicarea legii inducției	190
7-5.	Lucrul mecanic al forțelor electromagnetice	193
7-6.	Curenții Foucault	197
7-7.	Inductanța proprie	199
7-8.	Calculul inductanței unor circuite	200
7-9.	Inductanța mutuală	203
7-10.	Fenomene tranzitorii la închiderea și deschiderea unui circuit prevăzut cu inductanță, rezistență și f.e.m.	210

Pag.

7-11. Energia cîmpului magnetic 214
7-12. Energia consumată în fenomenul histerezis 215
7-13. Magneți permanenți și electromagneți. Forță portantă 217

CAP. VIII: Noțiuni fundamentale și definiții asupra curentului alternativ . . . 220

8-1. Generalități asupra mărimilor periodice alternative 220
8-2. Producerea f.e.m. alternative sinusoidale 221
8-3. Fază și diferență de fază 225
8-4. Reprezentarea vectorială a mărimilor sinusoidale 228
8-5. Adunarea și scăderea vectorială a mărimilor sinusoidale 232
8-6. Valori eficace în curent alternativ 235
8-7. Valori medii în curent alternativ sinusoidal 237
8-8. Rezistența în curent alternativ. Efectul pelicular 239

CAP. IX: Circuite de curent alternativ 242

9-1. Considerații generale 242
9-2. Circuit cu rezistență 243
9-3. Circuit cu inductanță 244
9-4. Circuit cu rezistență și inductanță legate în serie 247
9-5. Circuit cu capacitate 251
9-6. Circuit cu rezistență și capacitate 254
9-7. Circuit cu rezistență, inductanță și capacitate legate în serie . . . 257
9-8. Legarea în serie a mai multor rezistențe și reactanțe inductive și capacitive 260
9-9 Puterea instantanee și puterea medie în curent alternativ 264
9-10. Puterea activă, reactivă și aparentă 267
9-11. Rezonanța tensiunilor 269
9-12. Circuite în paralel, cu rezistențe și reactanțe legate în serie . . . 274
9-13. Rezonanța curenților 280
9-14. Circuit oscilant 288
9-15. Circuit mixt de curent alternativ 294
9-16. Importanța tehnico-economică a factorului de putere 299
9-17. Fenomene tranzitorii la închiderea unui circuit cu rezistență și inductanță pe o tensiune alternativă 305
9-18. Fenomene tranzitorii la închiderea unui circuit cu rezistență și capacitate pe o tensiune acternativă 308

CAP. X: Metoda simbolică 315

10-1. Noțiuni și definiții 315
10-2. Operații cu mărimile complexe 318
10-3. Mărimi electrice reprezentate prin cantități complexe 323
10-4. Expresia în mărimi complexe a legii lui Ohm, a legilor lui Kirchhoff și a puterii 327
10-5. Circuite cu impedanțe legate în paralel 330
10-6. Circuite complexe de curent alternativ 332
10-7. Circuite de curent alternativ cuplate inductiv 335
10-8. Diagrama cercului 337

CAP. XI: Curentul trifazat 344

11-1. Sisteme polifazate 344
11-2. Sisteme trifazate 344
11-3. Legarea în stea cu fir neutru a fazelor unui generator 348
11-4. Legarea în triunghi a fazelor unui generator 351
11-5. Legarea în stea a receptoarelor electrice 354
11-6. Sisteme dezechilibrate de receptoare legate în stea fără fir neutru 361
11-7. Expresia puterii în cazul receptoarelor legate în stea 365
11-8. Legarea în triunghi a receptoarelor electrice 367
11-9. Expresia puterii în cazul receptoarelor legate în triunghi 373

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

11-10. Cîmpuri învîrtitoare 374
11-11. Cîmpul pulsatoriu şi componentele sale învîrtitoare 375
11-12 Cîmp învîrtitor bifazat 377
11-13. Cîmpul învîrtitor trifazat 378
11-14. Componentele simetrice ale sistemelor trifazate nesimetrice 382

CAP. XII: Mărimi alternative nesinusoidale 388

12-1. Consideraţii generale 388
12-2. Descompunerea funcţiilor alternative nesinusoidale în seria lui Fourier. Armonice 388
12-3. Forme simple de funcţii periodice nesinusoidale 390
12-4. Metode de descompunere în armonice a curbelor periodice nesinusoidale 393
12-5. Valori eficace în cazul mărimilor periodice nesinusoidale 400
12-6. Curenţii produşi de tensiuni nesinusoidale aplicate circuitelor electrice 402
12-7. Filtre electrice 406
12-8. Puterea în regim nesinusoidal 407
12-9. Armonice superioare în sistemele trifazate 411
12-10. Concluzii asupra prezenţei în circuite a armonicelor superioare . . 416

CAP. XIII: Circuite de curent alternativ cu bobine cu miez de fier 417

13-1. Inductanţe constante şi inductanţe variabile în timpul perioadei . . 417
13-2. Curentul din circuitul cu miez de fier cînd se neglijează fenomenul histerezis 418
13-3. Curentul din circuitul cu miez de fier cînd se ţine seama de fenomenul histerezis 419
13-4. Diagrama vectorială completă a circuitului cu miez de fier . . 422

CAP. XIV: Curentul electric în vid şi în gaze 424

14-1. Emisia termoionică 424
14-2. Variaţia emisiei electronice cu intensitatea cîmpului electric . . . 425
14-3. Fotoemisia 425
14-4. Conductibilitatea gazelor prin ionizare 426
14-5. Descărcări independente în gaze rarefiate 428
14-6. Scînteia electrică 430
14-7. Arcul electric 430
14-8. Descărcări prin efluvii 432
14-9. Efectul corona 432

CAP. XV: Aparate electrice de măsură şi metode de măsurare 433

15-1. Clasificarea aparatelor electrice de măsură 433
15-2. Principii constructive 436
15-3. Aparate magnetoelectrice 439
15-4. Aparate electromagnetice 441
15-5. Aparate electrodinamice 443
15-6. Aparate termice 444
15-7. Aparate de inducţie 445
15-8. Galvanometre 448
15-9. Metode de măsură şi erori de măsurare 450
15-10. Măsurarea curentului 452
15-11. Măsurarea curenţilor de înaltă frecvenţă 454
15-12. Măsurarea tensiunii 456
15-13. Măsurarea rezistenţelor prin metoda voltmetrului şi a ampermetrului 459
15-14. Măsurarea rezistenţelor prin metoda punţii Wheatstone 460
15-15. Măsurarea tensiunii, curentului şi rezistenei prin metoda compensării (metoda potenţiometrică) 461
15-16. Controlul izolaţiei unei instalaţii aflate sub tensiune 464
15-17. Ohmmetrul 465

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

15-18. Noţiuni şi definiţii privitoare la punerea la pămînt 468
15-19. Tensiunea de atingere şi tensiunea de pas a unei prize la pămînt 471
15-20. Măsurarea rezistenţelor de punere la pămînt 473
15-21. Măsurarea puterilor în curentul continuu 476
15-22. Măsurarea puterii active în curent alternativ monofazat 477
15-23. Măsurarea puterii active în curent alternativ trifazat 481
15-24. Măsurarea energiei în curent continuu 488
15-25. Măsurarea energiei active în curent alternativ monofazat 490
15-26. Măsurarea energiei active în curent alternativ trifazat 492
15-27. Măsurarea puterii reactive şi a energiei reactive 493
15-28. Măsurarea fatorului de putere 494
15-29. Frecvenţmetre 497
15-30. Aparate înregistratoare 499
15-31. Oscilografe 500

CAP. XVI: Măsurarea pe cale electrică a mărimilor neelectrice 503

16-1. Consideraţii generale 503
16-2. Caracteristicile aparaturii pentru măsurarea electrică a mărimilor neelectrice 504
16-3. Măsurarea electrică a dimensiunilor liniare 505
16-4. Măsurarea electrică a deformaţiilor şi solicitărilor interioare . . . 508
16-5. Măsurarea electrică a cuplului (momentului) de torsiune 511
16-6. Dinamometre şi manometre electrice 512
16-7. Măsurarea electrică a vitezei unghiulare 514
16-8. Măsurarea electrică la distanţă a nivelului lichidelor 515
16-9. Aparate electrice pentru măsurarea temperaturilor 517
16-10. Măsurarea electrică a concentraţiilor 521
16-11. Analiza electrică a gazelor 523
16-12. Aparate electrice pentru măsurarea umidităţii 525

Bibliografie 529
Index alfabetic 531
Tabla de materii 541

Scanned with OKEN Scanner

ERATA

Pag.	rîndul	în loc de	se va citi
10	1 de jos	rezervoarelor	rezervelor
11	17 de sus	(telecomanda şi automatizarea)	(telecomanda) şi automatizarea
29	16 de sus	magnetic	electric
32	după rînd. 5 de sus		$E_t = E \cos \alpha$
36	11 de sus	$6 \cdot 10^8$ electroni	$6{,}24 \cdot 10^{18}$ electroni /s
44	17 de jos	q	Q
69	1 de sus	$A\ B\ C\ D\ A$	$A\ C\ B\ D\ A$
69	în relaţia (c)	$0{,}2\ I_2$	$0{,}2\ I_3$
92	18 de jos	se înlocueşte cu textul	apă oxigenată. persulfaţi, permanganaţi. cromaţi etc. Prin reducţie elec-
98	1 de jos	*acumulatoare bazice*	*acumulatoare alcaline* (bazice)
114	2 de sus	pe suprafaţa infinit suprafaţa S o mică dS	pe suprafaţa S o suprafaţă infinit mică dS
120	3, 4, 5 şi 6 de sus	se mută după relaţia (5—15)	
125	6 de sus	Rezultă ca expresie a capacităţii condensatorului cilindric	Tensiunea dintre armături este dată de relaţia
185	9 de sus	*circuit indus*	*curent indus*
192	rel (7-5)	$U = RI^2 + E'I$	$U = RI + E'$
207	4 de sus	$\frac{w_1 \Phi_2}{i_2 \nu_1}$	$\frac{w_1 \Phi_2}{i_2 \nu_2}$
208	7 de sus	$\frac{Mi_1}{w_1}$	$\frac{Mi_2}{w_1}$
226	rel. (8-12)	$e_2 = E_m \sin(\omega t - \varphi_2)$	$e_2 = E_m \sin(\omega t + \varphi_2)$
267	14 de jos	Electronică	Electrotehnică
311	în fig. 9-65	i_{Cp}	i_p
314	în fig 9-68	săgeata de jos se opreşte în dreptul intersecţiei curbei i_{tr} cu axa ordonatelor	
320	relaţia (10-16)	se completează cu expresia	$= a + jb$
342	2 de jos	Inductanţei	Reactanţei
346	3 de sus	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{3}$
363	6 de sus	$E_B + E_C = -E_A$	$\bar{E}_B + \bar{E}_C = -\bar{E}_A$
373	1 de jos	$S = 3\,S$	$S = 3\,S_f$
389	16 de sus	$\cos \omega t$	$\cos k\omega t$
393,	în fig. 12-7	pînă la 12-13 inclusiv. ordonatele curbei nesinusoidale şi vectorii corespunzători din reprezentările grafice trebuesc înţeleşi că sunt construiţi la aceiaşi scară	
401	6 de sus	$\sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_2)$	$\sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3)$
401	12 de sus	$\sin(n\omega t + \psi_m - \varphi_n)$	$\sin(n\omega t + \psi_n - \varphi_n)$
404	4 de sus	Spre deosebire de...	In cazul particular al fig. 12-17, spre deosebire de...
407	în relaţia (12-30)	$= \int_0 uidt$	$= \frac{1}{T}\int_0^T uidt$
408	în relaţia (12-33)	$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T uidt}$	$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$
479	în fig. 15-44 şi 15-45	α, Φ , $\Phi, \Phi_{u\ aux}$	α_I , Φ_I , ψ. Φ_{U_I}

Tehnoredactor: Oprea Mihai
Corector: Asist. Iacobele M.

Dat la cules 11.III.1958. Bun de Tipar 10 VII 1958 Tiraj 2500
Hîrtie semi-velină. Format 16/70×100. Coli tipar 3 4¼

Tiparul executat sub comanda nr. 15 de Tipografia Învățămîntului, str. Spiru Haret nr. 9—11 București

Scanned with OKEN Scanner